

Modelowanie przepływu cieczy przez ośrodki porowate

Wykład XIII

ROZWIĄZANIA ZAGADNIEŃ KONSOLIDACJI OŚRÓDKÓW POROWATYCH METODAMI ANALITYCZNYMI.

Poniżej przedstawimy sposób rozwiązywania zagadnień przepływu filtracyjnego cieczy przez odkształcalny ośrodek porowaty. Ze względu na fakt, że rozwiązywanie tych zagadnień metodami analitycznymi prowadzi do skomplikowanej postaci rozwiązań, zazwyczaj stosuje się metody numeryczne. Celem uzyskanych rozwiązań w klasycznej teorii konsolidacji jest określenie skutków, jakie wywiera na ośrodek działanie obciążenia zewnętrznego wywołującego przepływ filtracyjny i deformacje postaciowe szkieletu. W znanych mi rozwiązaniach teorii konsolidacji w mniejszym stopniu zwraca się uwagę na funkcje opisujące proces filtracji i odwrotnie, szczegółowo analizuje się funkcje przemieszczeń i naprężeń w szkielecie ośrodka porowatego. W niniejszej pracy poświęcimy więcej uwagi funkcjom opisującym przepływ filtracyjny cieczy w procesie konsolidacji ośrodka porowatego.

13.1 Zagadnienie jednowymiarowe konsolidacji ciała Biota.

. Zagadnienie jednowymiarowe sprowadza się do rozwiązania zagadnienia porowatego słupa wypełnionego cieczą i poddanego działaniu jednoosiowego ściskania poprzez przyłożenie obciążenia za pośrednictwem porowatej płytki, umożliwiającej swobodny wypływ cieczy z ośrodka lub działania gradientu ciśnienia hydrostatycznego po obu stronach słupa, działania ciężaru własnego ośrodka, a także innego typu działania jak np. działania gradientu prądu stałego, lub gradientu temperatury. Przedstawione poniżej rozwiązania dotyczące zagadnienia jednowymiarowego zostały po raz pierwszy uzyskane w przypadku obciążenia przez [Jasiewiczza, 1968], w przypadku działania prądu elektrycznego i obciążenia przez [Auriault i innych, 1981], [Bauera i innych, 1980a, 1980b] oraz działania prądu elektrycznego i obciążenia i gradientu hydraulicznego przez [Strzeleckiego, Bartlewską, 2006]. Poniżej przedstawiono analizę uzyskanych rozwiązań pod kątem wykorzystania ich do wyznaczania parametrów efektywnych modeli reologicznych oraz w zakresie poszukiwania strefy upłynnienia gruntu, czyli utraty stateczności filtracyjnej w procesie konsolidacji.

13.2 Model porosprężystości Biota – Darcy’ego dla przypadku procesu izotermicznego.

Model porosprężystości Biota – Darcy’ego został szczegółowo omówiony w rozdziale IV niniejszej monografii. Równania w przypadku trójwymiarowej konsolidacji ciała Biota mają postać:

- związków konstytutywnych, które po wprowadzeniu oznaczeń [Biota, 1956] sprowadzają się do postaci:

$$\sigma_{ij} = 2N\varepsilon_{ij} + (A\varepsilon + Q\theta)\delta_{ij},$$

$$\sigma = Q\varepsilon + R\theta,$$

gdzie stałe występujące w związkach konstytutywnych oznaczają:

- N - moduł odkształcenia postaciowego szkieletu,
- A - moduł odkształcenia objętościowego szkieletu wypełnionego cieczą,
- Q - współczynnik wpływu odkształcenia objętościowego cieczy na naprężenie w szkielecie lub odwrotnie współczynnikiem wpływu odkształcenia objętościowego szkieletu na naprężenie w cieczy,
- R - modułem odkształcenia objętościowego cieczy wypełniającej pory ciała Biota,
- parametr M wyraża się poprzez:

$$M = A - \frac{Q^2}{R}.$$

Stałe M i N Biota odpowiadają w przypadku ośrodka sprężystego pozbawionego por stałym Lamego λ i μ . Na podstawie pracy [Biota i Willisa, 1957] można w takim przypadku wyrazić stałe sprężystości Biota przy pomocy modułu odkształcenia postaciowego G i współczynnika Poissona ν :

$$N = G \quad i \quad M = \frac{2\nu G}{(1-2\nu)};$$

- równań ruchu fazy ciekłej i stałej ośrodka, równania ciągłości przepływu oraz związków konstytutywnych, które pozwalają zapisać zbiorczy układ równań liniowej teorii konsolidacji Biota – Darcy’ego w przypadku procesu izotermicznego w przemieszczeniach szkieletu i funkcji naprężenia w cieczy σ w postaci (4.387):

$$\begin{aligned} N\nabla^2 u_i + (M + N)\varepsilon_{,i} &= -\frac{H}{R}\sigma_{,i} + \rho_{11}\frac{D^s v_i^s}{Dt} + \rho_{12}\frac{D^s v_i^l}{Dt} - X_i \rho, \\ K\nabla^2 \sigma &= \frac{1}{R}\dot{\sigma} - \frac{H}{R}\dot{\varepsilon} + \rho_{12}\frac{D^l v_i^s}{Dt} + \rho_{22}\frac{D^l v_i^l}{Dt}, \end{aligned}$$

gdzie:

$$H = Q + R \quad a \quad K = \frac{k}{\rho g n}, \quad k \text{ jest współczynnikiem filtracji Darcy’ego.}$$

W przypadku, gdy proces traktujemy jako quasi-statyczny, pomijamy siły bezwładności Biota i układ równań teorii konsolidacji Biot’a – Darcy’ego możemy zapisać w postaci (4.388):

$$\begin{aligned} N\nabla^2 u_i + (M + N)\varepsilon_{,i} &= -\frac{H}{R}\sigma_{,i}, \\ K\nabla^2 \sigma &= \frac{1}{R}\dot{\sigma} - \frac{H}{R}\dot{\varepsilon}. \end{aligned}$$

