

Modelowanie przepływu cieczy przez ośrodki porowate

Wykład X

Wykorzystanie funkcji potencjału zespolonego filtracji do rozwiązywania zagadnień dwuwymiarowych przepływu filtracyjnego.

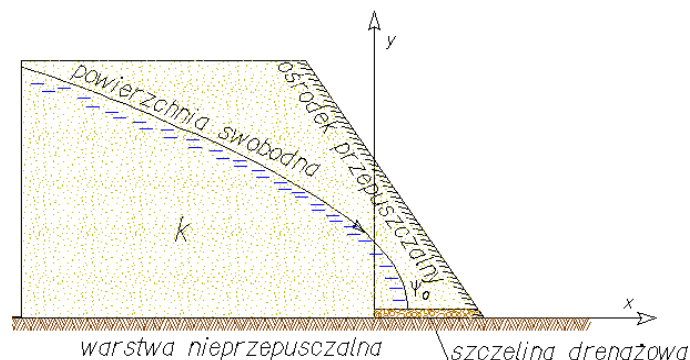
Rozwiązywanie płaskich zagadnień metodą analityczną było w czasach, gdy komputery nie miały powszechnego zasięgu, a ich zdolności obliczeniowe były ograniczone, jedyną metodą uzyskania rozwiązań zagadnień filtracji pozwalających na wykonywanie obliczeń inżynierskich w konkretnych zagadnieniach budownictwa wodnego, ochrony środowiska i hydrogeologii inżynierskiej. Obecnie istnieją przyjazne dla użytkownika programy komputerowe, które pozwalają na nawet „domowym” sprzęcie komputerowym rozwiązywać złożone zagadnienia brzegowe. Metodyka rozwiązań przedstawionych w tym podrozdziale nic nie straciła jednakże na swojej wartości. Uzyskane przedstawionymi poniżej metodami rozwiązania pozwalają dobrze zrozumieć sens fizyczny otrzymanych w rozwiązaniu funkcji oraz przeprowadzić pełną analizę uzyskanych rozwiązań, co jest możliwe tylko w ograniczonym zakresie w przypadku rozwiązań metodami numerycznymi. Wiele prezentowanych poniżej rozwiązań, stanowiących istotną część podręczników akademickich i publikacji oraz monografii poświęconych teorii filtracji, zawdzięczamy [Połubarinovej-Koczinie, 1977], i szkole rosyjskiej w tym także uczynom: [Aravinowowi i innych, 1953], [Filczakovowi, 1960] oraz w Polsce [Rembezie, 1984, 1992, 1998]. Uzyskane tą metodą rozwiązania służą między innymi do testowania programów obliczeń płaskich zagadnień przepływu metodami numerycznymi.

Zajmiemy się przykładami zastosowań powyższej metody do zagadnień istotnych z punktu widzenia budownictwa wodnego. Przedstawimy na początku rozwiązania zagadnień ze zwierciadłem swobodnym mające swoje zastosowanie przede wszystkim w analizie przepływów przez przepuszczalne gródze ziemne, wały przeciwpowodziowe. Następnie omówimy sposób znajdowania funkcji potencjału zespolonego Ω dla przypadku opływu fundamentu budowli piętrzących, ścianek szczelnych, oraz opływu budowli piętrzącej ze współdziałającą ścianką szczelną i drenażem. W rozwiązaniach tych, uzyskanych przez innych autorów, przedstawimy poszerzoną analizę uzyskanych wyników oraz dodatkowo przedstawimy obliczenia potencjału sił masowych filtracji oraz przewidywanej strefy upłynnienia gruntu po przekroczeniu warunku granicznego stateczności filtracyjnej.

9.1 Rozwiązania zagadnień brzegowych ze zwierciadłem swobodnym.

9.1.1 Szczelina drenażowa w warstwie nieprzepuszczalnej (Parabola Limasset'a).

Rozważmy półprzestrzeń wypełnioną ośrodkiem porowatym o współczynniku filtracji k , która jest ograniczona od dołu granicą nieprzepuszczalną (rys.45)



Rys. 45 Schemat zadania dotyczącego dopływu do szczeliny drenażowej.

