

# Modelowanie przepływu cieczy przez ośrodki porowate

## Wykład XII

### Model porosprężystości Biota - Darcy'ego

#### 12.1 Założenia wstępne.

Zakładamy wstępnie, że ośrodek składa się z porowatego ciała stałego tworzącego w przestrzeni ośrodek ciągły. Formułując swoją teorię M.A. Biot przyjął, że spełnia ona następujące podstawowe założenia:

- ośrodek jest dwufazowy. Składa się ze sprężystego porowatego szkieletu oraz słabo ściśliwej cieczy newtonowskiej wypełniającej pory szkieletu;
- ośrodek porowaty jest ciałem jednorodnym, izotropowym;
- deformacje szkieletu są małe, więc można pominąć nieliniowe człony tensora odkształcenia  $\varepsilon_{ij}$ , więc:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad (12.1)$$

- naprężenia  $\sigma_{ij}$  w szkielecie ośrodka porowatego odnosić będziemy do całkowitej powierzchni przekroju VER, mimo że w rzeczywistości należałoby tę powierzchnię pomniejszyć o pole zajęte przez pory (naprężenie rozmyte). W odniesieniu do cieczy wprowadzimy pojęcie naprężenia porowego cieczy  $\sigma$ , związanego z ciśnieniem efektywnym cieczy związkiem:

$$\sigma = -fp, \quad (12.2)$$

gdzie  $f$  określa porowatość objętościową ośrodka porowatego. Jest ono również odniesione do całkowitej powierzchni przekroju VER;

- porowatość ośrodka  $f$  uważa się za wielkość stałą, która ma charakter statystyczny;
- do opisu procesów przyjmujemy układ odniesienia Eulera.

#### 12.2 Równania ciągłości przepływu ośrodka dwufazowego.

Niech  $\Omega$  jest prostopadłościenną przestrzenią o nieskończenie małych krawędziach  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  wypełnioną ośrodkiem dwufazowym złożonym: z porowatego szkieletu sprężystego i cieczy wypełniającej jego pory. Określimy przez  $S$  powierzchnię ściany elementu przestrzennego  $\Omega$ , a wektor  $\vec{n}$  jest jednostkowym wektorem normalnym do powierzchni  $S$ , skierowanym na zewnątrz elementu  $\Omega$ . Przez  $\vec{v}^l$  i  $\vec{v}^s$  oznaczać będziemy odpowiednio wektory prędkości filtracji cieczy i szkieletu ośrodka, a  $v_i^r = v_i^l - v_i^s$  określa składowe względnej prędkości przepływu filtracyjnego cieczy przez ośrodek porowaty. Jeżeli  $\rho_s$  i  $\rho_l$  oznaczają kolejno gęstość właściwą szkieletu i cieczy, to możemy określić wielkość gęstości szkieletu  $\rho_1$  i cieczy  $\rho_2$ , odniesione każda z nich do objętości całkowitej obszaru  $\Omega$ . Oznaczając przez  $f$  porowatość objętościową, możemy obliczyć te gęstości:  $\rho_1 = (1-f)\rho_s$  i  $\rho_2 = f\rho_l$ . Przez  $\rho$  oznaczać będziemy gęstość ośrodka dwufazowego równą, co do wartości sumie:  $\rho = \rho_1 + \rho_2$ . Wartość  $\bar{\rho}$  oznaczać będzie gęstość cieczy przepływającej przez ścianę  $S$ :  $\bar{\rho} = f_A \rho_l$ , gdzie  $f_A$  oznacza porowatość powierzchniową.