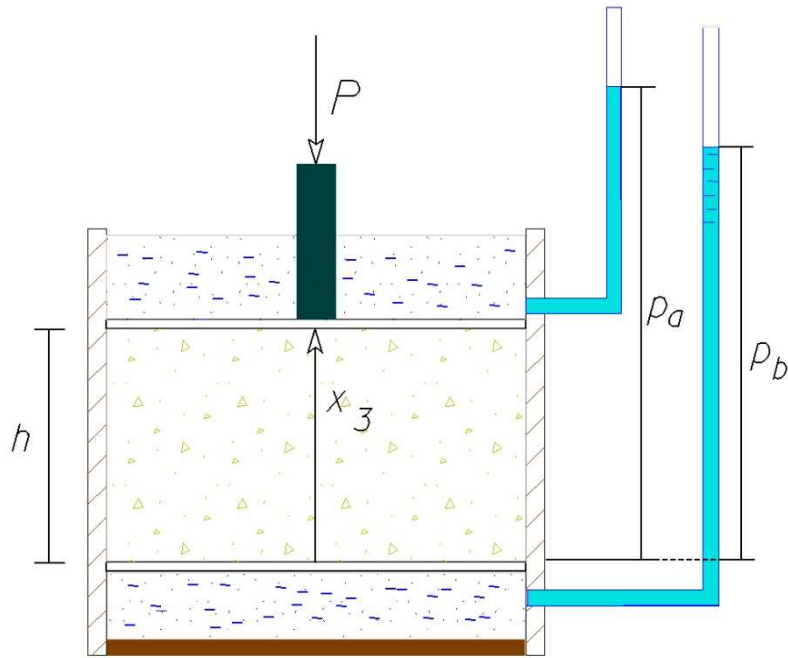
W niektórych przypadkach zakłada się, że struktura materiału podlega jedynie bardzo małym odkształceniom lub jest wręcz nieodkształcalna. Wówczas wprowadzając brak odkształceń postaciowych przy występowaniu cechy ściśliwości ośrodka uzyskujemy dla przypadku zagadnienia jednowymiarowego równanie konsolidacji Terzagiego w postaci:

$$c_{vc} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_3^2} = \dot{\sigma},$$

gdzie $c_{vc} = \frac{k}{\rho g m_{vc}}$, przy czym m_{vc} jest współczynnikiem zagęszczenia ośrodka. W pracy pokażemy przejście graniczne z modelu porosprężystości Biota do modelu Terzagiego.

13.3 Zagadnienie konsolidacji jednowymiarowej wywołanej działaniem obciążenia i gradientu hydraulicznego.

Wszelkie rodzaje obciążenia przykładane są w sposób natychmiastowy w chwili $t = 0$, co odpowiada funkcji Heaviseida $\eta(t)$. Uzyskanie rozwiązania zachowania się ośrodka w przypadku obciążenia zmiennego w czasie jest możliwe przy wykorzystaniu całki Duhamela, co przedstawimy na wybranych przykładach. Pierwsze rozwiązanie zagadnienia jednowymiarowego uzyskał Jasiewicz []. Schemat rozwiązywanego przez nas zagadnienia przedstawiono na rys. 13.1.



Rys. 8.1. Schemat zagadnienia jednowymiarowego konsolidacji ciała Biota.

Zakładając w rozważanym zagadnieniu, że składowe wektora przemieszczenia \vec{u} :

$$u_1 = u_2 = 0,$$

oznaczymy składową $u_3 = u$. Dla przypadku jednowymiarowego związki fizyczne mają postać:

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= (2N + M)\varepsilon + \frac{Q}{R}\sigma, \\ \sigma &= Q\varepsilon + R\theta, \end{aligned} \quad (13.1)$$

gdzie związek geometryczny ma postać: $\varepsilon = \varepsilon_{33} = u_{,3}$.

Równania procesu konsolidacji upraszczają się w tym przypadku do układu dwóch równań z dwoma niewiadomymi:

- równania równowagi w przemieszczeniach:

$$(M + 2N)u_{,33} = -\frac{H}{R}\sigma_{,3} + W_s, \quad (13.2)$$

gdzie W_s jest funkcją źródła odniesioną do szkieletu gruntowego (może to być na przykład funkcja ciężaru ośrodka z uwzględnieniem wyporu $\Delta^* = (1 - f)g\rho_{os}$).

- równanie przepływu Darcy – Biota:

$$K\sigma_{,33} = \frac{1}{R}\dot{\sigma} - \frac{H}{R}\dot{u}_{,3} + W_l, \quad (13.3)$$

gdzie W_l jest funkcją źródła odniesioną do szkieletu gruntowego (może to być na przykład funkcja ciężaru cieczy $fg\rho$).

W większości zadań przyjmujemy $W_s = W_l = 0$ i będziemy rozważać ośrodek jako nieważki.

Zajmiemy się konsolidacją wywołaną działaniem obciążenia zewnętrznego i gradientu ciśnień hydrostatycznych.

Warunki graniczne zagadnienia:

Warunki brzegowe:

1. warunek obciążenia brzegu górnego:

$$\sigma_{33}(h,t) + \sigma(h,t) = -p\eta(t); \quad (13.4)$$

2. warunek naprężeń w cieczy na brzegu górnym:

$$\sigma(h,t) = -p_a\eta(t); \quad (13.5)$$

3. warunek naprężeń na brzegu dolnym:

$$\sigma(0,t) = -p_b\eta(t); \quad (13.6)$$

4. warunek przemieszczeń na brzegu dolnym

$$u(0,t) = 0. \quad (13.7)$$

Warunek początkowy:

Zakładamy, że w chwili $t = +0$ funkcje $\sigma^{(0)}$ i $u^{(0)}$ spełniają układ równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} (M + 2N)u_{,33}^{(0)} &= -\frac{H}{R}\sigma_{,3}^{(0)}, \\ \frac{1}{R}\sigma^{(0)} - \frac{H}{R}u_{,3}^{(0)} &= 0. \end{aligned} \quad (13.8)$$

Dokonajmy na funkcjach naprężenia w cieczy, naprężenia w szkielecie, przemieszczenia i odkształcenia proste przekształcenia Laplace'a. Funkcje obrazu w przestrzeni Laplace'a oznaczmy:

$$(\tilde{\sigma}_{33}, \tilde{\sigma}, \tilde{u}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{\theta}) = L(\sigma_{33}, \sigma, u, \varepsilon, \theta)$$

(13.9)

Uwzględniając warunek początkowy układ równań porosprężystości Biota-Darcy'ego w przestrzeni Laplace'a ma postać:

$$(M + 2N)\tilde{u}_{,33} = -\frac{H}{R}\tilde{\sigma}_{,3}, \quad (13.10)$$

$$K\tilde{\sigma}_{,33} = \frac{s}{R}\tilde{\sigma} - \frac{Hs}{R}\tilde{u}_{,3}. \quad (13.11)$$

Zróżniczkujemy równanie przepływu (13.11) po ∂x_3 a następnie uwzględniając w nim równanie (13.10), otrzymamy równanie trzeciego rzędu:

$$\tilde{\sigma}_{,333} - se\tilde{\sigma}_{,3} = 0, \quad (13.12)$$

gdzie $e = \frac{R(M + 2N) + H^2}{KR^2(M + 2N)}$.

