

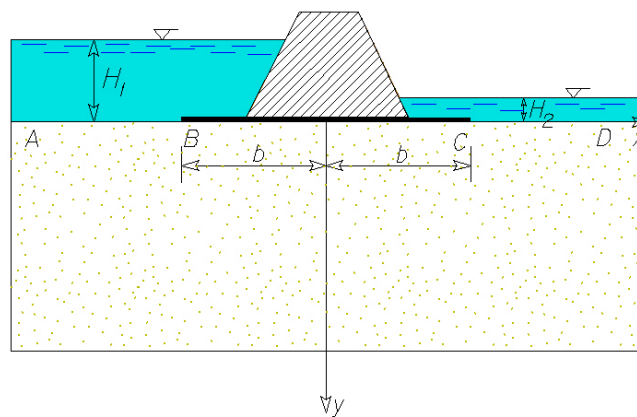
Modelowanie przepływu cieczy przez ośrodki porowate

Wykład XI

Zagadnienia przepływu wody pod ciśnieniem.

11.1 Płaski fundament zapory wodnej na warstwie o nieskończonej miąższości.

Na przepuszczalnej warstwie o współczynniku filtracji k , ograniczonej linią AD spoczywa fundament zapory wodnej na odcinku BC.



Rys. 63. Schemat zagadnienia przepływu pod fundamentem zapory wodnej.

Po lewej stronie (patrz rys.63) zapory znajduje się zbiornik wody, w którym poziom wody ponad terenem wynosi H_1 . Po prawej stronie mamy koryto rzeki, przy czym poziom wody ponad teren w przekroju (rys. 7.53) wynosi H_2 . Wzdłuż półprostych AB i CD mamy do czynienia z brzegiem przepuszczalnym, więc składowa styczna prędkości do tych brzegów jest równa zero:

$$v_x = 0; v_y \neq 0. \quad (0.1)$$

Natomiast dla brzegu BC mamy do czynienia z brzegiem nieprzepuszczalnym, więc składowa normalna do tego brzegu jest równa zero:

$$v_y = 0; v_x \neq 0. \quad (0.2)$$

Wiemy ponadto, że dla $x \rightarrow \pm\infty$ lub $y \rightarrow \pm\infty$ obydwie składowe prędkości \vec{v} winny dążyć do zera, więc prędkość zespolona w:

$$w = v_x - i v_y \quad (0.3)$$

powinna również dążyć do zera, czyli:

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} w = 0. \quad (0.4)$$

Warunki brzegowe zadania dają się przedstawić w prostej postaci przy pomocy składowych prędkości (0.1), (0.2), więc będziemy poszukiwali funkcji potencjału zespolonego w sposób pośredni, poprzez określenie najpierw funkcji prędkości zespolonej w .

Przyjmując układ współrzędnych, jak na rys. 7.53, widzimy zgodnie z (0.1) i (0.2), że:

- dla $|x| < b$ w ma wartość rzeczywistą,
- dla $|x| > b$ w ma wartość urojona.

Przyjmijmy wstępnie, że funkcja prędkości zespolonej wyraża się wzorem:

$$w = \sqrt{b - z} . \quad (0.5)$$

Funkcja w ma wartości rzeczywiste dla $z = x < b$ i wartości urojone dla $z = x > b$. Funkcja ta spełnia warunki brzegowe dla dodatniej półosi x , natomiast nie spełnia ich dla półosi ujemnej x .

Przyjmijmy następnie, że funkcja w równa się:

$$w = \sqrt{b + z} \quad (0.6)$$

i ma wartości rzeczywiste dla $z = x > b$ i urojona dla $z = x < b$, spełnia więc warunki dla ujemnej półosi x , natomiast nie spełnia warunku brzegowego dla dodatniej półosi x . Łatwo sprawdzić, że funkcja powstała z iloczynu funkcji (0.5) i (0.6):

$$w = \sqrt{b^2 - z^2} \quad (0.7)$$

przyjmuje wartości rzeczywiste dla $|x| < b$ oraz wartości urojone dla $|x| > b$, spełnia więc dwa pierwsze warunki brzegowe (0.1) i (0.2). Nie spełnia natomiast warunku trzeciego (0.4), który zakłada, że prędkość zespolona „ w ” powinna być równa zero dla $z \rightarrow \infty$. Powyższy warunek i warunki brzegowe (0.1) i (0.2) spełnia natomiast funkcja:

$$w = \frac{M}{\sqrt{b^2 - z^2}} , \quad (0.8)$$

gdzie: M - to wielkość zespolona stała.

Funkcja (0.8) nie jest jedyną spełniającą warunki (0.1), (0.2), (0.4), jednakże, jak to wykażemy później, jest jedyną, która odpowiada warunkom określonym przez nasze zadanie. Gdy przemnożymy funkcję (0.8) przez funkcję wymierną z rzeczywistymi współczynnikami c i a , której stopień licznika nie przewyższa stopnia mianownika w postaci:

$$\frac{(z - c)^n}{(z - a)^m} ,$$

gdzie $n \leq m$ oraz n i m to liczby naturalne rzeczywiste otrzymamy funkcję prędkości zespolonej w postaci:

$$w = \frac{M(z - c)^n}{(z - a)^m \sqrt{b^2 - z^2}} . \quad (0.9)$$

Funkcja ta spełnia warunki brzegowe (0.1), (0.2), (0.4). Posiada ona jednak dodatkowe własności w punktach $x = c, y = 0$ i $x = a, y = 0$. Przyjmijmy również na przykład, że $a = b$.

Przechodząc do granicy w punktach $x = \pm b$, $y = 0$ z lewej i prawej strony wektor prędkości powinien obrócić się o kąt $\frac{\pi}{2}$. W rozpatrywanym przypadku obraca się o kąt $\frac{\pi}{m} + \frac{1}{2}\pi$.

Zakładając $|a| < b$ otrzymamy w punkcie $x = a$, $y = 0$ dodatkowy punkt osobliwy pod fundamentem zapory wodnej. Można wykazać, że przy $n=0$ i $m=1$ jest to wtedy punktowe źródło wody lub dren. Funkcja ta jest wykorzystana w zadaniach z rurą drenażową, usytuowaną pod fundamentem budowli piętrzącej. Funkcja (0.9) może stanowić podstawę do budowy rozwiązań zagadnień brzegowych bardziej złożonych od rozpatrywanego w tym podrozdziale.

Wyznamy obecnie funkcje potencjału zespolonego Ω . Korzystając z zależności:

$$w = \frac{d\Omega}{dz}$$

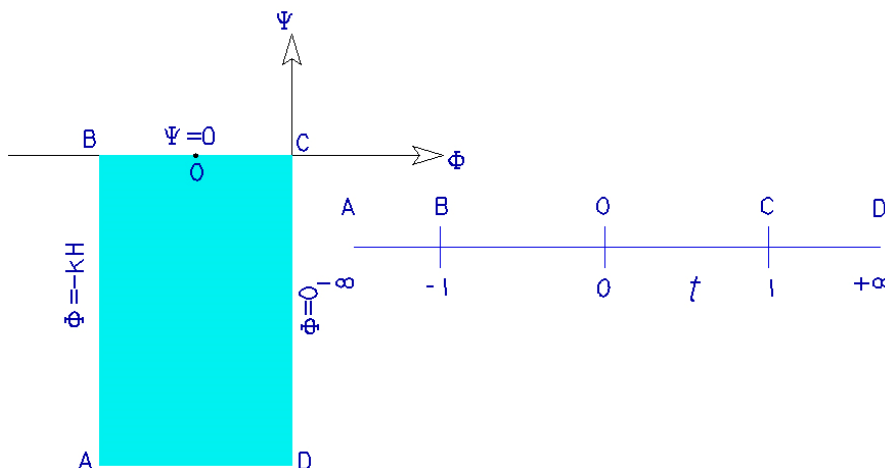
i ze wzoru (7.169) dostajemy:

$$\Omega = \Phi + i\Psi = \int w dz + N.$$

Po scałkowaniu funkcji prędkości zespolonej określonej wzorem (0.8) otrzymujemy funkcję potencjału zespolonego Ω w postaci:

$$\Omega = M \arcsin \frac{z}{b} + N. \quad (0.10)$$

Sprawdźmy obecnie, czy stosując wzór Christoffela – Schwarz, czyli metodę odwzorowań konforemnych uzyskamy dla rozpatrywanego przypadku taką samą funkcję potencjału zespolonego Ω . W tym celu musimy określić obszar filtracji na płaszczyźnie zespolonej Ω dzięki znajomości warunków brzegowych zagadnienia. Jak widać to na rys. 7.54, obszar ten jest ograniczony prostymi $\Psi = 0$ oraz półprostymi określonymi równaniami $\Phi = 0$ i $\Phi = -kH$. Punkty charakterystyczne pokazane na rysunku 7.54 A, B, C, D oraz punkt określający początek układu odniesienia 0 mają swoje miejsce na płaszczyźnie Ω .



Rys. 7.54. Odwzorowanie obszaru filtracji na płaszczyźnie potencjału zespolonego Ω .

Punkty charakterystyczne A, B, C, D i punkt 0 znajdują się zarówno na płaszczyźnie Ω , jak również na płaszczyźnie z , można więc skorzystać ze wzoru Christoffela – Schwarz i wyznaczyć równanie potencjału zespolonego Ω . Dla ułatwienia rozważań przepisujemy ten wzór poniżej:

$$z = M \int_0^t \frac{dt}{(t-a_1)^{1-\frac{\alpha_1}{\pi}} (t-a_2)^{1-\frac{\alpha_2}{\pi}} \dots (t-a_n)^{1-\frac{\alpha_n}{\pi}}} + N.$$

Zauważymy na wstępie, że rozpatrywany przez nas obszar na płaszczyźnie Ω ma postać wielokąta, w którym występują dwa kąty α_1 i α_2 przy wierzchołkach B i C. Na płaszczyźnie zmiennej zespolonej z mamy natomiast do czynienia z półpłaszczyzną. Kąty przy wierzchołkach A i D, pomijają się gdyż na płaszczyźnie zmiennej zespolonej z odpowiada im odcięta $\pm\infty$ zgodnie z właściwością całki Christoffela – Schwarz. Odpowiednie wartości w powyższym wzorze będą następujące:

$$a_1 = -b, a_2 = b, \alpha_1 = \frac{\pi}{2}, \alpha_2 = \frac{\pi}{2}, z = \Omega, t = z. \quad (0.11)$$

Po uwzględnieniu tych wartości we wzorze Christoffela – Schwarz przedstawimy go w postaci:

$$\Omega = M \int_0^z \frac{dz}{(z+b)^{\frac{1}{2}} (z-b)^{\frac{1}{2}}} + N, \quad (0.12)$$

co prowadzi do następującej postaci funkcji potencjału zespolonego Ω :

$$\Omega = -iM \arcsin \frac{z}{b} + N. \quad (0.13)$$

Otrzymaliśmy więc postać funkcji potencjału zespolonego w postaci nieco różniącej się od uzyskanej drogą „intuicyjną” (0.10). Pokażemy, że obydwie postacie tego rozwiązania są ekwiwalentne i prowadzą do identycznej siatki hydrodynamicznej przepływu.

Aby określić funkcję potencjału zespolonego Ω , należy wyznaczyć stałe M i N dla obydwu postaci rozwiązania. Wiemy, że funkcja potencjału prędkości równa się:

$$\Phi = -k \left(\frac{P}{\gamma_w} + y \right) + C,$$

gdzie: C – dowolna stała zależna od przyjęcia przez nas poziomu powierzchni odniesienia potencjału prędkości Φ .