Przepływ masy całkowitej (szkieletu i cieczy) przez ścianę o powierzchni  $S$  jest równy:

$$\int_S \rho v_i^s n_i dS + \int_S \bar{\rho} (v_i^l - v_i^s) n_i dS + \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega = 0. \quad (12.3)$$

Stąd korzystając z twierdzenia Gaussa – Ostrogradzkiego równanie ciągłości przepływu ośrodka dwufazowego złożonego z cieczy i szkieletu ma postać:

$$\frac{D^s \rho}{D t} + \rho \dot{\epsilon} = -[\rho v_i^r]_i, \quad (12.4)$$

gdzie  $\frac{D^s}{D t}$  oznacza pochodną masową wyrażoną wzorem:

$$\frac{D^s}{D t} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i^s \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (12.5)$$

a  $\dot{\epsilon}$  oznacza prędkość zmiany dylatacji szkieletu równa co do wartości  $v_i^s v_i^s$ .

Możemy następnie obliczyć przepływ cieczy przez powierzchnię S. Wyrazi się on wzorem:

$$\int_S \bar{\rho} v_i^s n_i dS + \int_S \bar{\rho} (v_i^l - v_i^s) n_i dS + \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega = 0. \quad (12.6)$$

Stąd dostajemy równanie ciągłości przepływu fazy ciekłej w postaci:

$$\frac{D^r \rho}{D t} + \bar{\rho} (\dot{\theta} - \dot{\epsilon}) = -(\bar{\rho} v_i^l)_i, \quad (12.7)$$

gdzie  $\frac{D^r}{D t}$  jest pochodną masową wyrażoną wzorem  $\frac{D^r}{D t} = \frac{\partial}{\partial t} + (v_i^l - v_i^s) \frac{\partial}{\partial x_i}$ .

Zakładając, że faza stała jest nieruchoma ( $v_i^s = 0$ ), a przez pory przesącza się ściśliwa ciecz, równanie ciągłości przepływu ma sens tylko w odniesieniu do fazy ciekłej ośrodka i sprowadza się do postaci:

$$\text{div}(\bar{\rho} \vec{v}) = -\frac{\partial(\bar{\rho})}{\partial t}. \quad (12.8)$$

Taką postać równania ciągłości uzyskaliśmy w poprzednim podrozdziale IV.2.4 – wzór **Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania.** dla modelu hydrodynamicznego przepływu filtracyjnego. Widać więc, że w przejściu granicznym dostajemy poprzednio wyprowadzone równania ciągłości przepływu.

### 12.3 Równania ruchu fazy stałej i ciekłej.

Aby uzyskać równania równowagi dla fazy stałej i ciekłej ośrodka dwufazowego, wprowadzimy dodatkowe definicje i założenia wprowadzone przez Biota [Biot, 1956a, 1956b]:

- energię kinetyczną ośrodka dwufazowego możemy wyrazić wzorem:

$$2K = \int_{\Omega} (\rho_{11} v_i^s v_i^s + 2\rho_{12} v_i^s v_i^l + \rho_{22} v_i^l v_i^l) d\Omega \quad (12.9)$$

z warunkami:

$$\rho_{11} + \rho_{12} = \rho_1 > 0 ; \quad \rho_{22} + \rho_{21} = \rho_2 > 0 ; \quad \rho_{12} < 0 ,$$

gdzie  $\rho_{12}$  jest nowym parametrem o wymiarze gęstości określającym dynamiczne sprzężenie pomiędzy dwoma fazami ośrodka;

- funkcja dyssypacji jest formą kwadratową zależną od prędkości względnej przepływu filtracyjnego, którą można wyrazić w następujący sposób:

$$2W_d = \int_{\Omega} b v_i^r v_i^r d\Omega , \quad (12.10)$$

gdzie  $b$  jest współczynnikiem oporu filtracyjnego spełniającym warunek  $b > 0$ ;

- korzystając z równania (12.9) można określić objętościowe siły wewnętrzne wynikające z oporu lepkiego przepływającej cieczy przez pory ośrodka. Siły działające na szkielet ośrodka wynoszą:

$$M_i^s = \frac{\partial W_d}{\partial v_i^s} = - \int_{\Omega} b v_i^r d\Omega \quad (12.11)$$

i na ciecz

$$M_i^l = \frac{\partial W_d}{\partial v_i^l} = \int_{\Omega} b v_i^r d\Omega , \quad (12.12)$$