Rozwiązaniem tego równania w przestrzeni Laplace'a zgodnie z pracą [Ditkina, Prudnikowa, 1964] jest funkcja:

$$\tilde{\sigma} = A \exp(x_3 \sqrt{es}) + B \exp(-x_3 \sqrt{es}) + C. \quad (13.13)$$

Korzystając z równania (13.10) i kładąc w nim rozwiązanie (13.13), otrzymamy funkcję przemieszczenia \tilde{u} w postaci:

$$\tilde{u} = \frac{\zeta}{\sqrt{es}} \left[B \exp(-x_3 \sqrt{es}) - A \exp(x_3 \sqrt{es}) \right] + Dx_3 + E, \quad (13.14)$$

gdzie $\zeta = \frac{H}{R(M + 2N)}$

Z pierwszego związku fizycznego obliczmy naprężenie $\tilde{\sigma}_{33}$:

$$\tilde{\sigma}_{33} = - \left[A \exp(x_3 \sqrt{es}) + B \exp(-x_3 \sqrt{es}) \right] + (2N + M)D + \frac{Q}{R}C. \quad (13.15)$$

Podstawiając powyższe funkcje do warunków brzegowych, dostajemy układ równań:

$$\begin{aligned} (2N + M)D + \frac{H}{R}C &= -\frac{P}{s}, \\ A \exp(h\sqrt{es}) + B \exp(-h\sqrt{es}) + C &= -\frac{fp_a}{s}, \\ A + B + C &= -\frac{fp_b}{s}, \\ \frac{\zeta}{\sqrt{es}}(B - A) + E &= 0. \end{aligned} \quad (13.16)$$

Powyższy układ równań składa się z czterech równań i pięciu niewiadomych. Brakujące równanie dostaniemy wstawiając funkcje naprężenia $\tilde{\sigma}$ (13.13) i funkcję przemieszczenia \tilde{u} (13.16) do równania przepływu (13.11). Stąd dostajemy brakujące równanie:

$$C = HD. \quad (13.17)$$

Rozwiązaniem algebraicznego układu równań (13.16) są stałe:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{s} \frac{\Lambda_4 - \Lambda_3 \exp(-h\sqrt{es})}{\sinh(h\sqrt{es})}, \\
B &= \frac{1}{s} \frac{\Lambda_3 \exp(h\sqrt{es}) - \Lambda_4}{\sinh(h\sqrt{es})}, \\
C &= \frac{\Lambda_2}{s}, \\
D &= \frac{\Lambda_1}{s}, \\
E &= \frac{2\zeta\Lambda_4}{s\sqrt{es}} \frac{1}{\sinh(h\sqrt{es})} - \frac{\zeta\Lambda_3}{s\sqrt{es}} \frac{\cosh(h\sqrt{es})}{\sinh(h\sqrt{es})},
\end{aligned} \tag{13.18}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= -\frac{pR}{(M+2N)R+H^2}, \\
\Lambda_2 &= H\Lambda_1, \\
\Lambda_3 &= -fp_a - \Lambda_2, \\
\Lambda_4 &= -fp_b - \Lambda_2.
\end{aligned}$$

Postać rozwiązań w przestrzeni Laplace'a jest następująca:
równanie naprężenia hydrostatycznego w cieczy:

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{s} \Lambda_4 \frac{\sinh(x_3\sqrt{es})}{\sinh(h\sqrt{es})} + \frac{1}{s} \Lambda_3 \frac{\sinh((h-x_3)\sqrt{es})}{\sinh(h\sqrt{es})} + \frac{1}{s} \Lambda_2, \tag{13.19}$$

równanie naprężeń w szkielecie:

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{33} &= -\frac{1}{s} \Lambda_4 \frac{\sinh(x_3\sqrt{es})}{\sinh(h\sqrt{es})} - \frac{1}{s} \Lambda_3 \frac{\sinh((h-x_3)\sqrt{es})}{\sinh(h\sqrt{es})} + \\
&+ \frac{1}{s} (M+2N)\Lambda_1 + \frac{1}{s} \frac{Q\Lambda_2}{R},
\end{aligned} \tag{13.20}$$

równanie przemieszczeń szkieletu gruntowego:

$$\begin{aligned}
\tilde{u} &= -\frac{\zeta\Lambda_4}{s\sqrt{es}} \frac{\cosh(x_3\sqrt{es})}{\sinh(h\sqrt{es})} + \frac{\zeta\Lambda_3}{s\sqrt{es}} \frac{\cosh((h-x_3)\sqrt{es})}{\sinh(h\sqrt{es})} + \\
&+ \frac{2\zeta\Lambda_4}{s\sqrt{es}} \frac{1}{\sinh(h\sqrt{es})} - \frac{\zeta\Lambda_3}{s\sqrt{es}} \frac{\cosh(h\sqrt{es})}{\sinh(h\sqrt{es})} + \frac{1}{s} \Lambda_1 x_3.
\end{aligned} \tag{13.21}$$

Sposób uzyskania retransformat rozwiązania pokażemy na przykładzie pierwszego członu funkcji naprężeń hydrostatycznych $\tilde{\sigma}$, który roboczo nazwiemy \tilde{I}_1 , a który można zapisać w postaci:

$$s\tilde{I}_1 = \Lambda_4 \frac{\sinh(x_3\sqrt{es})}{\sinh(h\sqrt{es})} \quad (13.22)$$