Przyjmijmy stałą C w taki sposób, aby wzdłuż poziomu wody w rzece (wzdłuż brzegu CD) funkcja potencjału Φ była równa zero. Założywszy przy tym, że ciśnienie atmosferyczne $p_a = 0$, obliczamy:

$$-kH_2 + C = 0.$$

Stąd:

$$C = kH_2$$

Możemy ostatecznie stwierdzić, że funkcja Φ wyraża się wzorem:

$$\Phi = -k \left[\frac{P}{\gamma_w} + (y - H_2) \right]. \quad (0.14)$$

Obliczamy Φ wzdłuż brzegu AB.

$$\Phi_{AB} = -k(H_1 - H_2).$$

Określając różnicę $H_1 - H_2$ przez H_m dostajemy:

$$\Phi_{AB} = -kH_m. \quad (0.15)$$

Funkcja prądu wzdłuż fundamentu BC równa się dowolnej stałej, przyjmując jednakże, że stała ta jest równa zeru mamy:

$$\Psi_{BC} = 0. \quad (0.16)$$

Na podstawie przeprowadzonych wyżej rozważań, możemy stwierdzić, że w punkcie B o współrzędnych $x = -b, y = 0$

$$\Psi = 0 \quad \text{i} \quad \Phi = -kH_m, \quad (0.17)$$

natomiast w punkcie C o współrzędnych $x = b, y = 0$:

$$\Psi = 0 \quad \text{i} \quad \Phi = 0. \quad (0.18)$$

Podstawiając związki (0.17) i (0.18) do wzoru (0.10) dostajemy układ równań:

$$\begin{aligned} \square \square \quad & \frac{\pi}{2}M + N = 0, \\ & \frac{3\pi}{2}M + N = -kH_m. \end{aligned} \quad (0.19)$$

Po rozwiązaniu tego układu równań algebraicznych dostajemy:

$$\begin{aligned} M &= -\frac{kH_m}{\pi}, \\ N &= \frac{kH_m}{2}. \end{aligned} \quad (0.20)$$

Podstawiając stałe M i N do wzoru (0.10) otrzymujemy:

$$\Omega = \frac{kH_m}{\pi} \arcsin\left(\frac{z}{b}\right) - \frac{kH_m}{2} \quad (0.21)$$

lub po wykorzystaniu własności funkcji trygonometrycznych możemy funkcję potencjału zespolonego zapisać inaczej:

$$\Omega = \frac{kH_m}{\pi} \arccos \frac{z}{b}. \quad (0.22)$$

Analogicznie, korzystając z tych samych warunków (0.17) i (0.18), możemy obliczyć stałe dla rozwiązania w postaci wzoru (0.13).

Dostajemy dla tego przypadku układ równań:

$$\begin{aligned} iM \frac{\pi}{2} + N &= 0, \\ -iM + N &= 0, \end{aligned} \quad (0.23)$$

z którego otrzymujemy stałe:

$$iM = -\frac{kH_m}{\pi}, \quad N = -\frac{kH_m}{2}. \quad (0.24)$$

Po podstawieniu tych stałych do wzoru (0.13) dostajemy dokładnie taką samą postać funkcji potencjału zespolonego Ω jak we wzorze **Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania.**:

$$\Omega = \frac{kH_m}{\pi} \arcsin\left(\frac{z}{b}\right) - \frac{kH_m}{2}.$$

Pokazaliśmy więc, że obydwie drogi rozumowania prowadzą do jednakowego wyniku. Przekształcając wzór (0.22) mamy:

$$z = b \cos \frac{\pi\Omega}{kH_m}. \quad (0.25)$$

Wstawiając $\Omega = \Phi + i\Psi$ oraz $z = x + iy$ możemy stwierdzić, że zależność (0.25) ma postać:

$$x + iy = b \cos\left(\frac{\pi\Phi}{kH_m} + i\frac{\pi\Psi}{kH_m}\right). \quad (0.26)$$

Oznaczając:

$$\frac{\pi\Phi}{kH_m} = \tilde{\Phi} \quad \text{oraz} \quad \frac{\pi\Psi}{kH_m} = \tilde{\Psi}, \quad (0.27)$$

mamy:

$$x + iy = b \cos(\tilde{\Phi} + i\tilde{\Psi}). \quad (0.28)$$

Wiedząc na podstawie tablic matematycznych [Rizik, Gradstein, 1964] lub programów matematycznych, że:

$$\cos(\tilde{\Phi} + i\tilde{\Psi}) = \cos \tilde{\Phi} \cosh \tilde{\Psi} + i \sin \tilde{\Phi} \sinh \tilde{\Psi},$$

równanie (0.28) można zapisać w postaci:

$$x + iy = b \cos \tilde{\Phi} \cosh \tilde{\Psi} + ib \sin \tilde{\Phi} \sinh \tilde{\Psi}, \quad (0.29)$$

a stąd po przeniesieniu wszystkich członów równania na jedną stronę równania i korzystając z faktu, że równanie (0.29) jest wówczas spełnione, gdy część rzeczywista i urojona jest równa zero, dostajemy dwa związki:

$$x = b \cos \tilde{\Phi} \cosh \tilde{\Psi}, \quad (0.30)$$

$$y = b \sin \tilde{\Phi} \sin h \tilde{\Psi}. \quad (0.31)$$

Obliczając ze związku (0.31) $\sin \tilde{\Phi}$:

$$\sin \tilde{\Phi} = \frac{y}{b \sin h \tilde{\Psi}}$$

oraz ze związku (0.30) $\cos \tilde{\Phi}$:

$$\cos \tilde{\Phi} = \frac{x}{b \cosh \tilde{\Psi}},$$

a także kładąc:

$$\sin^2 \tilde{\Phi} + \cos^2 \tilde{\Phi} = 1,$$

dostajemy równanie:

$$\frac{x^2}{b^2 \cosh^2 \tilde{\Psi}} + \frac{y^2}{b^2 \sin^2 h \tilde{\Psi}} = 1. \quad (0.32)$$

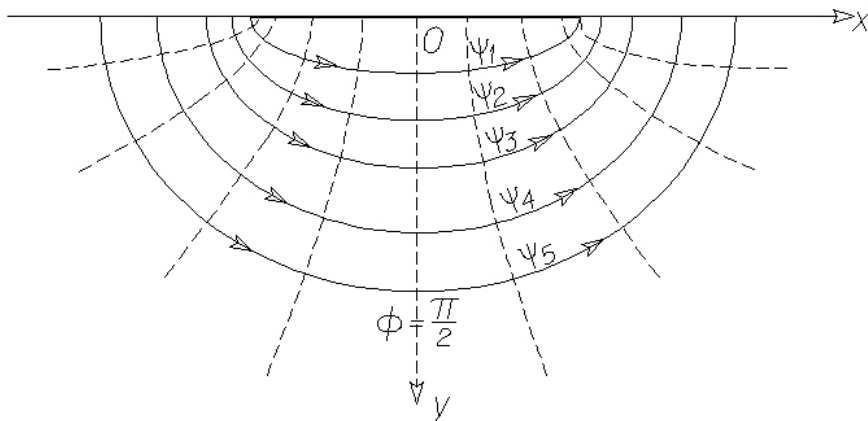
Dla różnych wartości $\tilde{\Psi} = const$ równanie (0.32) reprezentuje linie prądu przepływającej cieczy w ośrodku gruntowym. Są to elipsy o ogniskach w punktach $x_1 = b \cosh(\tilde{\Psi})$ i $x_2 = b \sinh(\tilde{\Psi})$.

Wyznaczając następnie ze związków (0.30) i (0.31) funkcje $\cosh \tilde{\Psi}$ i $\sinh \tilde{\Psi}$ i korzystając z równania dla funkcji hiperbolicznych:

$$\sinh^2 \tilde{\Psi} - \cosh^2 \tilde{\Psi} = -1 \quad (0.33)$$

dostajemy równanie:

$$\frac{x^2}{b^2 \cos^2 \tilde{\Phi}} - \frac{y^2}{b^2 \sin^2 \tilde{\Phi}} = 1 \quad (0.34)$$



Rys. 7.55. Izolinie funkcji $\Phi = const$ i $\Psi = const$ reprezentujące siatkę hydrodynamiczną przepływu.

Dla kolejnych, gdy $-\pi \leq \tilde{\Phi} \leq 0$, równanie (0.34) opisują izolinie reprezentujące w przestrzeni powierzchni ekwipotencjalne. Są nimi hiperbole. Układ linii prądu opisanych równaniami (7.281) dla $0 \leq \Psi \leq \infty$ i izolinii reprezentujących powierzchnie ekwipotencjalne opisanych równaniami (0.34) tworzą siatkę hydrodynamiczną przepływu, którą dla rozpatrywanego przypadku przedstawiono na rys. 7.55.

Określmy następnie składowe prędkości \vec{v} w obszarze filtracji. Prędkość zespolona wyraża się wzorem:

$$w = \frac{kH_m}{\pi\sqrt{b^2 - z^2}}, \quad (0.35)$$

więc:

$$v_x - iv_y = \frac{kH_m}{\pi\sqrt{b^2 - z^2}}. \quad (0.36)$$

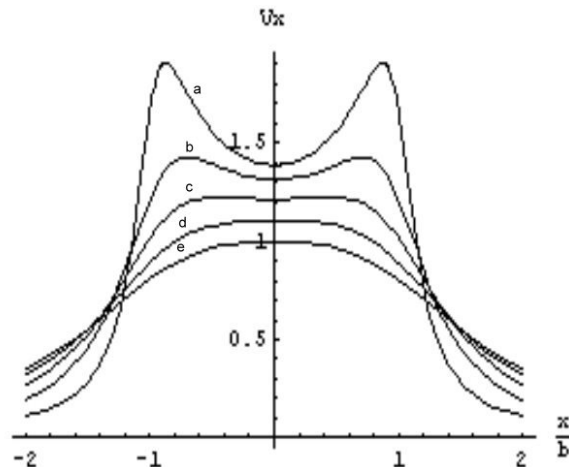
Rozdzielając prawą stronę równania na części rzeczywistą i urojoną, a następnie przenosząc wszystkie wyrażenia na jedną stronę, dostaniemy równanie, z którego możemy bezpośrednio wyznaczyć składowe V_x i V_y prędkości filtracji. Dostajemy:

$$v_x = \frac{kH_m}{\pi\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\pm\sqrt{(b^2 - x^2 + y^2)^2 + 4x^2y^2} + b^2 - x^2 + y^2}{(b^2 - x^2 + y^2)^2 + 4x^2y^2}}, \quad (0.37)$$

$$v_y = \mp \frac{kH_m}{\pi\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sqrt{(b^2 - x^2 + y^2)^2 + 4x^2y^2} - b^2 + x^2 - y^2}{(b^2 - x^2 + y^2)^2 + 4x^2y^2}}, \quad (0.38)$$

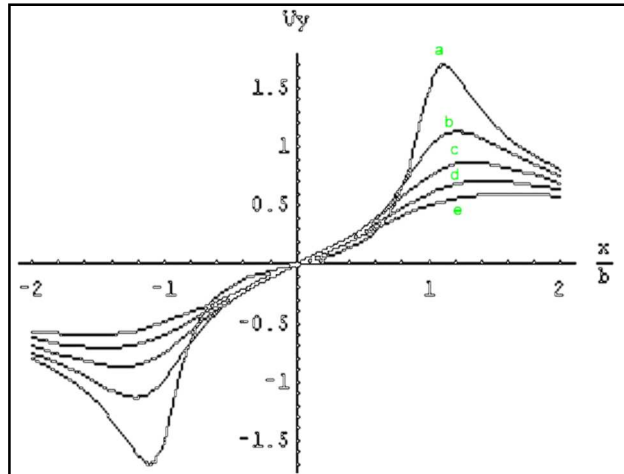
przy czym znak $-$ bierzemy dla $x > 0$, a znak $+$ bierzemy dla $x < 0$.