- składowe lokalnego wektora pędu szkieletu i cieczy można obliczyć ze wzoru:

$$P_i^s = \int_{\Omega} (\rho_{11} v_i^s + \rho_{12} v_i^l) d\Omega , \quad (12.13)$$

$$P_i^l = \int_{\Omega} (\rho_{12} v_i^s + \rho_{22} v_i^l) d\Omega . \quad (12.14)$$

Prawo zachowania pędu fazy stałej ośrodka można wyrazić wzorem:

$$\int_S \sigma_{ij} n_j dS + \int_{\Omega} b (v_i^l - v_i^s) d\Omega + \int_{\Omega} (\rho - \bar{\rho}) X_i d\Omega = \int_{\Omega} \frac{D^s P_i^s}{Dt} d\Omega , \quad (12.15)$$

gdzie  $\sigma_{ij} n_j$  oznacza naprężenia w szkielecie działające na powierzchnię  $S$ , a przez  $X_i$  - siły ciężkości na jednostkę masy całkowitej.

Równanie (12.6), po wykorzystaniu twierdzenia Gaussa – Ostrogradzkiego, pozwala na uzyskanie lokalnego równania ruchu fazy stałej ośrodka w postaci:

$$\sigma_{ij,j} + X_i (\rho - \bar{\rho}) = -b v_i^r + \rho_{11} \frac{D^s v_i^s}{Dt} + \rho_{12} \frac{D^s v_i^l}{Dt} , \quad (12.16)$$

gdzie  $\frac{D^s}{Dt}$  jest pochodną materialną wyrażoną wzorem:  $\frac{D^s}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i^s \frac{\partial}{\partial x_i}$ .

Dla fazy ciekłej ośrodka prawo zachowania pędu sprowadza się do postaci:

$$\int_S \sigma_{ij} n_j dS + \int_{\Omega} b (v_i^s - v_i^l) d\Omega + \int_{\Omega} \bar{\rho} X_i d\Omega = \int_{\Omega} \frac{D^l P_i^l}{Dt} d\Omega , \quad (12.17)$$

gdzie  $\frac{D^l}{Dt}$  jest pochodną materialną wyrażona wzorem:  $\frac{D^l}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i^l \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,

$\sigma n_j$  oznacza naprężenia w cieczy działające na całkowitą powierzchnię S. Naprężenie rozmyte w cieczy  $\sigma$  równa się co do wartości:

$$\sigma = -pf, \quad (12.18)$$

przy czym p oznacza ciśnienie efektywne w cieczy.

Równanie (12.17) po wykorzystaniu twierdzenia Gaussa - Ostrogradzkiego pozwala na uzyskanie równania ruchu fazy ciekłej ośrodka w postaci:

$$\sigma_{,i} + X_i \bar{\rho} = b v_i^r + \rho_{12} \frac{D^l v_i^s}{Dt} + \rho_{22} \frac{D^l v_i^l}{Dt}. \quad (12.19)$$

Dla przypadku przepływu quasi – statycznego można pominąć człony reprezentujące siły bezwładności cieczy i szkieletu i równania ruchu dla każdej z faz można zapisać w postaci:

$$\sigma_{ij,j} + X_i(\rho - \bar{\rho}) = -b v_i^r, \quad (12.20)$$

$$\sigma_{,i} + X_i \bar{\rho} = b v_i^r. \quad (12.21)$$

Sumaryczne równanie ruchu dla obydwu faz ma w tym przypadku postać:

$$\sigma_{ij,j} + \sigma_{,i} + X_i \rho = 0. \quad (12.22)$$

W przypadku, gdy szkielet ośrodka wykazuje się jedynie ściśliwością i jest w swojej masie nieodkształcalny, równanie (12.20) traci sens, gdyż szkielet jest nieruchomy i tensor naprężenia reprezentuje tylko część kulistą tensora, a równanie (12.21) sprowadza się do postaci równania przepływu filtracyjnego Darcy'ego **Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania.** w modelu hydrodynamicznym przepływu, które można zapisać w postaci:

$$v_i^l = -k \frac{\partial H}{\partial x_i}. \quad (12.23)$$

## 12.4 Związki konstytutywne ciała Biota.

Związki konstytutywne modelu Biota wyprowadzimy z termodynamiki procesów nieodwracalnych. Problem uzyskania związków konstytutywnych był tematem publikacji wielu publikacji, w tym między innymi Biota [Biot, 1956a ], Strzeleckiego [Strzelecki, 1979, 2006], Derskiego [Derski, 1964a, 1964c, 1969b, 1975], Szefera [Szefer, 1980a, 1980b], Gaszyńskiego [Gaszyński, 1980], Coussy'ego [Coussy, 1995].

Skorzystajmy z pierwszego prawa termodynamiki, które możemy przedstawić w postaci:

$$\dot{L} + \dot{Q} = \frac{D}{Dt}(W + K), \quad (12.24)$$

gdzie: przez L określamy pracę wykonaną przez siły wewnętrzne, siły ciężkości i siły pochodzące od oporu lepkiego przepływającej cieczy; Q oznacza ciepło generowane podczas przepływu filtracyjnego i odkształceń szkieletu ośrodka porowatego; W oznacza energię wewnętrzną; K wyraża energię kinetyczną.

Zapiszemy oddzielnie pierwsze prawo termodynamiki procesów nieodwracalnych dla każdej z faz oddzielnie, przy czym będziemy używać wskaźnika 1 dla fazy stałej ośrodka i 2 dla fazy ciekłej. Moc sił wewnętrznych szkieletu wyraża się wzorem:

$$\dot{L}_1^A = \int_S (\sigma_{ij} + \sigma\delta_{ij}) v_i^s n_j dS. \quad (12.25)$$

Moc sił ciężkości szkieletu ośrodka:

$$\dot{L}_1^P = \int_{\Omega} (\rho - \bar{\rho}) X_i v_i^s d\Omega. \quad (12.26)$$

Moc sił oporu lepkiego cieczy odniesiona do szkieletu:

$$\dot{L}_1^D = - \int_{\Omega} b (v_i^s - v_i^l) d\Omega. \quad (12.27)$$

Ponieważ moc jest wielkością skalarną, więc całkowita moc sił działających na szkielet ośrodka wynosi:

$$\dot{L}_1 = \dot{L}_1^A + \dot{L}_1^P + \dot{L}_1^D. \quad (12.28)$$

Prędkość zmian ciepła w szkielecie ośrodka wyraża się wzorem:

$$\dot{Q}_1 = - \int_{\Omega} q_{i,i}^s d\Omega, \quad (12.29)$$

gdzie  $q_i^s$  są to składowe strumienia ciepła przepływającego przez fazę stałą ośrodka.

Pochodna materialna energii kinetycznej dla fazy stałej ośrodka wynosi:

$$\frac{D^s K_1}{Dt} = \int_{\Omega} (\rho_{11} v_i^s \frac{D^s v_i^s}{Dt} + \rho_{12} v_i^l \frac{D^s v_i^l}{Dt}) d\Omega. \quad (12.30)$$

Pochodna materialna energii wewnętrznej dla szkieletu wynosi:

$$\frac{DW}{Dt} = \int_{\Omega} \dot{w}_1 d\Omega, \quad (12.31)$$

gdzie  $\dot{w}_1$  oznacza prędkość zmiany lokalnej energii wewnętrznej szkieletu.