Zgodnie z pracą [Ditkina – Prudnikowa, 1964] (tablice transformacji Laplace'a) można stwierdzić, że ułamek o postaci (13.22) wyraża się w przestrzeni rzeczywistej w sposób następujący:

$$L^{-1}\left(\frac{\sinh(\hat{x}_3\sqrt{s})}{\sinh(\hat{h}\sqrt{s})}\right) = \frac{1}{\hat{h}} \left(\frac{\partial \vartheta_3\left(\frac{\hat{h}-\hat{x}_3}{2\hat{h}}, \frac{t}{\hat{h}^2}\right)}{\partial x_3} \right) \quad (13.23)$$

oraz

$$L^{-1}\left(\frac{\sinh((\hat{h}-\hat{x}_3)\sqrt{s})}{\sinh(\hat{h}\sqrt{s})}\right) = -\frac{1}{\hat{h}} \left(\frac{\partial \vartheta_3\left(\frac{\hat{x}_3}{2\hat{h}}, \frac{t}{\hat{h}^2}\right)}{\partial x_3} \right), \quad (13.24)$$

przy czym ϑ_3 jest funkcją Jacobiego i zapisuje się wzorem:

$$\vartheta_3(v, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(2ni\pi v - n^2\pi^2 t). \quad (13.25)$$

Korzystając z powyższych wzorów dostajemy:

$$\frac{\partial I_1}{\partial t} = -\frac{\Lambda_4}{\hat{h}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sin\left(2\pi n \frac{\hat{h}-\hat{x}_3}{2\hat{h}}\right) - \cos\left(2\pi n \frac{\hat{h}-\hat{x}_3}{2\hat{h}}\right) \right] \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 t}{\hat{h}^2}\right). \quad (13.26)$$

Powyższy wzór po wykonaniu różniczkowania po ∂x_3 :

$$\frac{\partial I_1}{\partial t} = -\frac{\Lambda_4}{\hat{h}^2} \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[n \sin\left(2\pi n \frac{\hat{h}-\hat{x}_3}{2\hat{h}}\right) + n \cos\left(2\pi n \frac{\hat{h}-\hat{x}_3}{2\hat{h}}\right) \right] \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 t}{\hat{h}^2}\right). \quad (13.27)$$

Powyższy wzór można zapisać inaczej:

$$\frac{\partial I_1}{\partial t} = -\frac{2\Lambda_4}{\widehat{h}^2} \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left[n * \sin \left(2\pi n \frac{\widehat{h} - \widehat{x}_3}{2\widehat{h}} \right) \right] \exp \left(-\frac{\pi^2 n^2 t}{\widehat{h}^2} \right). \quad (13.28)$$

Obliczmy funkcję I_1 całkując równanie w przedziale od 0 do t :

$$I_1 = \frac{2\Lambda_4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} * \sin \left(2\pi n \frac{\widehat{h} - \widehat{x}_3}{2\widehat{h}} \right) \right] \exp \left(-\frac{\pi^2 n^2 t}{\widehat{h}^2} \right) \Big|_0^t. \quad (13.29)$$

Podstawiając granice całkowania dostajemy:

$$I_1 = \Lambda_4 \left[\frac{h - x_3}{h} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} * \sin \left(\pi n \frac{h - x_3}{h} \right) \right] \exp \left(-\frac{\pi^2 n^2 t}{h^2 e} \right) \right]. \quad (13.30)$$

Postępując analogicznie i korzystając ze wzorów (13.23) ,(13.24), dostajemy:

$$I_2 = \Lambda_3 \left[\frac{x_3}{h} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} * \sin \left(\pi n \frac{x_3}{h} \right) \right] \exp \left(-\frac{\pi^2 n^2 t}{h^2 e} \right) \right]. \quad (13.31)$$

Trzeci trzon wyraża się przy pomocy funkcji Heaviseida:

$$I_3 = \Lambda_2 \eta(t). \quad (13.32)$$

Funkcja naprężenia hydrostatycznego wyraża się w tym przypadku wzorem:

$$\sigma = I_1 + I_2 + I_3. \quad (13.33)$$

Jak łatwo sprawdzić dla $x_3 = 0$:

$$\sigma = \Lambda_4 + \Lambda_2 = -fp_b, \quad (13.34)$$

a dla $x_3 = h$:

$$\sigma = \Lambda_3 + \Lambda_2 = -fp_a. \quad (13.35)$$

Jak widać funkcja σ spełnia warunki brzegowe (13.5) i (13.6).
Postępując analogicznie znajdziemy pozostałe funkcje rozwiązania.
Funkcja naprężeń w szkielecie ośrodka porowatego jest równa:

$$\sigma_{33} = -I_1 - I_2 + \left[(M + 2N) + \frac{QH}{R} \right] \Lambda_1 \eta(t), \quad (13.36)$$

ale ponieważ:

$$-\frac{pR}{(M+2N)R+H^2} * \left[(M+2N) + \frac{QH}{R} \right] = -p \left[1 - \frac{R}{(M+2N)R+H^2} \right] = -p - \Lambda_2$$

funkcję naprężeń w szkielecie można wyrazić wzorem:

$$\sigma_{33} = -I_1 - I_2 - (p + \Lambda_2)\eta(t). \quad (13.37)$$

Sumując (13.34) i (13.36) dostajemy:

$$\sigma_{33} + \sigma = -p\eta(t). \quad (13.38)$$

Związek (13.38) pokazuje, że na brzegu górnym spełniony jest warunek brzegowy (13.4). Odwracając funkcję obrazu (13.21), otrzymamy funkcję przemieszczeń u :

$$\begin{aligned} u = & -\zeta \left[(\Lambda_4 - \Lambda_2)x_3 + (\Lambda_3 - \Lambda_4) \frac{x_3^2}{2h} + \right. \\ & + \Lambda_4 \frac{2h}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n - \cos\left(\pi n \frac{h-x_3}{h}\right)}{n^2} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 t}{h^2 e}\right) + \\ & \left. - \Lambda_3 \frac{2h}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{1 - \cos\left(\pi n \frac{x_3}{h}\right)}{n^2} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 t}{h^2 e}\right) \right]. \end{aligned} \quad (13.39)$$