Dla przykładu na rys. 7.56 i 7.57 przedstawiono wykresy prędkości V_x i V_y na kilku poziomach $y = 0,2b, y = 0,4b, y = 0,6b, y = 0,8b, y = b$, zakładając, że $H_m = 50m$, $k = 10^{-4} m/s$ oraz $b = 100m$.



Rys. 7.56. Rozkład składowej $\frac{2\sqrt{2}\pi v_x}{k}$ prędkości filtracji pod fundamentem budowli piętrzącej

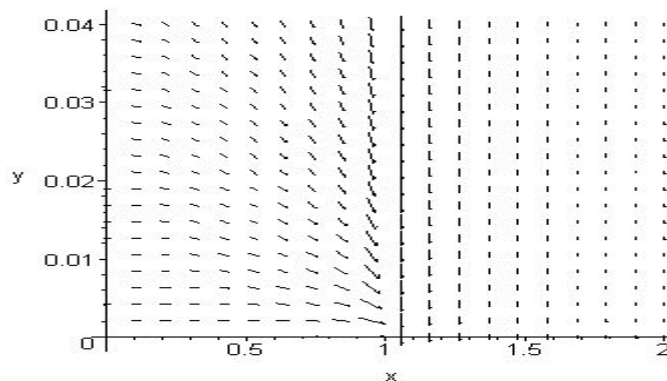
a) dla $y = 0,2b$, b) $y = 0,4b$, c) $y = 0,6b$, d) $y = 0,8b$, e) $y = b$;
(obliczenia i wykres – Mathematica 5).



Rys. 7.57. Rozkład składowej $\frac{2\sqrt{2}\pi v_y}{k}$ prędkości filtracji pod fundamentem budowli piętrzącej

a) dla $y = 0,2b$, b) dla $y = 0,4b$, c) dla $y = 0,6b$, d) dla $y = 0,8b$, e) dla $y = b$;
(obliczenia i wykres – Mathematica 5).

Korzystając z wyrażeń (7.286) i (7.287) możemy wyznaczyć wektorowe pole prędkości, które dla ograniczonego wycinka przedstawiono na rys. 7.43



Rys.7.58. Pole prędkości filtracji pod fundamentem budowli piętrzącej;
(obliczenia i wykres – Mathematica 5).

Równanie izotach otrzymamy obliczając:

$$|\vec{v}| = v_x^2 + v_y^2 = const, \quad (0.39)$$

a równanie izoklin:

$$\frac{v_y}{v_x} = tg \varphi = const. \quad (0.40)$$

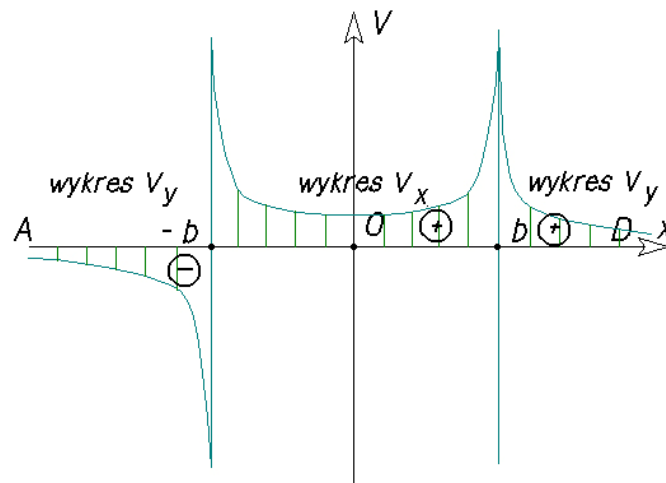
Interesujący jest rozkład prędkości wzdłuż brzegu AD. Wzory na składowe v_x i v_y możemy uzyskać bezpośrednio ze wzorów (0.37) i (0.38), podstawiając w nich $y = 0$.

Wzdłuż fundamentu prędkość filtracji równa jest składowej poziomej prędkości i wynosi:

$$v_x = \frac{kH_m}{\pi\sqrt{b^2 - x^2}}. \quad (0.41)$$

Wzdłuż powierzchni przepuszczalnych prędkość filtracji równa jest składowej pionowej v_y i wynosi:

$$v_y = \text{Signum}(x) * \frac{kH_m}{\pi\sqrt{b^2 - x^2}}. \quad (0.42)$$



Rys. 7.59. Rozkład prędkości przepływu wzdłuż brzegu AD.

Rozkład prędkości wzdłuż brzegu AD przedstawiono na rysunku 7.59. Jak widać z rysunku, w pobliżu punktów $x = \pm b$ wartość prędkości dąży do $\pm\infty$. Wynik ten jest rezultatem stosowania liniowego prawa przepływu Darcy'ego. W rzeczywistości po przekroczeniu pewnej wartości spadku hydraulicznego przepływ prawo filtracji jest nieliniowe. Przedstawiona powyżej metodologia rozwiązania problemu nie pozwala jednakże na uwzględnienie nieliniowego prawa przepływu.

Do obliczeń stateczności zapór wodnych istotny jest rozkład ciśnień pod fundamentem budowli, wywołany przepływem filtracyjnym.

Przepiszmy wzór (0.30):

$$x = b \cos \frac{\pi\Phi}{kH_m} \cos h \frac{\pi\Psi}{kH_m}.$$

Ponieważ wzdłuż fundamentu:

$$y = 0, \quad \Psi = 0,$$

dostajemy:

$$x = b \cos \frac{\pi\Phi}{kH_m}. \quad (0.43)$$

Oznaczając przez "h" wysokość hydrauliczną w dolnym punkcie obszaru filtracji, mamy:

$$\Phi = kh. \quad (0.44)$$

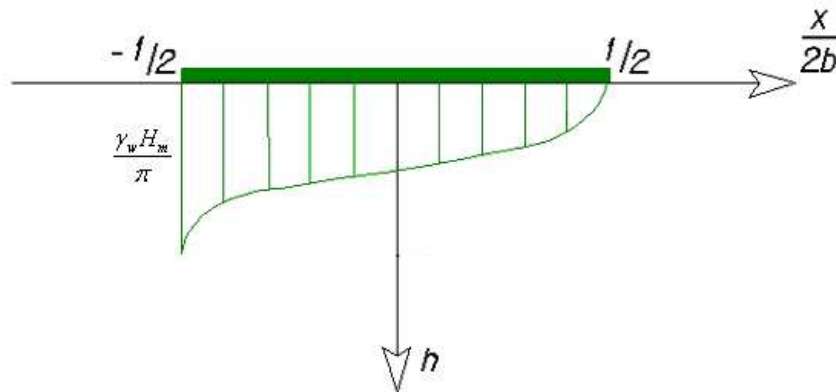
Podstawiając (0.44) do (0.43), dostajemy:

$$h = \frac{H_m}{\pi} \arccos \frac{x}{b}.$$

Ponieważ wzdłuż fundamentu budowli piętrzącej $y = 0$, ciśnienie p równa się:

$$p = \gamma_w h = \frac{\gamma_w H_m}{\pi} \arccos \frac{x}{b}. \quad (0.45)$$

Rozkład ciśnień wzdłuż fundamentu zapory przedstawiono na rys. 7.60.



Rys. 7.60. Rozkład ciśnienia pod fundamentem budowli piętrzącej.

Uzyskany rozkład ciśnienia pozwala na obliczenie wypadkowej siły parcia na fundament budowli piętrzącej. Można wykazać, że wielkość ta jest równa wielkości parcia, gdy przyjmiemy rozkład ciśnienia w postaci trójkąta. Istotną różnicą jest miejsce położenia wypadkowej. Znajduje się ono w większej odległości od prawego brzegu fundamentu budowli piętrzącej, więc moment wywracający wynikający z działania tej siły jest większy niż w przypadku przyjęcia rozkładu trójkątnego ciśnienia cieczy na fundament.

Dla pełnego obrazu omawianego klasycznego rozwiązania opływu fundamentu budowli piętrzącej przedstawimy sposób obliczenia wydatku przepływającego pod jej fundamentem. Oczywiście całkowity wydatek jest nieskończony, ponieważ warstwa ma nieskończoną miąższość. Obliczymy więc wydatek przepływający pod fundamentem budowli piętrzącej pomiędzy liniami prądu mającymi swój początek w punktach $x = -b$ i $x = x_0$.

Wiedząc, że wydatek Q przepływający pomiędzy dwoma liniami prądu, równa się różnicy wartości funkcji prądu:

$$Q = \Delta\Psi$$

oraz że wartość funkcji prądu dla pierwszej linii prądu, biegnącej wzdłuż fundamentu, wynosi:

$$\Psi = 0$$

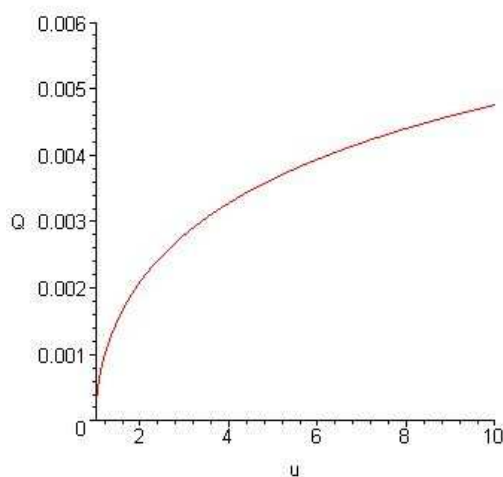
możemy stwierdzić, że poszukiwany wydatek równa się wartości funkcji prądu przechodzącej przez rozpatrywany punkt $x = x_0$, czyli:

$$Q = \Psi_0. \quad (0.46)$$

Wstawiając do (0.30) $x = x_0$ dostajemy:

$$Q = \frac{kH_m}{\pi} \arccos h \frac{x_0}{b} = \frac{kH_m}{\pi} \ln \frac{x_0 + \sqrt{x_0^2 - b^2}}{b}. \quad (0.47)$$

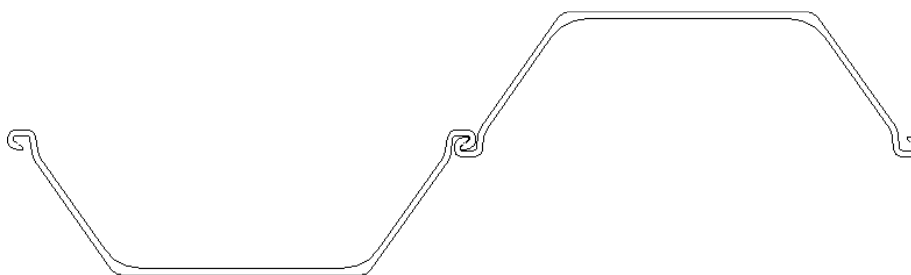
Przyjmując wartości $k = 10^{-4}$, $H=50\text{m}$, przedstawiono krzywą wydatku w zależności od $\frac{x_0}{b}$ na rys. 7.46.



Rys. 7.61. Zależność wydatku od współrzędnej wypływu linii prądu $u = \frac{x_0}{b}$; (obliczenia i wykres – Mathematica 5).