Wzdłuż granicy nieprzepuszczalnej na odcinku o długości równej d pracuje dren poziomy wykształcony w formie wąskiej szczeliny drenażowej. Wskutek działania drenu w obszarze półprzestrzeni wytwarza się strefa wód gruntowych oddzielona od strefy aeracji powierzchnią swobodną. Poszukujemy takiej funkcji Ω , aby zostały spełnione warunki brzegowe wzdłuż drenu, wzdłuż warstwy nieprzepuszczalnej oraz wzdłuż linii powierzchni swobodnej wód gruntowych. Na powierzchni swobodnej, gdy pomijamy ciśnienie powietrza i nie uwzględniamy występowanie wód kapilarnych, muszą być spełnione następujące warunki brzegowe:

$$\Phi + ky = 0, \quad (10.1)$$

|

$$\Psi = \Psi_0, \quad (10.2)$$

gdzie Ψ_0 – stała odpowiadająca wartości funkcji prądu dla powierzchni swobodnej.

Wzdłuż granicy nieprzepuszczalnej [$y = 0; x \leq 0$] (patrz rys. 7.35), musi być spełniony warunek:

$$\Psi = 0. \quad (10.3)$$

Wzdłuż granicy przepuszczalnej [$y = 0; x \geq 0$] (patrz rys. 7.35), warunek brzegowy ma postać:

$$\Phi = 0. \quad (10.4)$$

Wybieramy kolejne funkcje $z = f(\Omega)$, poczynając od funkcji liniowej. Funkcja liniowa, jak łatwo sprawdzić, nie spełnia warunków brzegowych. Rozpatrzmy następnie funkcję kwadratową. Ponieważ w tym przypadku dla dowolnego punktu obszaru filtracji:

$$z = A\Omega^2. \quad (10.5)$$

sprawdzimy, czy funkcja ta może mieć powierzchnię swobodną, spełniającą warunki brzegowe. Dla powierzchni swobodnej mamy warunki brzegowe (10.1) i (10.2), a więc wstawiając je do równania (10.5) otrzymujemy:

$$x + iy = A(-ky + i\Psi_0)^2. \quad (10.6)$$

Po wykonaniu prostych przekształceń możemy zapisać:

$$x - Ak^2y^2 + A\Psi_0^2 + i(y + 2Ak\Psi_0y) = 0,$$

stąd dostajemy:

$$x = A(k^2y^2 - \Psi_0^2) \quad (10.7)$$

oraz

$$y = -2Ak\Psi_0y. \quad (10.8)$$

Z równania (10.8) otrzymujemy bezpośrednio wartość stałej A :

$$A = -\frac{1}{2k\Psi_0} \quad (10.9)$$

Podstawiając wartość stałej A z (10.9) do równania (10.7) otrzymujemy funkcję opisującą kształt linii zwierciadła swobodnego spełniającą nałożone na tę linię warunki brzegowe:

$$x = -\frac{k}{2\Psi_0} y^2 + \frac{\Psi_0}{2k}. \quad (10.10)$$

Krzywa określona powyższym równaniem jest nazywana w niektórych anglosaskich podręcznikach akademickich (np. Castany'ego []) parabolą Limasseta. Oznaczając wierzchołek paraboli przez d , z równania (10.10) możemy określić relację pomiędzy wydatkiem dopływającym do drenu $Q = \Psi_0$ a odciętą d :

$$Q = 2kd. \quad (10.11)$$

Przykład liczbowy.

Przyjmując różne wartości d otrzymujemy krzywe zwierciadła swobodnego. Przyjmując $k = 0,01m/s$ i oznaczając przez $L = 100m$ przyjęty przez nas „zasięg leja depresji” mierzony od początku układu współrzędnych, oznaczmy przebieg krzywej zwierciadła swobodnego dla kilku przyjętych wartości d :

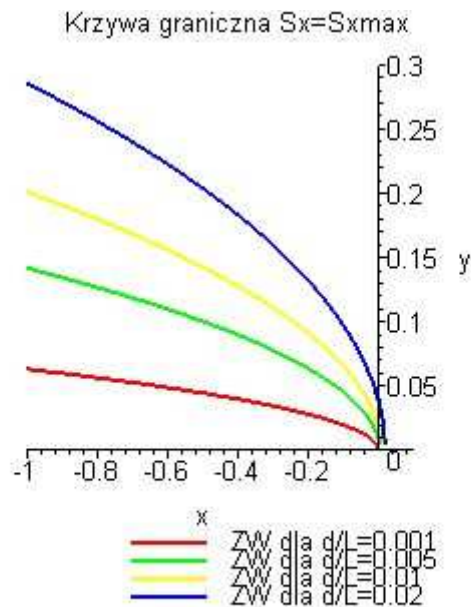
$$d = 0,10m \rightarrow \frac{d}{L} = 0,001 \rightarrow Q = 0.002 \frac{m^2}{s},$$