Znając funkcję σ możemy obliczyć funkcję prędkości filtracji v wzorem:

$$\begin{aligned} v = & -\frac{k}{\rho g f} \sigma_{,3} = -\frac{k}{\rho g f} \left[(\Lambda_3 - \Lambda_4) + \Lambda_4 \frac{2}{h} \sum_1^{\infty} \cos\left(\pi n \frac{h-x_3}{h}\right) \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 t}{h^2 e}\right) + \right. \\ & \left. - \Lambda_3 \frac{2}{h} \sum_1^{\infty} \cos\left(\pi n \frac{x_3}{h}\right) \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 t}{h^2 e}\right) \right] \end{aligned} \quad (13.40)$$

oraz funkcje dylatacji szkieletu ε i cieczy θ :

$$\begin{aligned} \varepsilon = & -\zeta \left[(\Lambda_4 + \Lambda_2) + (\Lambda_3 - \Lambda_4) \frac{x_3}{h} + \right. \\ & + \Lambda_4 \frac{2}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{\sin\left(\pi n \frac{h-x_3}{h}\right)}{n} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 t}{h^2 e}\right) + \\ & \left. - \Lambda_3 \frac{2}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{\sin\left(\pi n \frac{x_3}{h}\right)}{n} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 t}{h^2 e}\right) \right], \\ \theta = & \frac{1}{R} \sigma - \frac{Q}{R} \varepsilon. \end{aligned} \quad (13.41)$$

13.4 Przykład liczbowy.

Do obliczeń przyjęto stałe materiałowe dla kaolinitu z kopalni „Nowogrodziec”, określone przez [Bauera i innych, 1981].

Przyjęto mianowicie:

porowatość ośrodka - $f = 0,3$;

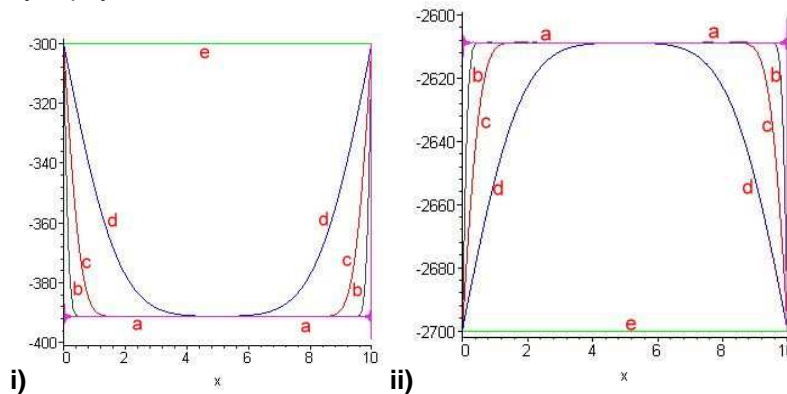
stałe Biota: $H = 7 \cdot 10^6 Pa$, $R = 1.5 \cdot 10^{-6} Pa$, $M = 2.5 \cdot 10^6 Pa$, $N = 1.2 \cdot 10^6 Pa$;

$$k = 1.5 \cdot 10^{-10} \frac{m}{s}$$

współczynnik filtracji:

Rozważmy na początku konsolidację wywołaną tylko przyłożonym do słupa gruntu obciążeniem zewnętrznym zakładając, że ciśnienie przyłożone do górnej granicy słupa $p = 3kPa$, natomiast ciśnienie hydrostatyczne przyłożone do dolnej i górnej powierzchni tłoka jest jednakowe i wynosi: $p_a = p_b = 1kPa$. Przyjęto wysokość słupa ośrodka porowatego równą 10m.

Na rys. 8.2 przedstawiono zmianę w czasie naprężenia hydrostatycznego σ i w tych samych momentach zmianę naprężenia w szkielecie.



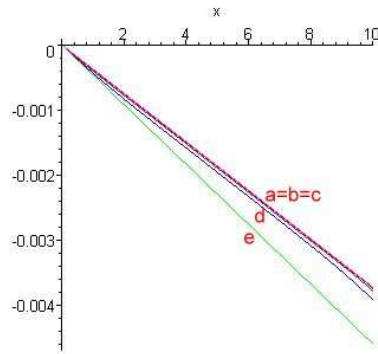
Rys. 8.2. Wykres naprężeń:

i) σ w cieczy, ii) σ_{33} w szkielecie;

(Wykresy wykonano dla czasów a) $t=0s$, b) $t=1 \cdot 10^5 s$ c) $t=5 \cdot 10^5 s$ d) $t=10^6 s$ e) $t=5 \cdot 10^6 s$).

Jak widać, w chwili $t = 0$ powstaje w cieczy określone stałe ściskające naprężenie hydrostatyczne cieczy wewnątrz ośrodka większe od przyłożonego do granic zewnętrznych ośrodka i przyjmującego wartości równe $p_a = p_b = -f \cdot 1kPa$ na brzegach słupa ośrodka porowatego. Również w szkielecie powstaje w momencie początkowym stała wielkość naprężenia wewnątrz słupa ośrodka porowatego, różna od wstępnie przyjętej na brzegach, równa, co do wartości obciążeniu minus naprężenie początkowe w cieczy. $p(1-f) - fp_a$. W procesie konsolidacji ustala się po odpowiednio długim czasie stałą wartość naprężeń hydrostatycznych, równych naprężeniom na brzegach oraz stałą wartość naprężeń w szkielecie równą co do wartości $p(1-f)$.

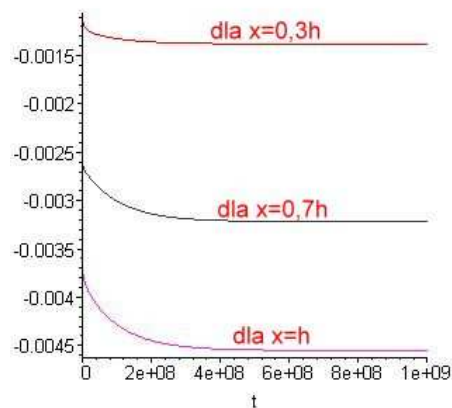
Przyjrzyjmy się rozkładowi przemieszczeń wzdłuż próbki dla danych podanych wyżej. Przebieg krzywej przemieszczeń wzdłuż próbki pokazano na rys 8.3 dla kilku czasów t .