Biorąc pod uwagę wzory od (12.25) do (12.31) pierwsze prawo termodynamiki w odniesieniu do fazy stałej ośrodka można wyrazić wzorem:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left( \dot{w}_1 + \rho_{11} v_i^s \frac{Dv_i^s}{Dt} + \rho_{12} v_i^l \frac{Dv_i^l}{Dt} \right) d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} \left[ X_i (\rho - \bar{\rho}) v_i^s - b (v_i^s - v_i^l) v_i^s + (\sigma_{ij} + \sigma\delta_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij} + (\sigma_{ij,j} + \sigma_{,i}) v_i^s - q_{i,i}^s \right] d\Omega. \end{aligned} \quad (12.32)$$

Korzystając z równań (12.16) i (12.19), równanie (12.32) można przedstawić w postaci związku lokalnego wyrażającego wielkość energii swobodnej odniesionej do fazy stałej ośrodka:

$$\dot{w}_1 = \sigma_{,i} v_i^s + (\sigma_{ij} + \sigma\delta_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij} - q_{i,i}^s. \quad (12.33)$$

Dla cieczy moc sił wewnętrznych w cieczy jest równa:

$$\dot{L}_2^A = \int_S \sigma (v_i^l - v_i^s) n_i dS . \quad (12.34)$$

Moc sił ciężkości cieczy:

$$\dot{L}_2^p = \int_{\Omega} \bar{\rho} X_i v_i^l d\Omega , \quad (12.35)$$

a moc sił oporu lepkiego w cieczy:

$$\dot{L}_2^D = \int_{\Omega} b (v_i^s - v_i^l) v_i^l d\Omega . \quad (12.36)$$

Prędkość zmian ciepła w cieczy wynosi:

$$\dot{Q} = - \int_{\Omega} q_{i,i}^l d\Omega , \quad (12.37)$$

gdzie  $q_i^l$  to składowe wektora strumienia przepływu ciepła:

Pochodna materialna energii kinetycznej cieczy  $K_2$  wynosi:

$$\frac{D^k K_2}{Dt} = \int_{\Omega} \left( \rho_{12} v_i^l \frac{D^k v_i^s}{Dt} + \rho_{22} v_i^l \frac{D^k v_i^l}{Dt} \right) d\Omega . \quad (12.38)$$

Pochodna materialna energii wewnętrznej cieczy w obszarze  $\Omega$  można wyrazić wzorem:

$$\frac{D^k W_2}{Dt} = \int_{\Omega} \dot{w}_2 d\Omega . \quad (12.39)$$

Korzystając ze wzorów (12.24) oraz wzorów od (12.34) do (12.39), pierwsze prawo termodynamiki dla cieczy wyraża się związkem:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left( \dot{w}_2 + \rho_{22} v_i^l \frac{D v_i^l}{Dt} + \rho_{12} v_i^l \frac{D v_i^s}{Dt} \right) d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} \left[ X_i \bar{\rho} v_i^l + b (v_i^s - v_i^l) v_i^l + \sigma_{,i} (v_i^l - v_i^s) + \sigma (\dot{\theta} - \dot{\varepsilon}) - q_{i,i}^l \right] d\Omega \end{aligned} \quad (12.40)$$

W powyższej relacji przez  $\dot{\theta}$  oznaczono prędkość zmiany dylatacji cieczy, a przez  $\dot{\varepsilon}$  prędkość zmian dylatacji szkieletu ośrodka.

Biorąc pod uwagę równanie ruchu cieczy (12.19), równanie (12.40) można zapisać w postaci związku lokalnego:

$$\dot{w}_2 = -\sigma_{,i} v_i^s + \sigma (\dot{\theta} - \dot{\varepsilon}) - q_{i,i}^l . \quad (12.41)$$