$$d = 1,00m \rightarrow \frac{d}{L} = 0,01 \rightarrow Q = 0.02 \frac{m^2}{s},$$

$$d = 2,0m \rightarrow \frac{d}{L} = 0,02 \rightarrow Q = 0.04 \frac{m^2}{s}.$$

Na rys. 45 przedstawiono kształt krzywej depresji dla podanych wyżej danych w bezwymiarowym układzie współrzędnych:

$$\frac{y}{L} = \sqrt{-\left(\frac{2Q}{kL}\right)\frac{x}{L} + \frac{Q^2}{k^2L^2}}. \quad (10.12)$$



Rys. 46. Krzywa zwierciadła swobodnego w zależności od odciętej d [$d= 0,1m , 0,5m, 1m, 2m$];(obliczenia – program Maple8).

Znając stałą A , funkcję potencjału zespolonego Ω można zapisać w postaci:

$$z = -\frac{1}{2k\Psi_0}\Omega^2. \quad (10.13)$$

Kładąc:

$$\Omega = \Phi + i\Psi ,$$

mamy:

$$x + iy = -\frac{1}{2k\Psi_0}(\Phi + i\Psi)^2.$$

Po prostych przekształceniach dostajemy:

$$x = -\frac{1}{2k\Psi_0}(\Phi^2 - \Psi^2), \quad (10.14)$$

$$y = -\frac{\Phi\Psi}{k\Psi_0}. \quad (10.15)$$

Sprawdzimy obecnie, czy są spełnione założone warunki brzegowe na pozostałych brzegach. Wiemy, że wzdłuż granicy nieprzepuszczalnej (ujemna półoś x) powinien być spełniony warunek $\Psi = 0$. Wstawiamy $\Psi = 0$ do wyrażień (10.14) i (10.15).

Otrzymamy:

$$x = -\frac{\Phi^2}{2k\Psi_0} \quad ; \quad y = 0. \quad (10.16)$$

Ponieważ dla dowolnej $\Phi \rightarrow x < 0$, równania (10.16) są równaniami ujemnej półosi x .

Wzdłuż granicy przepuszczalnej (szczeliny drenażowej) winien być spełniony warunek $\Phi = 0$.

Podstawiając $\Phi = 0$ do wyrażień (10.14) i (10.15) otrzymamy:

$$x = \frac{\Psi^2}{2k\Psi_0} \quad ; \quad y = 0, \quad (10.17)$$

ponieważ dla dowolnego $\Psi \rightarrow x > 0$ równania (10.17) są równaniami opisującymi dodatnią półoś x na odcinku $0 < x < \frac{\Psi_0}{2k}$. Można, więc stwierdzić, że przyjęta funkcja potencjału zespolonego Ω spełnia wszystkie założone warunki brzegowe zadania.

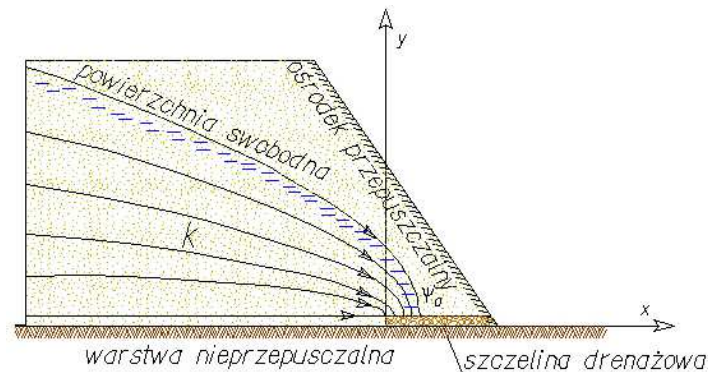
Aby wyznaczyć linię prądu dla $\Psi = const$ przekształcimy, wyrażenia (10.14) i (10.15).