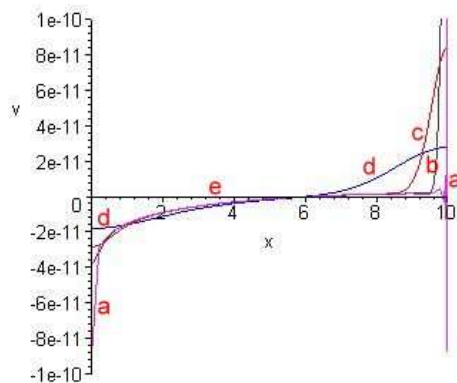
Rys. 8.3. Funkcja przemieszczeń w profilu słupa ośrodka porowatego dla czasów:
a) $t=0s$, b) $t=1 \cdot 10^5 s$ c) $t=5 \cdot 10^5 s$ d) $t= 10^6 s$ e) $t=5 \cdot 10^6 s$.

Jak widać z wykresu 8.3, spełniony jest warunek brzegowy, dotyczący zerowych przemieszczeń w dole próbki. Przedstawiony wykres pokazuje, że w chwili $t=+0$ mamy do czynienia z znacznymi osiadaniami natychmiastowymi. Jak to omówiono poprzednio, efekt ten wynika z faktu, że obciążenie zostało przyłożone w sposób gwałtowny w momencie początkowym, oraz z faktu, że model porosprężystości zawiera cechę sprężystości zarówno w odniesieniu do fazy stałej, jak i ciekłej ośrodka.

Poniżej na rys.8.4 przedstawiono wykres ewolucji pełzania próbki w czasie na trzech poziomach: osiadań słupa ośrodka – poziom $x_3 = h$ oraz przemieszczenia na poziomach $x_3 = 0,7h$ i $x_3 = 0,3h$.



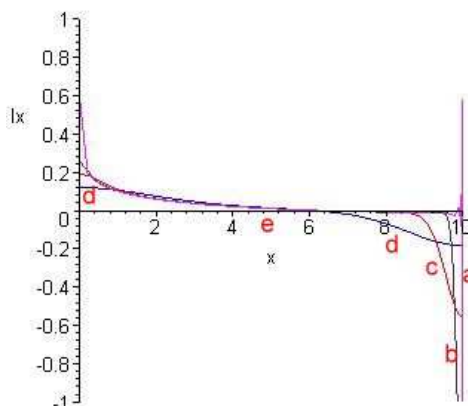
Rys. 8.4. Wykres pełzania słupa ośrodka porowatego pod działaniem obciążenia zewnętrznego. Przedstawiony powyżej wykres jest, jak wiadomo z literatury [Kisiel i inni, 1982], [Bauer i inni, 1980a, 1980b], [Strzelecki, Żak, 1980], klasycznym przebiegiem procesu doświadczalnego obserwowanego w laboratorium przy obserwacji próbek gruntu umieszczonych w edometrze. W wyniku rozwiązania uzyskaliśmy zmianę prędkości filtracji w czasie, co przedstawiono na rys. 8.5



Rys. 8.5. Zmiana prędkości filtracji dla różnych czasów pełzania próbki:
a) $t=0s$, b) $t=1 \cdot 10^5 s$, c) $t=5 \cdot 10^5 s$, d) $t= 10^6 s$, e) $t=5 \cdot 10^6 s$.

Jak widać z rys. 8.86, prędkość filtracji ma przeciwny zwrot na obu końcach słupa ośrodka. Najmniejsze prędkości obserwujemy w strefie środkowej słupa.

Bardziej interesującym może być dla nas wykres spadków hydraulicznych przepływu filtracyjnego generowany podczas ściskania próbki, co pokazano na rys.8.6.



Rys. 8.6. Wykresy spadku hydraulicznego dla różnych czasów pełzania próbki:

a) $t=0s$, b) $t=1 \cdot 10^5 s$, c) $t=5 \cdot 10^5 s$, d) $t=10^6 s$, e) $t=5 \cdot 10^6 s$.

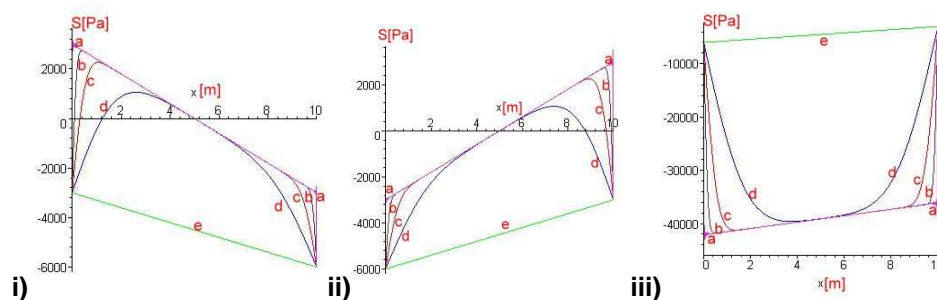
Niebezpieczny ze względu na upłynnienie jest spadek hydrauliczny przy powierzchni działania obciążenia i osiąga znaczną wartość w chwili $t=+0$. Rozważmy obecnie wpływ gradientu hydraulicznego na konsolidację słupa ośrodka porowatego, co wyrażać się będzie przyłożeniem różnych wartości naprężenia hydrostatycznego do dwóch granic ośrodka.

Rozpatrzmy trzy przypadki:

- 1) do powierzchni górnej przykładamy ciśnienie hydrostatyczne równe 20kPa, natomiast na powierzchni dolnej przyłożone ciśnienie wynosi 0kPa, obciążenie $p=0kPa$;
- 2) do powierzchni dolnej przykładamy ciśnienie hydrostatyczne równe 1kPa, a na powierzchni górnej ciśnienie hydrostatyczne wynosi 20kPa, obciążenie $p=0kPa$;
- 3) do powierzchni górnej przykładamy ciśnienie hydrostatyczne równe 10kPa, natomiast na powierzchni dolnej przyłożone ciśnienie wynosi 20kPa, a obciążenie $p=300kPa$.

Porównanie zachowania funkcji naprężeń, przemieszczeń i spadku hydraulicznego pozwoli nam zrozumieć lepiej proces konsolidacji i wpływ na ten proces spadku hydraulicznego.