VII.4.3.2.2. Ścianka szczelna w gruncie przepuszczalnym o nieskończonej głębokości.

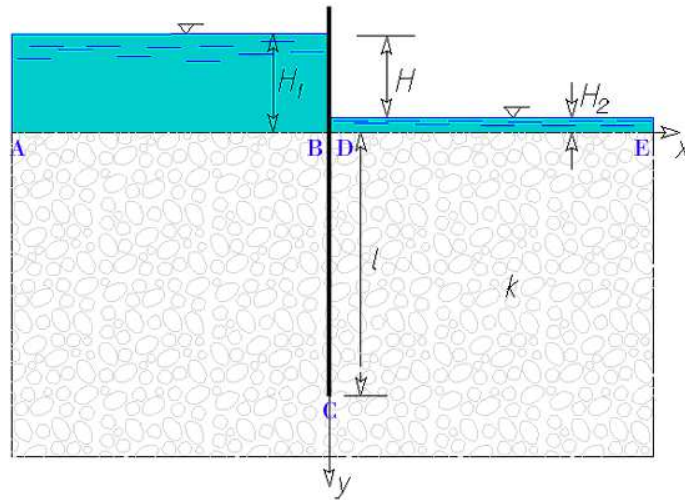
Dla zmniejszenia prędkości wylotowych filtracji pod fundamentem budowli wodnych lub ochrony wykopów ziemnych konstruuje się w gruncie ścianki szczelne (rys. 7.62) często z metalowych płyt profilowych.



Rys. 7.62. Schemat ścianki szczelnej .

Budowa siatki hydrodynamicznej dla przypadku siatki szczelnej jest istotna, w przypadku rozwiązywania praktycznych zadań opływu fundamentu budowli ziemnych.

Sposób poszukiwania rozwiązania dla tego przypadku wynika bezpośrednio ze znajdującego rozwiązania dla przypadku zagadnienia płaskiego opływu budowli piętrzącej.



Rys. 7.63. Opływanie ścianki szczelnej.

Gdyby w poprzednio omówionym zadaniu zamienić współrzędne x, y lub inaczej obrócić schemat zadania przedstawiony na rys. 7.53 o 90° , to otrzymamy przepływ zamieszczony na rys. 7.63. Rysunek ten przedstawia pionową ściankę szczelną o długości L , opływaną przez wodę gruntową pod wpływem różnicy wysokości hydraulicznej H_m .

Uwzględniając powyższe rozumowanie, funkcję potencjału zespolonego można przedstawić w postaci:

$$\Omega = M \arcsin \frac{z}{N}$$

(0.48)

gdzie M, N nieznanne stałe stałe.

Przyjmując warunki brzegowe jak na rys. 7.63 w punkcie B i C:

- w punkcie $B \rightarrow z = 0$ mamy $\Phi = -kH_m, \psi = 0$,
- w punkcie $C \rightarrow z = -il$ mamy $\Phi = -\frac{kH_m}{2}, \psi = 0$.

W powyższych warunkach założyliśmy, że wzdłuż ścianki przepływa pierwsza linia prądu, dla której przyjęliśmy wartość równą zero.

Podstawiając powyższe warunki brzegowe do równania (0.3) dostajemy:

1. dla punktu B:

$$\sin\left(\frac{-kH_m}{M}\right) = 0, \quad (0.49)$$

z czego dostajemy:

$$\frac{kH_m}{M} = n\pi .$$

Kładąc $n = 1$ mamy:

$$M = \frac{kH_m}{\pi} ; \quad (0.50)$$

2. dla punktu C:

$$\sin \left(\frac{-\frac{kH_m}{2}}{\frac{kH_m}{\pi}} \right) = -\frac{iL}{N} , \quad (0.51)$$

dostajemy więc wartość stałej N równą:

$$N = iL . \quad (0.52)$$

Możemy więc wzór (0.48) przedstawić w postaci:

$$\frac{z}{iL} = \sin \frac{\pi\Omega}{kH_m} . \quad (0.53)$$

Podstawiając do wzoru (0.53) $z = x + iy$ oraz $\Omega = \Phi + i\Psi$ dostajemy równanie:

$$x + L \cos \tilde{\Phi} \sin h\tilde{\Psi} + i(y - L \sin \tilde{\Phi} \cosh h\tilde{\Psi}) = 0 , \quad (0.54)$$

gdzie $\tilde{\Phi} = \frac{\pi\Phi}{kH_m}$ oraz $\tilde{\Psi} = \frac{\pi\Psi}{kH_m}$.

Korzystając ze wzoru:

$$\sin(\tilde{\Phi} + i\tilde{\Psi}) = \sin \tilde{\Phi} \cosh \tilde{\Psi} + i \cos \tilde{\Phi} \sinh \tilde{\Psi}$$

i przyrównując część rzeczywistą i urojoną w równaniu (0.54) do zera dostajemy:

$$\begin{aligned} x &= -L \cos \tilde{\Phi} \sin h\tilde{\Psi}, \\ y &= L \sin \tilde{\Phi} \cosh h\tilde{\Psi}. \end{aligned} \quad (0.55)$$

Korzystając następnie ze „wzoru jedynkowego” dla funkcji trygonometrycznych, mamy:

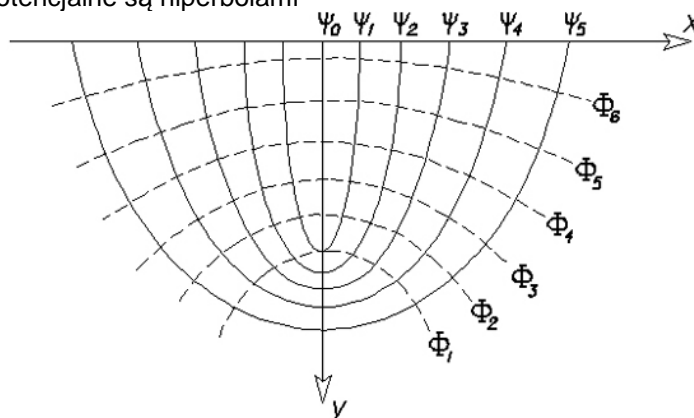
$$\frac{x^2}{L^2 \sinh^2 \tilde{\Psi}} + \frac{y^2}{L^2 \cosh^2 \tilde{\Psi}} = 1 . \quad (0.56)$$

Uzyskane równanie (0.56) jest równaniem linii prądu, jakie stanowią elipsy o półosiach $L \sinh \Psi$ i $L \cosh \tilde{\Psi}$.

Wykorzystując następnie „wzór jedynkowy” dla funkcji hiperbolicznych, otrzymujemy:

$$\frac{y^2}{l^2 \sin^2 \tilde{\Phi}} - \frac{x^2}{l^2 \cos^2 \tilde{\Phi}} = 1. \quad (0.57)$$

Powyższe równanie (0.57) jest równaniem linii ekwipotencjalnych dla wartości $-\pi \leq \tilde{\Phi} \leq 0$, które stanowi rodzina hiperbol o półosiach $L \sin \tilde{\Phi}$ i $L \cos \tilde{\Phi}$. Linie prądu stanowią połówki elips (rys 7.64), natomiast linie ekwipotencjalne są hiperbolami



Rys. 7.64. Siatka hydrodynamiczna przepływu w przypadku ścianki szczelnej.

Na podstawie związku:

$$w = \frac{d\Omega}{dz}$$

możemy obliczyć zespoloną prędkość przepływu, która ma w tym przypadku postać:

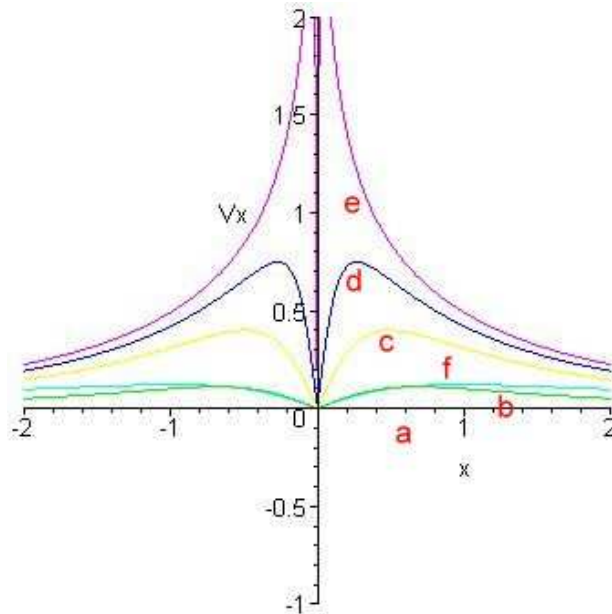
$$w = v_x - iv_y = -\frac{kH_m i}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{L^2 + z^2}}. \quad (0.58)$$

Postępując podobnie jak w przypadku przepływu pod fundamentem budowli piętrzącej możemy znaleźć składowe prędkości v_x i v_y :

$$v_x = \frac{kH_m}{\sqrt{2}\pi} \sqrt{\frac{\sqrt{(x^2 - y^2 + L^2)^2 + 4x^2 y^2} - x^2 + y^2 - L^2}{(x^2 - y^2 + L^2)^2 + 4x^2 y^2}},$$

$$v_y = -\text{Signum}(x) \frac{kH_m}{\sqrt{2}\pi} \sqrt{\frac{\sqrt{(x^2 - y^2 + L^2)^2 + 4x^2 y^2} + x^2 - y^2 + L^2}{(x^2 - y^2 + L^2)^2 + 4x^2 y^2}}. \quad (0.59)$$

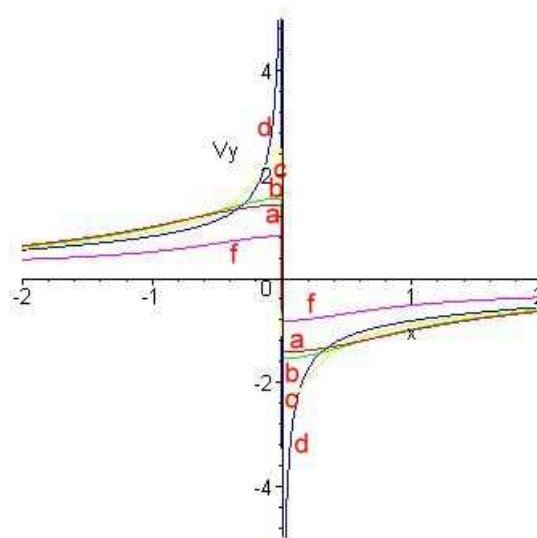
Rozkład składowych prędkości v_x i v_y przedstawiono na rys. 7.65 i 7.66. Na pierwszym z nich przedstawiono wykresy funkcji $v_x(x)$ dla $y = 0, 0,2L, 0,4L, 0,6L, 0,8L, 0,98L, 2L$, przy czym rzędna na wykresie obliczana jest dla wartości $\frac{\sqrt{2}\pi Lv_x}{kH_m}$.