Z wyrażenia (10.15) wyznaczmy Φ :

$$\Phi = -\frac{k\Psi_0}{\Psi}y. \quad (10.18)$$

i podstawiając do wyrażenia (10.14) dostajemy:

$$x = -\frac{k\Psi_0}{2\Psi^2} y^2 + \frac{\Psi^2}{2k\Psi_0}. \quad (10.19)$$



Rys. 47 Linie prądu w zadaniu ze szczeliną drenażową.

Podstawiając pod Ψ kolejne wartości z przedziału $(0, \Psi_0)$ otrzymamy kolejne linie prądu (rys. 47). Jak to wynika ze wzoru (10.19), wszystkie linie prądu opisują równania parabol, których wierzchołki znajdują się na dodatniej półosi x na odcinku $0 < x \leq \frac{\Psi_0^2}{2k}$ (rys. 47).

Równania powierzchni ekwipotencjalnych otrzymamy obliczając z równania (10.15) Ψ :

$$\Psi = \frac{k\Psi_0}{\Phi} y \quad (10.20)$$

i podstawiając (10.20) do równania (10.14) dostajemy równania linii ekwipotencjalnych w postaci:

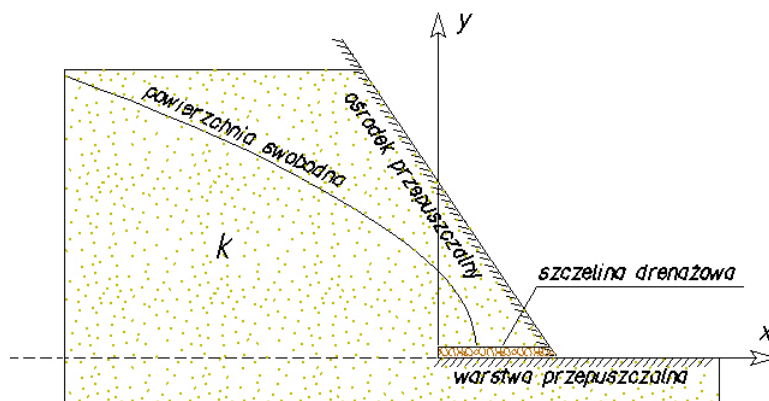
$$x = \frac{k\Psi_0}{2\Phi^2} y^2 - \frac{\Phi^2}{2k\Psi_0}, \quad (10.21)$$

które stanowią dla przyjętych wartości stałych Φ rodzinę parabol o wierzchołkach na ujemnej półosi x . Siatkę hydrodynamiczną dla rozpatrywanego przypadku przedstawiono na rys. 48.

Wiedząc, że $Q = \Delta\Psi$ możemy obliczyć wydatek dla całego obszaru filtracji:

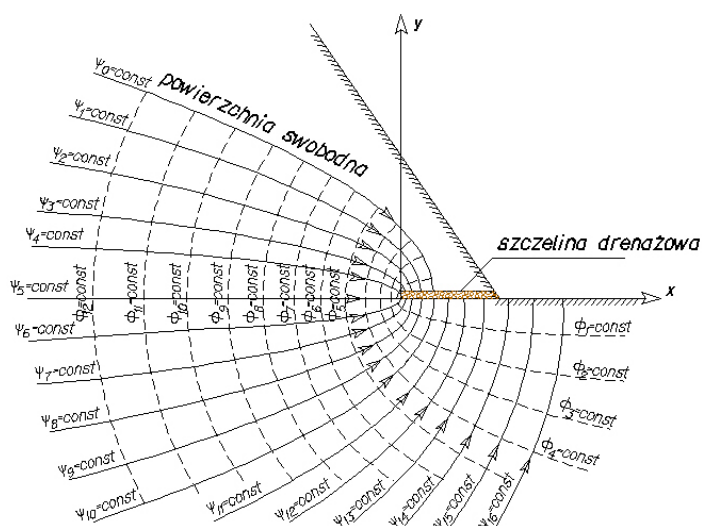
$$Q = \Psi_0. \quad (10.22)$$

9.1.2 Szczelina drenażowa w warstwie przepuszczalnej.



Rys. 49. Schemat zadania szczeliny drenazowej w warstwie przepuszczalnej.

Przypadek ten różni się od poprzedniego tym, że zamiast warstwy nieprzepuszczalnej mamy "przyłączoną" do obszaru przepływu półprzestrzeń przepuszczalną (rys.49). Nie będziemy szczegółowo analizowali tego przypadku, gdyż sposób postępowania jest identyczny jak w poprzednim podrozdziale.