Można założyć, że prędkość zmiany energii wewnętrznej ośrodka dwufazowego  $\dot{w}$  jest równa sumie prędkości zmian energii każdej z faz ośrodka  $\dot{w}_1$  i  $\dot{w}_2$ , więc:

$$\dot{w} = \dot{w}_1 + \dot{w}_2 . \quad (12.42)$$

Oznaczając przez  $q_i$  składowe prędkości przepływu ciepła ośrodka dwufazowego (szkielet + ciecz), można stwierdzić, że:

$$q_i = q_i^s + q_i^l . \quad (12.43)$$

Korzystając z powyższych związków (12.42) i (12.43) oraz z równań (12.33) i (12.41) możemy stwierdzić, że zmiana energii wewnętrznej ośrodka dwufazowego wynosi:

$$\dot{w} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + \sigma \dot{\theta} - q_{i,i} . \quad (12.44)$$

Pierwsza zasada termodynamiki określa związek pomiędzy pracą mechaniczną i ciepłem. Wyraża ona bilans energii i nie wnosi ograniczeń na kierunek procesu zmiany stanu ciała. W zagadnieniach mechaniki klasycznej ciał idealnie sztywnych możemy mówić o wzajemnej zamianie energii potencjalnej w kinetyczną zakładając oczywiście, że w układzie nie ma dyssypacji energii generowanej na przykład na skutek wzajemnego tarcia cząstek. Gdy w układzie zaczynają występować zmiany termiczne, mamy do czynienia z procesami nieodwracalnymi. W takim przypadku musimy odwołać się do drugiego prawa termodynamiki, które nakłada istotne ograniczenia na proces zmian energetycznego układu.

Celem opisanego zjawiska nieodwracalnych wprowadza się w termodynamice funkcję zmiany stanu zwaną entropią. Aby określić ograniczenie kierunków zmian stanu układu, drugie prawo termodynamiki wprowadza nierówność stwierdzającą, że zmiana entropii wewnętrznej układu jest zawsze dodatnia lub równa zero w przypadku procesu nieodwracalnego, zwana nierównością Clausiusa – Duhema. W mechanice ośrodków ciągłych wg. Derskiego [Derski, 1975], De Groota, Mazura [De Groot, Mazur, 1965] wprowadza się funkcję entropii właściwej  $s$  mierzonej na jednostkę objętości  $\Omega$ , co można wyrazić wzorem:

$$S = \int_{\Omega} s d\Omega . \quad (12.45)$$

Zdefiniujemy entropię właściwą w postaci:

$$ds = \frac{dq}{T} , \quad (12.46)$$

przy czym:

- $T$  jest temperaturą bezwzględną,
- $dq$  jest przyrostem ciepła na jednostkę objętości.
- różniczka  $ds$  jest różniczką zupełną.

Ponieważ w przypadku ogólnym ciało może wymieniać ciepło z otoczeniem, prędkość zmian entropii jest sumą prędkości zmian entropii  $S_z$  wskutek wymiany ciepła z otoczeniem i prędkości zmian entropii wewnętrznej, co można zapisać równaniem:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS_w}{dt} + \frac{dS_z}{dt} . \quad (12.47)$$

Entropia związana z wymianą ciepła z otoczeniem wyraża się związkiem:

$$\frac{dS_z}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dQ}{dt} = - \int_{\Omega} q_{i,i} \frac{1}{T} d\Omega, \quad (12.48)$$

co sprowadza się do równania lokalnego w postaci:

$$T \frac{ds_z}{dt} = -q_{i,i}. \quad (12.49)$$

Jak widać z zależności (12.49), entropia  $S_z$  może mieć wartość dodatnią, ujemną, lub równą zero w zależności od kierunku przepływającego ciepła i od jego dywergencji. Inaczej ma się sprawa z entropią wewnętrzną  $S_w$ . Jej zmiana w jednostce objętości układu musi spełniać nierówność Clausiusa-Duhema, co w zapisie lokalnym można przedstawić w sposób następujący:

$$\frac{ds_w}{dt} \geq 0. \quad (12.50)$$

Jeżeli skorzystamy z definicji entropii, wyrażoną wzorem (12.48), prędkość zmiany entropii możemy zapisać związką:

$$\dot{S}_z = - \int_{\Omega} \frac{q_{i,i}}{T} d\Omega = \int_{\Omega} \dot{s}_z d\Omega, \quad (12.51)$$

gdzie  $\dot{S}_z$  jest prędkością zmiany entropii lokalnej, a  $T$  określa temperaturę absolutną ośrodka. Korzystając ze wzoru (12.45) oraz równania (12.51), zmianę energii wewnętrznej ośrodka możemy wyrazić równaniem:

$$\dot{w} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + \sigma \dot{\theta} + \dot{s}_z T. \quad (12.52)$$

Aby uzyskać związki konstytutywne, skorzystamy z definicji energii swobodnej Helmholtza wyrażającej się wzorem:

$$F = W - ST. \quad (12.53)$$

Energia swobodna Helmholtz'a, podobnie jak energia wewnętrzna  $W$ , jest funkcją stanu ośrodka. Jeżeli zmiany stanu ośrodka są nieskończenie małe, zmianę funkcji stanu  $F$  można wyrazić przy pomocy definicji różniczki zupełnej  $dF$ :

$$dF = dW - TdS - SdT. \quad (12.54)$$

### Proces izotermiczny.

W przypadku procesów izotermicznych mamy:

$$dT = 0, \quad (12.55)$$

więc w takim przypadku:

$$dF = dW - TdS. \quad (12.56)$$



Traktując różniczkę zupełną funkcji Helmholtza  $F$  jako zmianę tej funkcji stanu w czasie, co możemy napisać w postaci:

$$\dot{F} = \dot{W} - T\dot{S} = \dot{W} - T[\dot{S}_w + \dot{S}_z] \quad (12.57)$$

oraz wprowadzając funkcję lokalną energii swobodnej Helmholtz'a  $\chi$  spełniającą związek:

$$F = \int_{\Omega} \chi d\Omega, \quad (12.58)$$

równanie (12.57) wyraża się w skali lokalnej następująco:

$$\dot{\chi} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + \sigma\dot{\theta} - T\dot{s}_w. \quad (12.59)$$

Stąd dostajemy:

$$T\dot{s}_w = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + \sigma\dot{\theta} - \dot{\chi} \geq 0. \quad (12.60)$$

Kładąc:

$$\chi = \chi(\varepsilon_{ij}, \theta), \quad (12.61)$$

na podstawie (12.60) dostajemy:

$$\left( \sigma_{ij} - \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \dot{\varepsilon}_{ij} + \left( \sigma - \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} \geq 0 \quad (12.62)$$

dla każdych  $\dot{\varepsilon}_{ij}$ ,  $\dot{\theta}$ . Powyższe równanie jest spełnione, gdy:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (12.63)$$

i

$$\sigma = \frac{\partial \chi}{\partial \theta}. \quad (12.64)$$

Ponieważ funkcja zmiany energii swobodnej Helmholtza jest różniczką zupełną, więc:

$$d\chi = \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \dot{\theta}. \quad (12.65)$$

Rozwijając w szereg Taylor'a funkcję energii swobodnej  $\chi$  w okolicach stanu naturalnego znajdujemy:

$$\begin{aligned} \chi(\varepsilon_{ij}, \theta) = & \chi(0,0) + \frac{\partial \chi(0,0)}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial \chi(0,0)}{\partial \theta} \theta + \\ & + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \chi(0,0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + 2 \frac{\partial^2 \chi(0,0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \theta} \varepsilon_{ij} \theta + \frac{\partial^2 \chi(0,0)}{\partial \theta \partial \theta} \theta \theta \right] + \dots \end{aligned} \quad (12.66)$$