Zmianę naprężeń w cieczy w czasie dla przedstawionych powyżej przypadków obrazuje rys. 8.7 dla czasów: **a) $t=0s$, b) $t=1 \cdot 10^5 s$, c) $t=5 \cdot 10^5 s$, d) $t=10^6 s$, e) $t=5 \cdot 10^6 s$.**



Rys. 8.7. Funkcja naprężeń w cieczy dla przypadku:

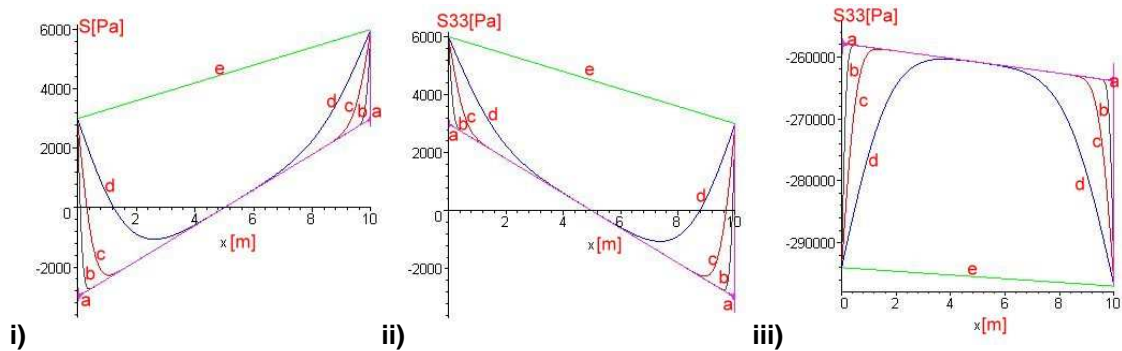
i) filtracja góra \Rightarrow dół $p = 0kPa$, $p_a = 20kPa$, $p_b = 10kPa$;

ii) filtracja dół \Rightarrow góra $p = 0kPa$, $p_a = 10kPa$, $p_b = 20kPa$;

iii) filtracja dół \Rightarrow góra $p = 300kPa$, $p_a = 10kPa$, $p_b = 20kPa$.

Z wykresów 8.7 widać, że przyłożenie gradientu ciśnień na brzegach słupa ośrodka porowatego bez obciążenia zewnętrznego powoduje w chwili $t=+0$ powstanie liniowej funkcji ciśnienia asymetrycznej względem osi $\sigma = 0$, przy czym naprężenie ściskające występuje po stronie mniejszego ciśnienia

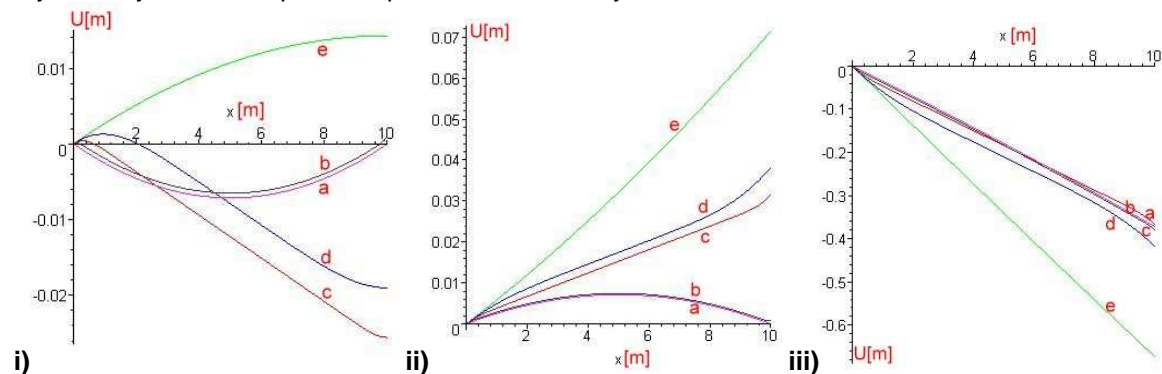
przyłożonego do brzegu. Oczywiście, wartości na brzegach są równe wartościom przyłożonym do tych brzegów. Następnie w procesie konsolidacji wartości naprężeń zmierzają do rozkładu liniowego przechodzącego przez punkty $(0, -fp_b)$, przy czym w obydwu przypadkach po odpowiednio długim czasie dostajemy naprężenia hydrostatyczne ściskające, chociaż w początkowej fazie mieliśmy po jednej stronie słupa naprężenia ściskające, a po drugiej stronie rozciągające. Wykres zmian naprężeń hydrostatycznych pod działaniem obciążenia zewnętrznego $p = 300kPa$ i przy występowaniu gradientu ciśnień hydrostatycznych znacznie różni się od przebiegu analogicznych zmian, gdy gradient ciśnień nie występuje (porównajmy rys. 8.2-i oraz 8.7-iii). Zmianę naprężeń w szkielecie ośrodka porowatego dla tych samych czasów pełzania przedstawiono na rys 8.8:



Rys. 8.8. Funkcja naprężeń w szkielecie ośrodka porowatego dla kilku czasów pełzania w przypadku :

- i) filtracja góra \Rightarrow dół** $p = 0kPa, p_a = 20kPa, p_b = 10kPa$;
- ii) filtracja dół \Rightarrow góra** $p = 0kPa, p_a = 10kPa, p_b = 20kPa$;
- iii) filtracja dół \Rightarrow góra** $p = 300kPa, p_a = 10kPa, p_b = 20kPa$.

Ja widać z rys.8.8, po odpowiednio długim czasie naprężenia w szkielecie są dodatnie, czyli bez względu na kierunek filtracji (górze \rightarrow dół lub z dół \rightarrow góra) szkielet po ustaniu procesu konsolidacji poddany jest rozciąganiu. W przypadku trzecim, gdy na próbkę działa obciążenie zewnętrzne i gradient ciśnienia hydrostatycznego dostajemy naprężenie w szkielecie ściskające, ale znacznie mniejsze od naprężeń, gdy nie występuje gradient ciśnień hydrostatycznych. Można stąd wywnioskować, że w warunkach filtracji naprężenia w szkielecie maleją w odniesieniu do przypadku, gdy filtracja nie występuje. W przypadku zarówno naprężeń hydrostatycznych, jak i naprężeń w szkielecie nie uwzględniliśmy ciężaru własnego fazy stałej i ciekłej ośrodka. Rozkład przemieszczeń szkieletu ośrodka w procesie konsolidacji wzdłuż słupa ośrodka porowatego dla tych samych czasów pełzania przedstawiono na rys. 8.9.