Rys. 50. Siatka hydrodynamiczna przepływu dla przypadku szczeliny drenazowej w warstwie przepuszczalnej.

Wszystkie linie prądu są współosiowymi parabolami o równaniach uzyskanych w podrozdziale VII.4.3.1.1. z tą różnicą, że dla Ψ należy jednak przyjmować wartości od Ψ_0 do $-\infty$.

Siatkę hydrodynamiczną przepływu dla tego przypadku przedstawiono na rys. 50. Zajmiemy się za to konstrukcją izobar (linii jednakowego ciśnienia), izotach (linii jednakowej prędkości), izoklin (linii, wzdłuż których wektor prędkości posiada jednakowy kierunek).

Konstrukcja Izobar.

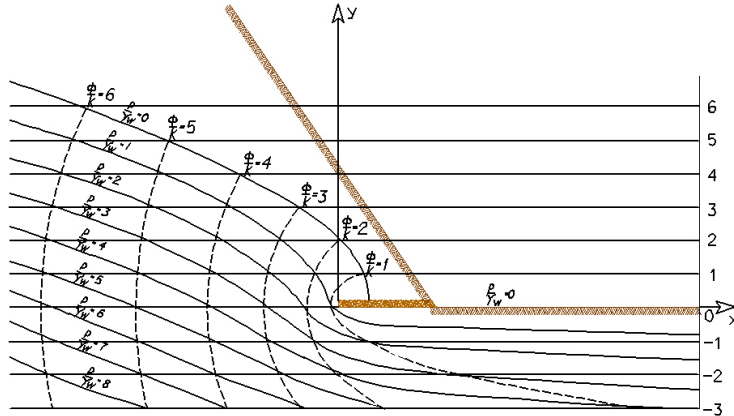
W celu określenia rodziny krzywych izobarycznych przypominamy zależności między potencjałem prędkości, a ciśnieniem:

$$\Phi = -k \left(\frac{P}{\gamma_w} + y \right).$$

Zależność tę można napisać w postaci:

$$-\frac{P}{\gamma_w} = \frac{\Phi}{k} + y.$$

Stąd widać, że mając określoną siatkę hydrodynamiczną przepływu można znaleźć izobary metodą graficznego dodawania (rys. 51).



Rys. 51. Siatka izobar uzyskana metodą graficznego dodawania.

Przyjmujemy dla przykładu, że w obszarze filtracji mamy określone linie jednakowej wysokości hydraulicznej

$$H = -\frac{\Phi}{k} = 1; 2; 3; 4 \dots \quad (\text{rys.51}).$$

Wykreślamy linię poziomą o równaniach:

$$y = 1, y = 2, y = 3, \dots y = N.$$

W przecięciu linii $y = 1$ z linią $H = +1$ dostajemy $\frac{P}{\gamma_w} = 1 - 1 = 0$, z linią $H = +2$ $\frac{P}{\gamma_w} = 2 - 1 = 1$ itd.

Określamy w ten sposób $\frac{P}{\gamma_w}$ we wszystkich punktach tak uzyskanej krzywoliniowej siatki. Łączymy

punkty, w których $\frac{P}{\gamma_w}$ ma taką samą wartość i dostajemy izobary dla $\frac{P}{\gamma_w} = 1, \frac{P}{\gamma_w} = 2$ itd..

Dla rozpatrywanego zagadnienia nietrudno znaleźć równanie izobar. W tym celu wystarczy wyłączyć Ψ z równania (10.15) i po podstawieniu do (10.14) rozwiązać to równanie względem Φ .

Otrzymamy równanie czwartego stopnia:

$$\frac{1}{2k\Psi_0} \Phi^4 + x\Phi^2 - \frac{k\Psi_0}{2} y^2 = 0. \quad (10.23)$$

Przyrównując $\Phi + ky$ do stałej C otrzymamy dla izobar równanie czwartego stopnia:

$$k^2\Psi_0^2 y^2 = (C - ky)^2 [(C - ky)^2 + 2k\Psi_0 x]. \quad (10.24)$$

Rodzina izotach i izoklin.

Określenie siatki izotach i izoklin jest ważne wtedy, gdy istnieje niebezpieczeństwo sufozji rozrzedzania gruntu itp., na przykład pod zaporami wodnymi. Izotachy i izokliny znakomicie ułatwiają nam analizę „stateczności filtracyjnej” gruntu w obszarze budowli wodnych.