Ponieważ w stanie naturalnym (nieodkształconym) funkcje:  $\chi(0,0)$ ,  $\sigma_{ij}(0,0)$  oraz  $\sigma(0,0)$  są równe zeru, więc z dokładnością do małych drugiego rzędu możemy zapisać:

$$2\chi(\varepsilon_{ij}, \theta) = c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \beta_{ij} \varepsilon_{ij} \theta + \gamma \theta \theta, \quad (12.67)$$

gdzie

$$c_{ijkl} = \frac{\partial^2 \chi(0,0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}, \quad (12.68)$$

$$\beta_{ij} = 2 \frac{\partial^2 \chi(0,0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \theta}, \quad (12.69)$$

$$\gamma = \frac{\partial^2 \chi(0,0)}{\partial \theta \partial \theta}. \quad (12.70)$$

Korzystając ze związków (12.63) i (12.64) uzyskamy związki konstytutywne ciała Biota w przypadku dowolnej anizotropii ośrodka dwufazowego:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \beta_{ij} \theta, \quad (12.71)$$

$$\sigma = \beta_{ij} \varepsilon_{ij} + \gamma \theta. \quad (12.72)$$

Mimo że nie korzystaliśmy z prawa symetrii Onagera, uzyskaliśmy związki konstytutywne spełniające to prawo. W przypadku, gdy na wielkość ciśnienia porowego mają wpływ jedynie odkształcenia objętościowe cieczy, co powoduje, że  $\beta_{ij} = \beta \delta_{ij}$ , wtedy uzyskujemy uproszczoną postać związków konstytutywnych Biota:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \beta \delta_{ij} \theta \quad (12.73)$$

oraz

$$\sigma = \beta \varepsilon + \gamma \theta. \quad (12.74)$$

W przypadku szkieletu izotropowego tensor sprężystości  $c_{ijkl}$  można wyrazić przy pomocy dwóch stałych sprężystości zdefiniowanych, przez Biota w postaci:

$$c_{ijkl} = A \delta_{ij} \delta_{kl} + N (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (12.75)$$

Używając oznaczeń wprowadzonych przez Biota, wprowadzimy dwie nowe stałe:

$$\beta = Q \quad i \quad \gamma = R. \quad (12.76)$$

Związki konstytutywne po wprowadzonych oznaczeniach sprowadzają się do postaci zaproponowanej przez Biota [Biot, 1956]:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= 2N\varepsilon_{ij} + (A\varepsilon + Q\theta)\delta_{ij}, \\ \sigma &= Q\varepsilon + R\theta.\end{aligned}\tag{12.77}$$

W pracy Biota – Willis [Biot, Willis, 1957] zinterpretowano stałe występujące w związkach konstytutywnych (12.77) w sposób następujący:

- N jest modułem odkształcenia postaciowego szkieletu,
- A jest modułem odkształcenia objętościowego szkieletu wypełnionego cieczą,
- Q jest współczynnikiem wpływu odkształcenia objętościowego cieczy na naprężenie w szkielecie lub odwrotnie - współczynnikiem wpływu odkształcenia objętościowego szkieletu na naprężenie w cieczy,
- R jest modułem odkształcenia objętościowego cieczy wypełniającej pory ciała Biota,
- parametr M wyraża się poprzez:

$$M = A - \frac{Q^2}{R}.$$

Stale M i N Biota odpowiadają w przypadku ośrodka sprężystego pozbawionego por **stałym Lamego**  $\lambda$  i  $\mu$ . Takie oznaczenie stałych Biot przyjął i konsekwentnie stosował w swojej pracy Coussy [Coussy, 1995]. Na podstawie pracy Biota, Willis [Biot, Willis, 1957] można w takim przypadku wyrazić stałe sprężystości Biota przy pomocy modułu odkształcenia postaciowego G i współczynnika Poissona  $\nu$ :

$$N = G \quad i \quad M = \frac{2\nu G}{(1-2\nu)}.\tag{12.78}$$

Sposób wyznaczania pozostałych stałych modelu Biota czytelnik znajdzie w pracy [Fatta, 1959].