Rys. 7.65. Rozkład prędkości $\frac{\sqrt{2}\pi l}{kH} v_x$ na poziomach:

**a) $y = 0$, b) $y = 0,2L$, c) $y = 0,6L$, d) $y = 0,8L$, e) $y = 0,98L$, f) $y = 2L$;
(obliczenia i wykres – Maple 8).**

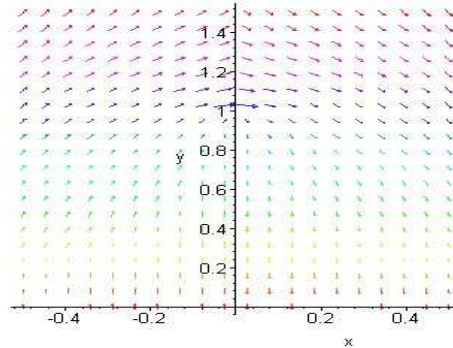
Na drugim z nich (rys.7.66) przedstawiono wykresy wartości funkcji $\frac{\sqrt{2}}{kH_m} v_y$ dla wartości $y = 0, 0,4L, 0,8L, 2L$



Rys. 7.66. Rozkład prędkości $\frac{\sqrt{2}}{kH_m} v_y$ dla:

a) $y = 0$, b) $y = 0.4L$, c) $y = 0.8L$, d) $y = 0.98L$, f) $y = 2L$;
(obliczenia i wykres – Maple 8).

Znając wzory na współrzędne v_x i v_y , możemy uzyskać graficzną postać pola prędkości, którą przedstawiono na rys. 7.67.



Rys. 7.67. Graficzna prezentacja pola prędkości \vec{v} ; (obliczenia i wykres – Maple 8).

Obliczmy następnie wartość ciśnienia p w obszarze filtracji przy założeniu, że wartość ciśnienia atmosferycznego wynosi $p_a = 0$. Aby uzyskać funkcję ciśnienia, należy określić na początku funkcję potencjału zespolonego $\tilde{\Phi}$, korzystając ze wzorów (0.55). Z drugiego z nich wyznaczmy funkcję $\sin \tilde{\Phi}$:

$$\sin \tilde{\Phi} = \frac{y}{L \cosh \tilde{\Phi}}. \quad (0.60)$$

Korzystając ze związku:

$$\cosh^2 \tilde{\Psi} - \sinh^2 \tilde{\Psi} = 1, \quad (0.61)$$

możemy po podniesieniu do kwadratu związku (0.60) napisać:

$$\sin^2 \tilde{\Phi} = \frac{y^2}{L^2 (1 + \sinh^2 \tilde{\Psi})}. \quad (0.62)$$

Podstawiając następnie związek (0.62) do równania (7.310):

$$\sinh \tilde{\Psi} = \frac{x}{L \cos^2 \tilde{\Phi}}$$

otrzymamy równanie:

$$\sin^4 \tilde{\Phi} - \left[1 + \left(\frac{x}{L} \right)^2 + \left(\frac{y}{L} \right)^2 \right] \sin^2 \tilde{\Phi} + \left(\frac{y}{L} \right)^2 = 0. \quad (0.63)$$

Rozwiązanie tego równania ma postać:

$$\tilde{\Phi} = \arcsin \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{y}{L}\right)^2 + 1} - \sqrt{\left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{y}{L}\right)^2 + 1\right]^2 - 4\left(\frac{y}{L}\right)^2} \right\} \quad (0.64)$$

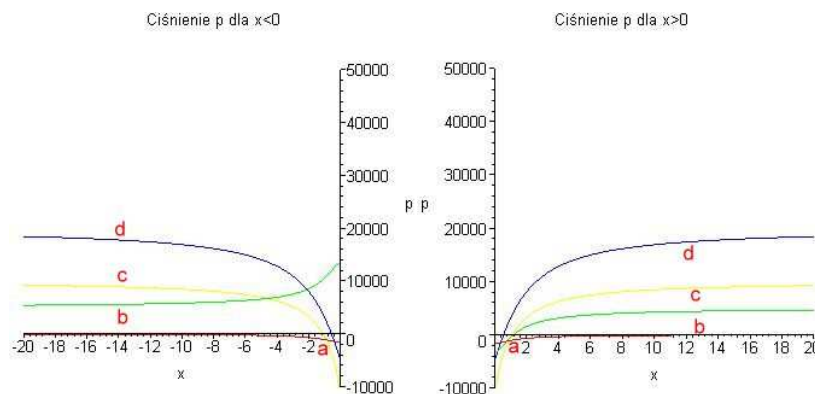
Korzystając ze wzoru:

$$\Phi = -k \left(\frac{p}{\rho g} - y \right),$$

Dostajemy ostatecznie:

$$p = \rho g \left\{ -y + \frac{H_m}{\pi} \arcsin \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{y}{L}\right)^2 + 1} + \text{sign}(x) \sqrt{\left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{y}{L}\right)^2 + 1\right]^2 - 4\left(\frac{y}{L}\right)^2} \right\} \right\} \quad (0.65)$$

Przykładowo rozkład ciśnienia przy przyjęciu stałych $\rho g = 1000 \frac{kG}{m^3}$, wartość $H = 50m$ przedstawiono na rys. 7.68 .



Rys. 7.68. Rozkład ciśnienia na różnych głębokościach:

- a) $y/l=0$, b) $y/l=0,5$, c) $h/l=1,0$, d) $y/l=1,5$;
b) (obliczenia i wykres – Mapple 8).

Znając funkcje potencjału prędkości Φ , możemy określić funkcję potencjału \mathfrak{R} reprezentującą współdziałanie pola potencjalnego przepływu filtracyjnego z polem sił ciężkości cząstek gruntu:

$$\mathfrak{R} = \frac{\rho g}{k} \Phi - \Delta^* y, \quad (0.66)$$

gdzie $\Delta^* = (1-f)\rho_{os}g$, ρ_{os} oznacza ciężar objętościowy gruntu z uwzględnieniem wporu, ρ oznacza gęstość cieczy.

Korzystając ze wzoru (0.64) oraz wzoru (0.66), potencjał \mathfrak{R} , zwany potencjałem pola sił masowych filtracji, można wyrazić wzorem:

$$\mathfrak{R} = \frac{\rho g H_m}{\pi} \arcsin \left[\sqrt{\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{y}{L}\right)^2 + 1} - \sqrt{\left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{y}{L}\right)^2 + 1\right]^2 - 4\left(\frac{y}{L}\right)^2} \right] - \Delta^* y + \mathfrak{R}_0. \quad (0.67)$$

Na podstawie związków pomiędzy potencjałem pola sił masowych filtracji oraz siłami masowymi oddziaływanymi na ośrodek porowaty możemy określić składowe pola wektorowego sił masowych (siły unoszenia i ciężkości gruntu z uwzględnieniem wyporu) wzorami:

$$S_x = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x} = -\rho \frac{g}{k} \frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

$$S_y = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial y} = -\rho \frac{g}{k} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \Delta^*.$$

Obliczając odpowiednio pochodne cząstkowe potencjału pola sił masowych filtracji dostajemy:

$$S_x = -\frac{\rho g H_m}{8\pi L} \left[\frac{x}{L} - \frac{\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(\frac{x}{L}\right)\left(\frac{y}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)}{\sqrt{u}} \right] \left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{y}{L}\right)^2 + 1 - \sqrt{u} \right]^* \quad (0.68)$$

$$\left[-\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{y}{L}\right)^2 + 1 + \sqrt{u} \right]$$

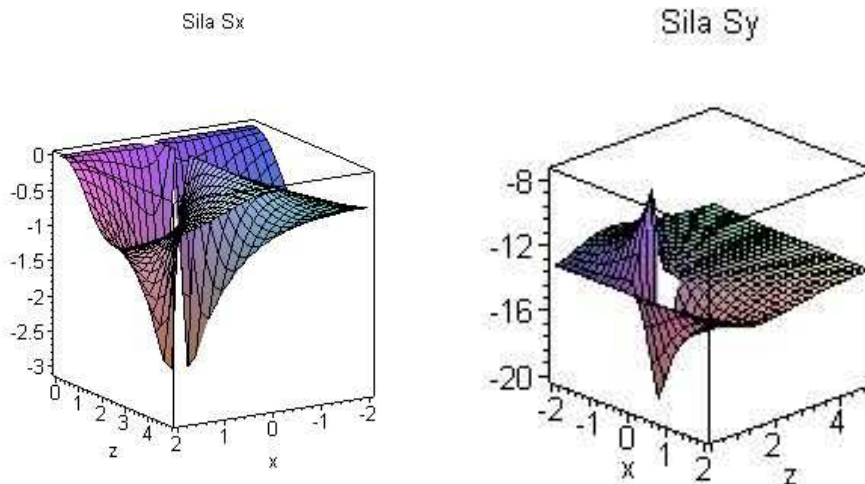
oraz

$$S_y = -\frac{\rho g H_m}{8\pi L} \left[\frac{y}{L} - \frac{\left(\frac{y}{L}\right)^3 + \left(\frac{y}{L}\right)\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{y}{L}\right)}{\sqrt{u}} \right] \left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{y}{L}\right)^2 + 1 - \sqrt{u} \right]^* \quad (0.69)$$

$$* \left[-\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{y}{L}\right)^2 + 1 + \sqrt{u} \right] - \Delta^*,$$

$$\text{gdzie } u = \sqrt{\left(\frac{x}{L}\right)^4 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^2\left(\frac{y}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{y}{L}\right)^4 - 2\left(\frac{y}{L}\right)^2} - 1.$$

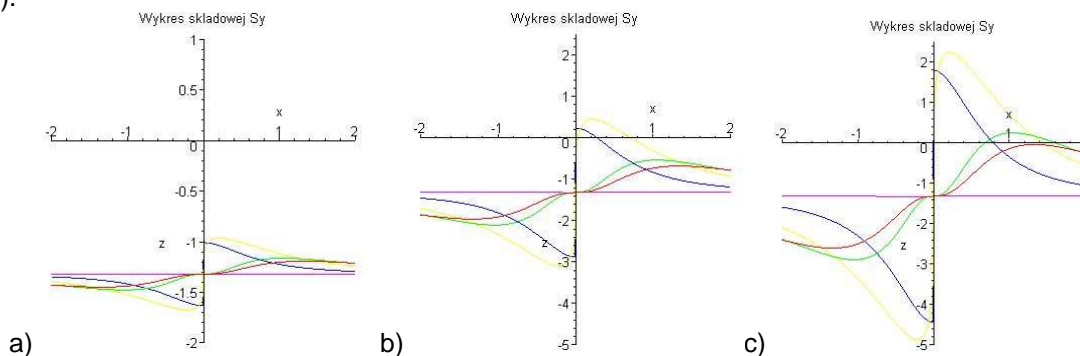
Korzystając z powyższych wzorów możemy uzyskać przestrzenny obraz zmienności składowych sił masowych filtracji, co przedstawiono na rys. 7.69.



Rys. 7.69. Wizualizacja wartości funkcji składowych sił masowych filtracji ; (obliczenia i wykres – Maple 8).

Szczególnie istotne dla badania procesu stateczności filtracyjnej są składowe S_y sił masowych filtracji. Zmiana ich kierunku określa obszar, w którym następuje upłynnienie gruntu, a w rezultacie wypór mieszaniny wodno-gruntowej. Jak to szczegółowo omówiliśmy w rozdziale IV, możemy określić, przy jakiej wielkości różnicy wysokości hydraulicznej następuje powstanie stanu granicznego powodującego upłynnienie ośrodka.