Wykonajmy operację obliczenia logarytmu prędkości zespolonej filtracji i rozdzielmy część rzeczywistą i urojoną:

$$\ln w = \ln|w| + i \arg w. \quad (10.25)$$

Stąd dostajemy:

$$\ln w = \ln v + i \vartheta, \quad (10.26)$$

gdzie: v – wartość bezwzględna wektora prędkości
 ϑ - kąt między wektorem a osią odciętych.

Ponieważ $\ln w$ jest funkcją analityczną, więc linie $\ln v = \text{const}$ i $\vartheta = \text{const}$ tworzą rodziny krzywych wzajemnie ortogonalnych.

W rozpatrywanym przez nas przypadku szczeliny drenażowej w warstwie przepuszczalnej, możemy więc uzyskać równanie izotach i izoklin w postaci zamkniętej.

Istotnie na podstawie (10.13) mamy:

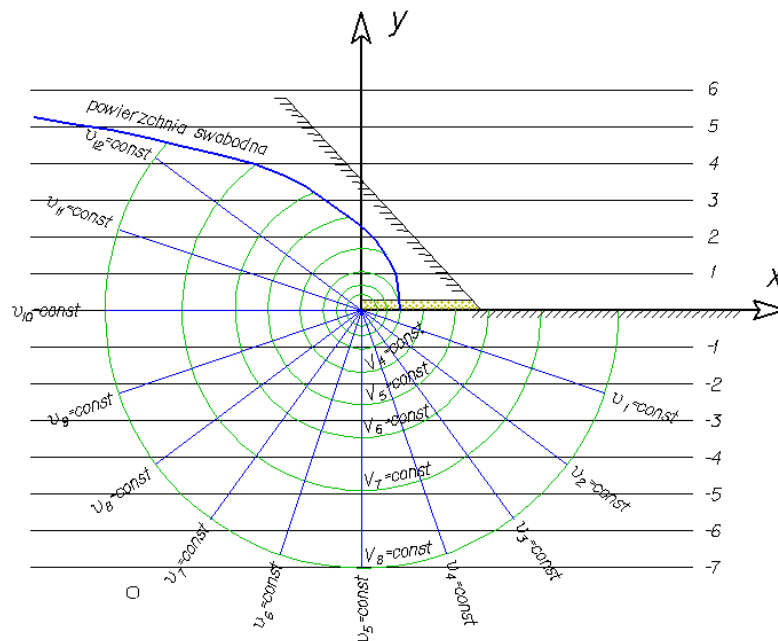
$$\Omega = \sqrt{-2k\Psi_0 z}. \quad (10.27)$$

Stąd:

$$w = \frac{d\Omega}{dz} = \sqrt{\frac{k\Psi_0}{z}}. \quad (10.28)$$

Logarytm prędkości zespolonej równy jest:

$$\ln w = \ln \left| \sqrt{-\frac{k\Psi_0}{z}} \right| = -\frac{1}{2} \left[\ln|z| + i \arg \operatorname{tg} \frac{y}{x} \right]. \quad (10.29)$$



Rys.52 Rodzina izotach i izoklin.

Widać stąd, że izotachy stanowią koncentryczne koła o promieniu $r = \text{const}$ i środku w ognisku parabol $(0,0)$, natomiast izokliny są to promienie, wychodzące z ogniska (rys. 52). Wielkość prędkości

równa jest współczynnikowi filtracji k wzdłuż okręgu, który jest styczny do swobodnej powierzchni (w miejscu styku tej powierzchni ze szczeliną drenażową).

Pole wektorowe prędkości filtracji.

Wychodząc z równania (10.23), otrzymujemy funkcję potencjału prędkości Φ . Rozwiązując równanie dwukwadratowe:

$$\Phi^4 + 2k\Psi_0x\Phi^2 - k^2\Psi_0^2y^2 = 0,$$

z którego dostajemy funkcję potencjału prędkości w postaci:

$$\Phi = \pm \sqrt{k\Psi_0 \left(-x + \sqrt{x^2 + y^2} \right)}. \quad (10.30)$$

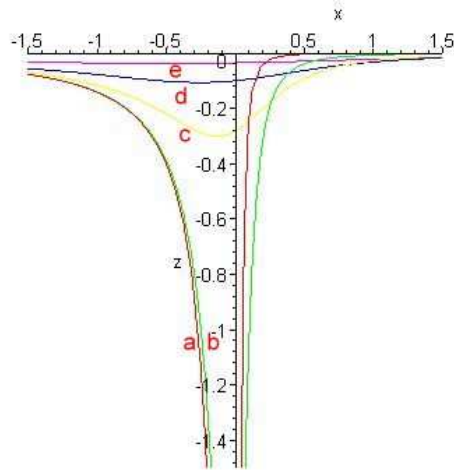
Różniczkując funkcję potencjału prędkości po ∂x i ∂y dostaniemy bezpośrednio składowe prędkości filtracji \vec{v} :