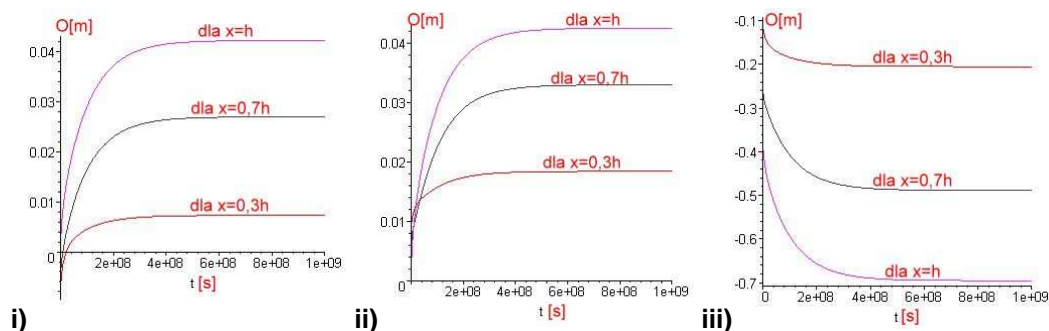


Rys. 8.9. Funkcja przemieszczeń w szkielecie ośrodka porowatego dla kilku czasów pełzania w przypadku:

- i) filtracja góra \Rightarrow dół** $p = 0kPa, p_a = 20kPa, p_b = 10kPa$;
- ii) filtracja dół \Rightarrow góra** $p = 0kPa, p_a = 10kPa, p_b = 20kPa$;
- iii) filtracja dół \Rightarrow góra** $p = 300kPa, p_a = 10kPa, p_b = 20kPa$.

W przypadku filtracji z góry do dołu widać, że przemieszczenia zmieniają znak w czasie. Oznacza to, że w pewnym okresie czasu słup ośrodka porowatego ulega osiadananiu, a następnie następuje proces odwrotny rozrzedzania. Inaczej sprawa ma się w przypadku filtracji z dołu do góry. Jak widać z wykresów, słup cały czas podlega rozrzedzaniu i nie występują osiadanania w całym obszarze ośrodka porowatego.

Proces osiadań lub pęcznienia w czasie dla różnych poziomów słupa ośrodka przedstawiono na rys.8.10.

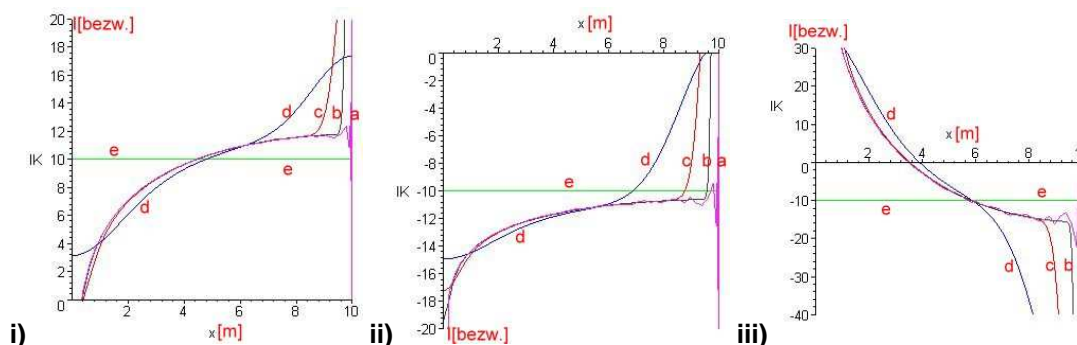


Rys. 8.10. Zmiana przemieszczeń w szkielecie ośrodka porowatego dla kilku czasów pełzania w przypadku:

- i) filtracja góra \Rightarrow dół $p = 0kPa, p_a = 20kPa, p_b = 10kPa$;
- ii) filtracja dół \Rightarrow góra $p = 0kPa, p_a = 10kPa, p_b = 20kPa$;
- iii) filtracja dół \Rightarrow góra $p = 300kPa, p_a = 10kPa, p_b = 20kPa$.

Dla odpowiednio długiego czasu górna powierzchnia słupa ośrodka zmierza w obu przypadkach filtracji do tej samej wielkości pęcznienia próbki. Jednakże, jeżeli dobrze przyjrzymy się wykresom 8.10-i, 8.10-ii zauważymy, że przypadku filtracji z dołu do góry próbka jest ostatecznie bardziej rozrzedzona w dolnej części w porównaniu z filtracją z góry do dołu . Porównując wykresy 8.10-iii i 8.10-i zauważymy, że osiadanania próbki poddanej procesowi filtracji różnią się znacznie od osiadań wywołanych obciążeniem w warunkach braku filtracji. Wartość bezwzględna osiadań jest też znacznie mniejsza od osiadań w warunkach równowagi ciśnień hydrostatycznych na brzegach słupa.

Dla porównania przedstawiono funkcję spadku hydraulicznego wytworzonego przez gradient hydrauliczny i obciążenie dla tych samych przedziałów czasu na rys.8. 11.



Rys. 8.11. Funkcja spadku hydraulicznego dla kilku czasów pełzania w przypadku:

- i) filtracja góra \Rightarrow dół $p = 0kPa, p_a = 20kPa, p_b = 10kPa$;
- ii) filtracja dół \Rightarrow góra $p = 0kPa, p_a = 10kPa, p_b = 20kPa$;
- iii) filtracja dół \Rightarrow góra $p = 300kPa, p_a = 10kPa, p_b = 20kPa$.

Zmiana spadku hydraulicznego obrazuje również zmianę prędkości filtracji, oczywiście ze znakiem przeciwnym. Filtracja w pierwszym przypadku odbywa się w prawie całym przedziale czasowym z góry do dołu, jedynie w pobliżu dolnego brzegu słupa w czasach początkowych konsolidacji obserwuje się przepływ w kierunku przeciwnym. Inaczej wygląda przebieg zmienności spadku hydraulicznego i prędkości w drugim przypadku, tzn. przepływu filtracyjnego z dołu do góry. Obszar słupa ośrodka w części górnej, gdzie występuje przepływ w kierunku odwrotnym, jest większy. Wykresy na rys.8.11

obrazują również, w jakim stopniu przyjmowane w teorii przepływów przez ośrodki nieodkształcalne równania różnią się od modelu przepływu przez ośrodki odkształcalne.