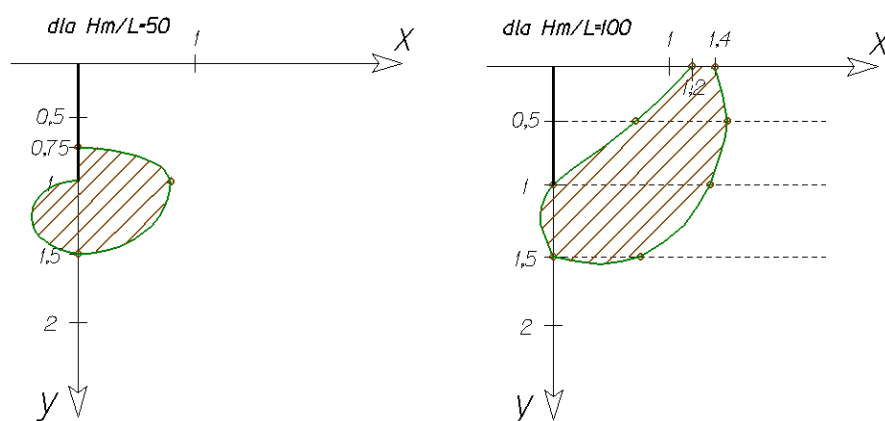
Dla przykładu przyjmując następujące wartości stałych: $\Delta^* = \rho_{os} (1 - f) = 1.320 \frac{T}{m^3}$, $\rho g = 1.000 \frac{T}{m^3}$, możemy obliczyć zmienność funkcji S_y na kilku głębokościach y/L . Przyjmując wartości $\frac{H_m}{L} = 1$ oraz $\frac{H_m}{L} = 10$ i $\frac{H_m}{L} = 100$ możemy przedstawić rozkład tej składowej wzdłuż osi x (rys. 7.70).



Rys. 7.70. Wykresy składowej S_y dla:

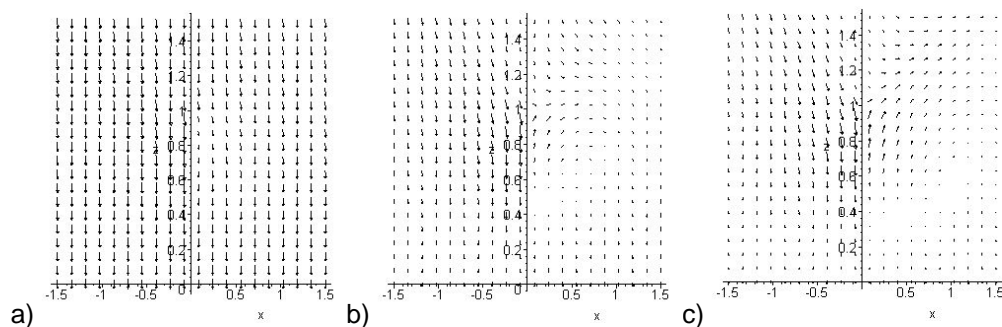
a) $\frac{H_m}{L} = 10$, b), $\frac{H_m}{L} = 50$ c) $\frac{H_m}{L} = 100$; (obliczenia i wykres – Maple 8).

Na podstawie wykresów 7.70 możemy określić strefę upłynnienia gruntu, co przedstawiono na rys. 7.71 dla $\frac{H_m}{L} = 50$ oraz dla $\frac{H_m}{L} = 100$.



Rys. 7.71. Strefy upłynnienia dla $\frac{H_m}{L} = 50$ oraz $\frac{H_m}{L} = 100$.

Poniżej na rys. 7.72 przedstawiono pole wektorowe \vec{S} dla przypadku, gdy $\frac{H_m}{L} = 50$ i $\frac{H_m}{L} = 100$.



Rys. 7.72. Pole wektorowe sił masowych filtracji:

a) dla $\frac{H_m}{L} = 10$ i b) $\frac{H_m}{L} = 50$ c) $\frac{H_m}{L} = 100$;

(obliczenia i wykres – Maple 8).

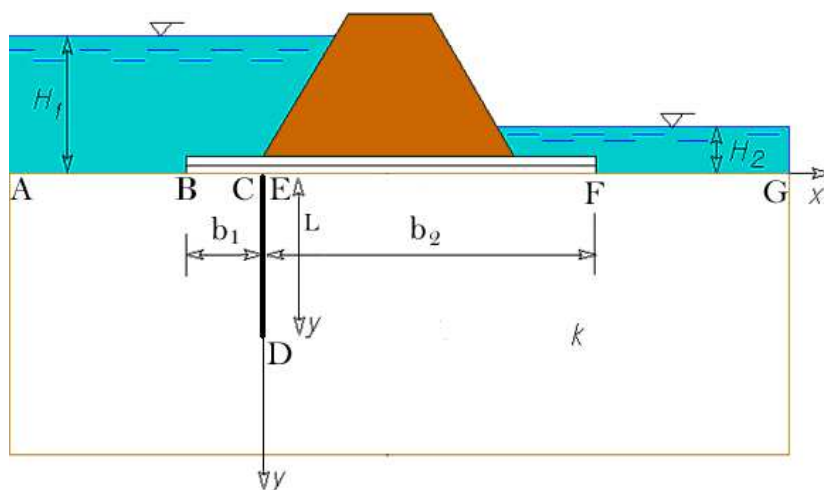
Jak widać, dla $\frac{H_m}{L} = 10$ nie występuje zagrożenie, gdyż siły ciężkości są znacznie większe od sił masowych unoszenia. Dla większych wartości jak widać to na rys. 7.72, mamy już do czynienia ze zjawiskiem upłynnienia gruntu i utratą stateczności filtracyjnej.

VII.4.3.2.3. Złożone zagadnienia opływu budowli piętrzących.

Rozwiązanie zagadnień bardziej złożonych niż omówione powyżej prowadzi często do postaci funkcji analitycznych, które trudno jest następnie przekształcić w taki sposób, aby można było bezpośrednio wyznaczyć siatkę hydrodynamiczną przepływu, określić pole wektorowe prędkości lub pole sił masowych filtracji umożliwiające bezpośrednią analizę stanu stateczności filtracyjnej. Często wyznaczając w postaci zamkniętej funkcję potencjału zespolonego Ω lub prędkości zespolonej w , musimy posłużyć się następnie metodami numerycznymi, aby na drodze interpolacji uzyskać w danym obszarze poszukiwane linie ekwipotencjalne funkcji jednakowego potencjału prędkości lub funkcji prądu. Rozwiązania takie nie mają obecnie dużego zastosowania w pracach inżynierskich, gdyż znacznie łatwiej uzyskać rozwiązania tych zagadnień przy zastosowaniu profesjonalnych programów opartych na metodzie elementów skończonych lub różnic skończonych, o czym szerzej w rozdziale IX. Mimo to dla celów poznawczych warto pokazać metodykę uzyskiwania rozwiązań płaskich zagadnień teorii filtracji przy wykorzystaniu funkcji analitycznych i metody przekształceń konforemnych. Poniżej omówimy w skrócie dwa takie przypadki: opływ fundamentu budowli piętrzącej ze ścianką szczelną oraz opływ fundamentu budowli piętrzącej z rurą drenażową.

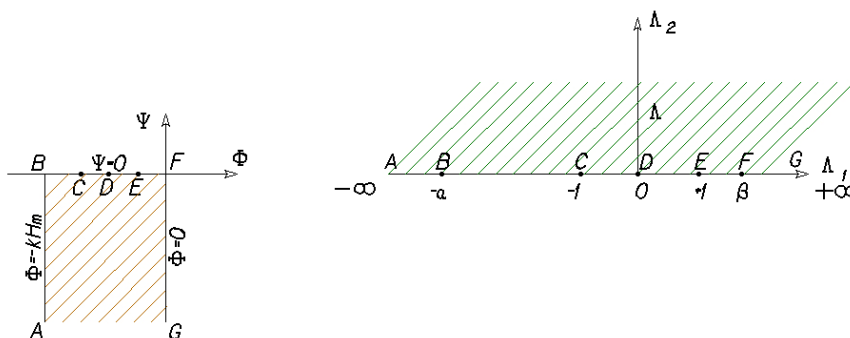
VII.4.3.2.3.1. Optyw fundamentu budowli piętrzącej ze ścianką szczelną.

W przypadku budowli piętrzącej, w fundament której wmontowana jest ścianka szczelna, poszukujemy rozwiązania korzystając z zasady superpozycji, słusznej dla liniowych zagadnień teorii filtracji. Wyraża się ona poprzez podwójne wykorzystanie metody przekształceń konforemnych. Rozważmy zagadnienie brzegowe przedstawione schematycznie na rysunku 7.73



Rys. 7.73. Schemat zadania optywu fundamentu budowli piętrzącej ze ścianką szczelną.

Zgodnie z pracą Rembezy [Rembeza, 1992], schemat obliczeniowy tego zagadnienia przy wykorzystaniu dodatkowej zmiennej zespolonej Λ przedstawiono na rys. 7.73.



Rys. 7.74. Schemat obliczeniowy optywu fundamentu budowli piętrzącej ze ścianką szczelną na płaszczyźnie Ω i Λ .

Jak łatwo stwierdzić, pomocniczą funkcję Λ można określić z zadania optywu ścianki szczelnej. Zgodnie z pracą [] funkcja Λ spełniająca warunki brzegowe optywu ścianki szczelnej ma postać:

$$z = L\sqrt{\Lambda^2 - 1}. \quad (0.70)$$

Przyjmując początek układu współrzędnych (x, y) w punkcie kontaktu fundamentu budowli piętrzącej ze ścianką szczelną zakładamy, że funkcja Λ przyjmuje wartość $-a$ dla punktu $B(-b_1, 0)$ a dla punktu $F(b_2, 0)$ wartość β .

Korzystając ze wzoru Christoffela – Schwarza:

$$z = M \int_0^t \frac{dt}{(t-a_1)^{1-\frac{\alpha_1}{\pi}} (t-a_2)^{1-\frac{\alpha_2}{\pi}} \dots (t-a_n)^{1-\frac{\alpha_n}{\pi}}} + N$$

oraz zgodnie z odwzorowaniem obszarów Ω i Λ , przyjmujemy na podstawie schematu obliczeniowego, że:

dla punktu $B \rightarrow a_1 = -\alpha$, oraz $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ i dla punktu $F \rightarrow a_2 = \beta$ oraz $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$. Punkty C

i E pomijamy, gdyż dla nich $\alpha_3 = \alpha_4 = \pi$, natomiast punkty A i G znajdują się w nieskończoności.

Przyjmując więc, że $z = \Omega$ oraz $t = \Lambda$ wzór, Christoffela – Schwarza można zapisać dla naszego zadania w postaci:

$$\Omega = M \int_0^\Lambda \frac{d\Lambda}{\sqrt{(\Lambda + \alpha)(\Lambda - \beta)}} + N. \quad (0.71)$$

Wstawiając do wzoru (0.70) wartości funkcji Λ i współrzędne z w punktach B i F dostajemy bezpośrednio:

$$\alpha = \sqrt{1 + \left(\frac{b_1}{L}\right)^2} \quad \text{oraz} \quad \beta = \sqrt{1 + \left(\frac{b_2}{L}\right)^2}. \quad (0.72)$$

Korzystając ze wzoru (0.70), możemy określić zależność pomiędzy funkcją Λ i z w postaci:

$$(\Lambda_1 + i\Lambda_2)^2 = (x + iy)^2 + 1, \quad (0.73)$$

gdzie $\Lambda = \Lambda_1 + i\Lambda_2$. Ze związku (0.73) dostajemy bezpośrednio:

$$\Lambda_1 = \sqrt{\frac{(x^2 - y^2 + 1) \pm \sqrt{(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2}}{2}},$$

$$\Lambda_2 = \frac{\sqrt{2}xy}{\sqrt{(x^2 - y^2 + 1) \pm \sqrt{(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2}}}. \quad (0.74)$$

Ze wzorów (0.74)(7.321) możemy oczywiście znaleźć zależności odwrotne:

$$x = \sqrt{\frac{(\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2 - 1) \pm \sqrt{(\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2 - 1)^2 + 4\Lambda_1^2\Lambda_2^2}}{2}},$$

$$y = \frac{\sqrt{2}\Lambda_1\Lambda_2}{\sqrt{(\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2 - 1) \pm \sqrt{(\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2 - 1)^2 + 4\Lambda_1^2\Lambda_2^2}}}. \quad (0.75)$$

Podstawiając warunki brzegowe, możemy wyznaczyć stałe zespolone M i N. W rezultacie po wykonaniu całkowania dostajemy wzór na funkcję potencjału zespolonego:

$$\Omega = \frac{kH}{\pi} \arccos\left(\frac{2\Lambda + \alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right). \quad (0.76)$$

Odwracając powyższą zależność oraz wykorzystując wzory na cosinus sumy kątów mamy:

$$\cos \tilde{\Phi} \cosh \tilde{\Psi} + i \sin \tilde{\Phi} \sinh \tilde{\Psi} = \frac{2\Lambda_1 + \alpha - \beta}{\alpha + \beta} + i \frac{2\Lambda_2}{\alpha + \beta}. \quad (0.77)$$

Na podstawie powyższego równania dostajemy następujący układ równań:

$$\begin{aligned} \cos \tilde{\Phi} \cosh \tilde{\Psi} &= \frac{2\Lambda_1 + \alpha - \beta}{\alpha + \beta}, \\ \sin \tilde{\Phi} \sinh \tilde{\Psi} &= \frac{2\Lambda_2}{\alpha + \beta}. \end{aligned} \quad (0.78)$$

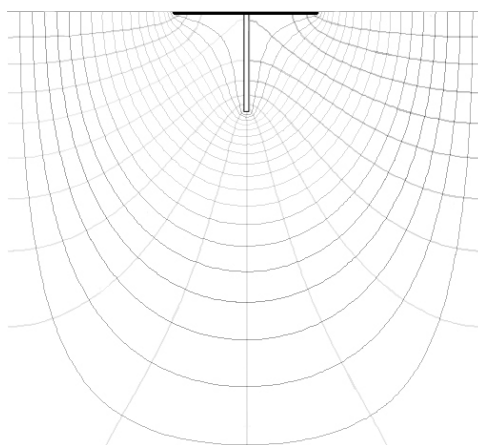
Powyższy układ równań prowadzi do wyznaczenia linii prądu dla $-\pi \leq \tilde{\Psi} \leq 0$ w postaci równania parametrycznego:

$$\left(\frac{2\Lambda_1 + \alpha - \beta}{(\alpha + \beta) \cosh \tilde{\Psi}}\right)^2 + \left(\frac{2\Lambda_2}{(\alpha + \beta) \sinh \tilde{\Psi}}\right)^2 = 1 \quad (0.79)$$

oraz funkcji ekwipotencjalnych przepływu w postaci:

$$\left(\frac{2\Lambda_1 + \alpha - \beta}{(\alpha + \beta) \cos \tilde{\Phi}}\right)^2 - \left(\frac{2\Lambda_2}{(\alpha + \beta) \sin \tilde{\Phi}}\right)^2 = 1. \quad (0.80)$$

Przykładową siatkę hydrodynamiczną przepływu dla $\alpha = \beta$ przedstawiono na rys. 7.75.



Rys. 7.75. Siatka hydrodynamiczna przepływu dla przypadku fundamentu budowli piętrzącej ze ścianką szczelną [program autorski]

Pole wektorowe prędkości filtracji obliczymy, wyznaczając funkcję prędkości zespolonej, która jest równa:

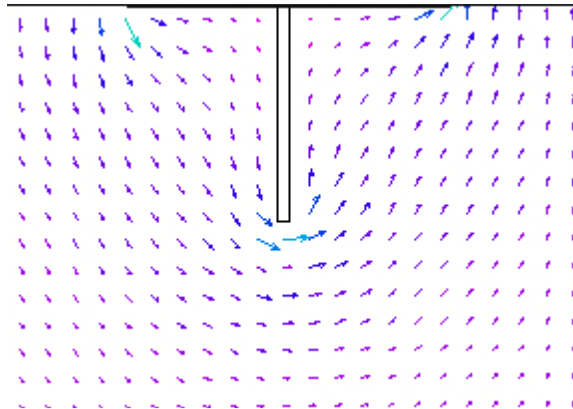
$$w = \frac{d\Omega}{d\Lambda} = \frac{kH_m}{\pi} \frac{1}{\sqrt{(\Lambda + \alpha)(\Lambda - \beta)}}, \quad (0.81)$$

Wiedząc, że $w = v_x - iv_y$, możemy znaleźć parametryczne równania składowych pola wektorowego prędkości filtracji w postaci:

$$v_x = \frac{kH_m}{\pi} \frac{(2\Lambda_1 + \alpha - \beta)\sqrt{2}}{2\sqrt{\Lambda_2^2 - (\Lambda_1 + \alpha)(\Lambda_1 - \beta) + \left[\sqrt{\Lambda_2^2 - (\Lambda_1 + \alpha)(\Lambda_1 - \beta)}\right]^2 + (2\Lambda_1 + \alpha - \beta)^2}} \quad (0.82)$$

$$v_y = \pm \frac{kH_m}{\pi} \sqrt{\frac{\sqrt{\Lambda_2^2 - (\Lambda_1 + \alpha)(\Lambda_1 - \beta) + \left[\sqrt{\Lambda_2^2 - (\Lambda_1 + \alpha)(\Lambda_1 - \beta)}\right]^2 + (2\Lambda_1 + \alpha - \beta)^2}}{2\left[(\Lambda_1 + \alpha)^2 + \Lambda_2^2\right]\left[(\Lambda_1 + \beta)^2 + \Lambda_2^2\right]}}$$

Powyższe wzory oraz wyrażenia (0.75) pozwalają wyznaczyć pole prędkości filtracji, które przedstawiono na rysunku 7.76.

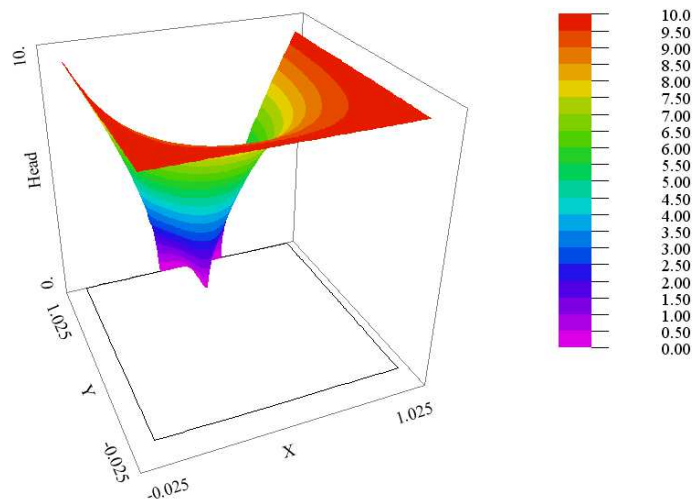


Rys. 7.76. Pole prędkości przepływu dla przypadku fundamentu budowli piętrzącej ze ścianką szczelną [program autorski]

Znając wartości składowych prędkości możemy określić składowe siły masowych w obszarze filtracji:

$$S_x = \rho g \frac{v_x}{k} \quad \text{oraz} \quad S_y = \rho g \frac{v_y}{k} - \Delta^*. \quad (0.83)$$

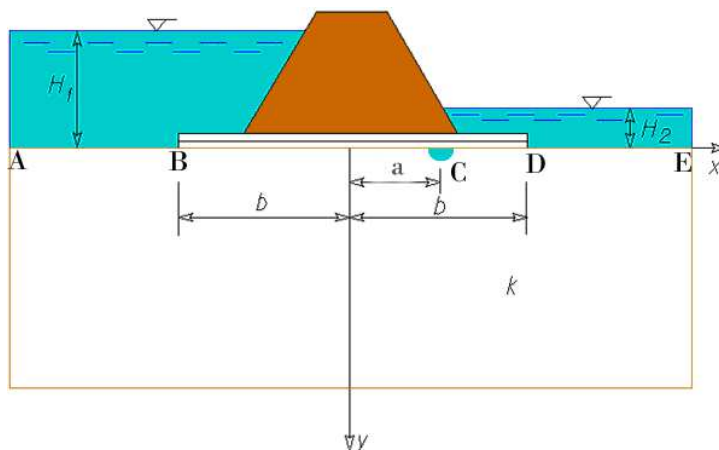
Na podstawie wzorów (0.83) można wyznaczyć pole wektorowe sił masowych \vec{S} , które przedstawiono na rys. 8.77 dla wartości $H_m / L = 1,0$ i $10,0$.



Rys. 7.77. Pole sił masowych \vec{S} .

VII.4.3.2.3.2 Opływ fundamentu budowli piętrzącej z rurą drenażową.

Założmy, że bezpośrednio pod fundamentem budowli hydrotechnicznej umieszczono rurę drenażową w kształcie półcylicylnym (rys. 7.78).



Rys. 7.78. Schemat opływania budowli piętrzącej z rurą drenażową.

Niech środek rury znajduje się w punkcie $x = a$. Zgodnie z tym, co powiedzieliśmy wyżej o możliwości stosowania zasady superpozycji do rozwiązań zagadnień filtracji, możemy poszukiwać funkcji prędkości zespolonej w postaci:

$$w = \frac{M}{\sqrt{b^2 - z^2}} - \frac{M_1}{(z-a)\sqrt{b^2 - z^2}}. \quad (0.84)$$

Obydwa człony rozwiązania (0.84) czynią zadość warunkom brzegowym (0.1), (0.2)) i (0.4), a jednocześnie drugi człon rozwiązań posiada własność drenu lub źródła w punkcie: $z = a$.

Niech wydatek rury drenażowej będzie oznaczony przez Q . Ponieważ rura dostaje się do rury drenarskiej tylko połową przekroju, więc wprowadzimy wydatek obliczeniowy Q' , który odpowiada przypadkowi, gdy woda dostaje się do rury całym przekrojem.

Ponieważ prędkość wody dopływająca do drenu winna być w obydwu przypadkach identyczna, mamy:

$$\frac{Q'}{2\pi r} = \frac{Q}{\pi r},$$

gdzie: r – promień rury drenarskiej.
Stąd mamy, że:

$$Q' = 2Q$$

W dowolnym punkcie obszaru prędkość zespolona w , wywołana działaniem drenu i różnicy poziomów wody w zbiorniku i rzece, powinna się równać:

$$w = -\frac{Q'}{2\pi(z-a)} + F(z), \quad (0.85)$$

przy czym $F(z)$ jest funkcją holomorficzną w punkcie $z = a$. Obliczamy granicę funkcji $(z-a)w(z)$, gdy $w(z)$ wyraża się wzorem (0.85), a z dąży do a :

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)w(z) = \frac{M_1}{\sqrt{b^2 - a^2}}. \quad (0.86)$$

Następnie obliczamy tą samą granicę, gdy $w(z)$ wyraża się wzorem (0.86).
Dostajemy:

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)w(z) = -\frac{Q'}{2\pi} = -\frac{Q}{\pi}, \quad (0.87)$$

stąd znajdujemy:

$$M_1 = -\frac{Q}{\pi} \sqrt{b^2 - a^2}.$$

Prędkość zespoloną filtracji wyraża się wzorem:

$$w = \frac{M}{\sqrt{b^2 - z^2}} - \frac{Q\sqrt{b^2 - a^2}}{\pi\sqrt{b^2 - z^2}(z-a)}. \quad (0.88)$$

Obliczmy następnie potencjał zespolony Ω , który wyraża się wzorem:

$$\Omega = \int w dz + N. \quad (0.89)$$

Po wykonaniu operacji całkowania mamy:

$$\Omega = \left[\frac{M}{b} - \frac{Q\sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2}}{\pi b \left(\frac{z}{b} - \frac{a}{b}\right)} \right] \arcsin\left(\frac{z}{b}\right) + N. \quad (0.90)$$

Znając wartości funkcji Ω w punktach B i D:

$$\text{dla } B \rightarrow \Omega = -kH_m; \quad z = -b,$$

$$\text{dla } D \rightarrow \Omega = 0; \quad z = b,$$

otrzymujemy układ równań:

$$\begin{aligned} \left(\frac{3\pi}{2}\right) \left[\frac{M}{b} + \frac{Q}{\pi b} \frac{\sqrt{1-\left(\frac{a}{b}\right)^2}}{\left(1+\frac{a}{b}\right)} \right] + N &= -kH_m, \\ \left(\frac{\pi}{2}\right) \left[\frac{M}{b} - \frac{Q}{\pi b} \frac{\sqrt{1-\left(\frac{a}{b}\right)^2}}{\left(1-\frac{a}{b}\right)} \right] + N &= 0. \end{aligned} \tag{0.91}$$

W rezultacie po rozwiązaniu układu równań (0.91) dostajemy stałe M i N:

$$\begin{aligned} \frac{M}{b} &= -\frac{kH_m}{\pi} - \frac{Q \left[2 - \left(\frac{a}{b}\right) \right] \sqrt{1 - \frac{a}{b}}}{\pi b \left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \right]}, \\ N &= \frac{kH_m}{2} + \frac{3Q \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2}}{2b \left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \right]}. \end{aligned} \tag{0.92}$$

Ostatecznie funkcja potencjału zespolonego wyraża się wzorem:

$$\begin{aligned} \Omega = & - \left\{ \frac{kH_m}{\pi} + \frac{Q \left[2 - \left(\frac{a}{b}\right) \right] \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2}}{\pi b \left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \right]} + \frac{Q \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2}}{\pi b \left(\frac{z}{b} - \frac{a}{b} \right)} \right\} \arcsin \left(\frac{z}{b} \right) + \\ & + \frac{kH_m}{2} + \frac{3Q \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2}}{2b \left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \right]}. \end{aligned} \tag{0.93}$$

Rozdzielając części urojone i rzeczywiste funkcji $\Omega = \Phi + i\Psi$ oraz $z = x + iy$, dostajemy wzory na wartość funkcji prądu Ψ i funkcji potencjału prędkości Φ :

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_1 + \frac{MC}{D^2 + C^2} \left[\arccos E_2 - \frac{D}{C} \operatorname{arcosh} E_1 \right], \\ \Psi &= \frac{MC}{D^2 + C^2} \left[\operatorname{arccos} hE_1 + \frac{D}{C} \arccos E_2 \right],\end{aligned}\tag{0.94}$$

gdzie:

$$\Phi_1 = \frac{kH_m}{2} + \frac{3Q\sqrt{1-\left(\frac{a}{b}\right)^2}}{2b\left[1-\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]}, \quad C = \left[\left(\frac{x}{b}\right) - \left(\frac{a}{b}\right) \right] \left\{ A \left[\left(\frac{x}{b}\right) - \left(\frac{a}{b}\right) \right] - B \right\} + A \left(\frac{y}{b}\right)^2,$$

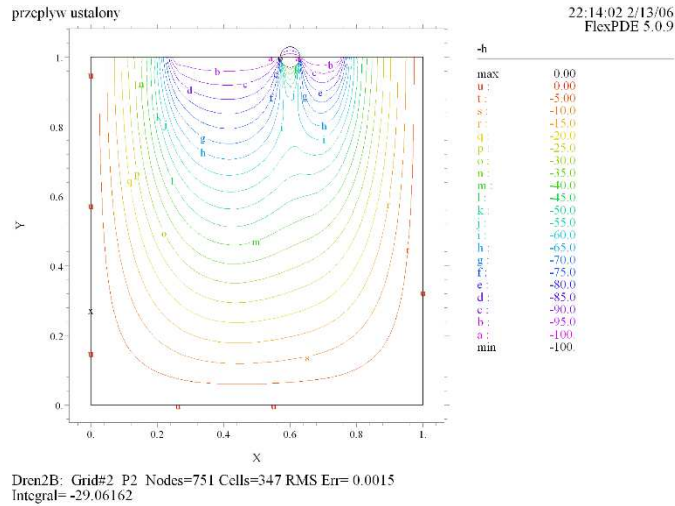
$$D = B \frac{y}{b}, \quad A = \frac{kH_m}{\pi} + \frac{Q \left[2 - \left(\frac{a}{b}\right) \right] \sqrt{1-\left(\frac{a}{b}\right)^2}}{\pi b \left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \right]}, \quad B = \frac{Q \sqrt{1-\left(\frac{a}{b}\right)^2}}{\pi b},$$

$$M = \left\{ A \left[\left(\frac{x}{b}\right) - \left(\frac{a}{b}\right) \right] - B \right\}^2 + \left(A \frac{y}{b} \right)^2,$$

$$E_1 = \sqrt{\frac{\left[1 - \left(\frac{x}{b}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 \right] \pm \sqrt{\left[1 - \left(\frac{x}{b}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 \right]^2 + 4 \left(\frac{y}{b}\right)^2}}{2}},$$

$$E_2 = \sqrt{\frac{\left[1 + \left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \right] \pm \sqrt{\left[1 + \left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \right]^2 - 4 \left(\frac{x}{b}\right)^2}}{2}}.$$

Korzystając z powyższych wzorów możemy określić siatkę hydrodynamiczną przepływu na rys. 7.79.



Rys. 7.79. Linie prądu dla przypadku fundamentu budowli piętrzącej z rurą drenażową.

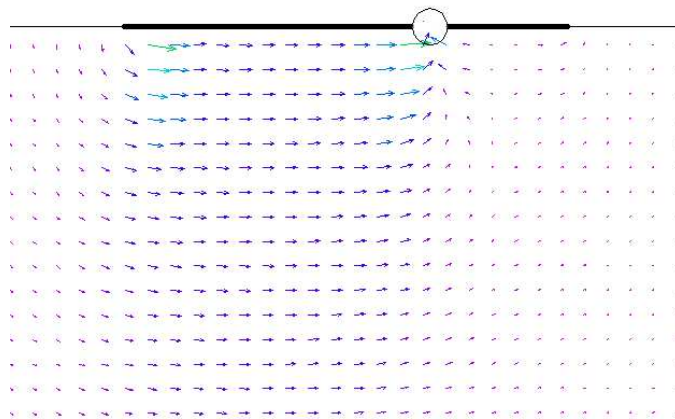
Różniczkując funkcję potencjału zespolonego Ω po dz , uzyskamy wzór na prędkość zespoloną filtracji w :

$$w = -\frac{kH_m}{\pi b} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{z}{b}\right)^2}} \left[1 + \frac{Q}{kH_m b} \frac{\left[1-\left(\frac{a}{b}\right)\right] \sqrt{1-\left(\frac{a}{b}\right)^2}}{\left[\left(\frac{z}{b}\right)-\left(\frac{a}{b}\right)\right]} \right]. \quad (0.95)$$

Rozdzielając część rzeczywistą i urojoną dostajemy składowe wektora prędkości. Można je otrzymać również bezpośrednio, różniczkując potencjał prędkości Φ wyrażony wzorem (0.94) po ∂x i po ∂y .

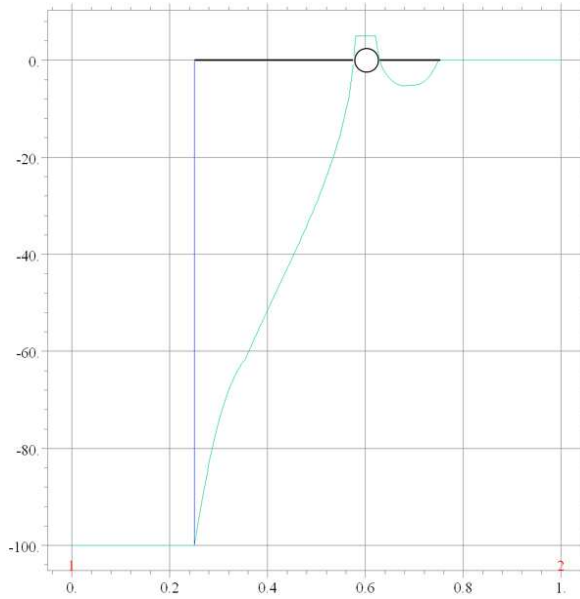
Poniżej na rysunku 7.80 przedstawione pole wektorowe prędkości filtracji, gdy $\frac{a}{b} = 0,4$, $\frac{H_m}{b} = 1$ oraz

$$Q = 1,5 \cdot 10^{-4} \frac{m^3}{s}, \quad b = 10m, \quad k = 10^{-3} \frac{m}{s}.$$



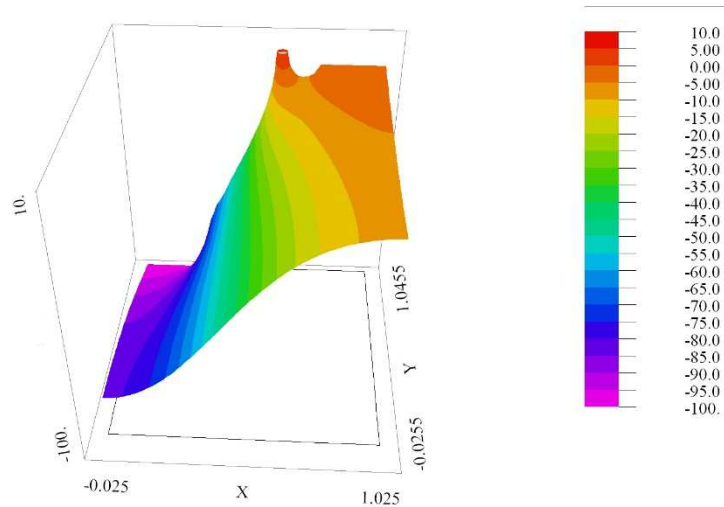
Rys. 7.80. Pole wektorowe prędkości filtracji.

Dla zobrazowania rozkładu funkcji potencjału w obszarze filtracji przedstawiono na rys. 8.81. wizualizację trójwymiarową tej funkcji.



Rys. 7.81. Wizualizacja funkcji potencjału prędkości Φ na brzegu $y = 0$.

Kształt funkcji potencjału prędkości na płaszczyźnie x, y przedstawiono na rys. 7.82 w trójwymiarowym układzie współrzędnych x, y, Φ .



Rys. 7.82. Kształt funkcji Φ na płaszczyźnie x, y

Do chwili obecnej zbudowano szereg rozwiązań zagadnień brzegowych metodami analitycznymi. Część z nich przedstawiono w pracy [Połubarinowej-Kociny, 1977], inne w pracach [Rembezy, 1998]. Z punktu widzenia zastosowań praktycznych sprawiają one inżynierom trudności ze względu na skomplikowaną pod względem matematycznym formę rozwiązań. Dlatego częściej stosowane są rozwiązania oparte na metodach numerycznych, które omówimy w rozdziale.IX.