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = k \sqrt{\frac{d}{2L} \frac{\sqrt{-\frac{x}{L} + \sqrt{\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{y}{L}\right)^2}}{\left(\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{y}{L}\right)^2\right)}} \quad (10.31)$$

oraz

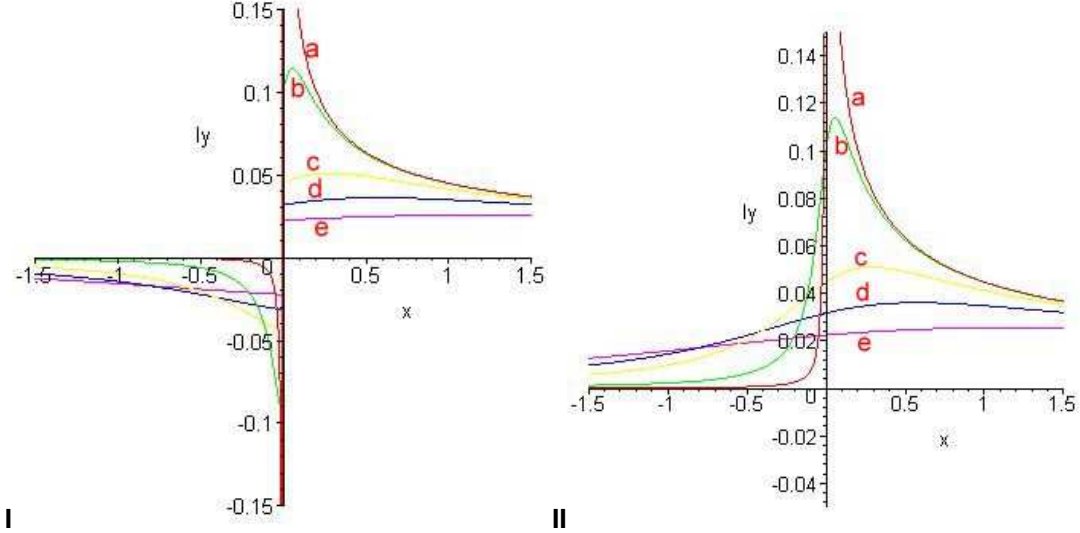
$$v_y = \mp k \sqrt{\frac{d}{2L} \frac{\sqrt{\frac{x}{L} + \sqrt{\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{y}{L}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{y}{L}\right)^2}}}, \quad (10.32)$$

gdzie uwzględniono, że $\Psi_0 = 2kd$. Wartości składowej v_x są zawsze dodatnie bez względu na obszar filtracji (pod i nad osią x), natomiast składowa v_y zależy od znaku osi y – nad osią znak jest ujemny, a pod osią dodatni. Na rys. 53 przedstawiono wykresy składowej spadku hydraulicznego $i_x = v_x/k$ dla różnych poziomów zmiennej y . W przypadku dodatnich wartości rzędnych wykres ma swój sens tylko w obszarze przepływu ograniczonym zwierciadłem swobodnym przepływu.



Rys. 53 Wykresy składowej prędkości v_x w zależności od poziomu y_i :
a) $y/L = 0.01$, b) $y/L = 0.1$, c) $y/L = 0.5$, d) $y/L = 1.0$, e) $y/L = 2.0$.

Wykorzystując wzór (10.32), otrzymujemy wykresy składowej prędkości filtracji v_y dla dodatnich wartości rzędnej (rys. 54-I) i ujemnych wartości rzędnych (rys. 54b-II).



Rys. 54 Wykresy składowej v_y w zależności od poziomu y_i :
a) $y/L = 0.01$, b) $y/L = 0.1$, c) $y/L = 0.5$, d) $y/L = 1.0$, e) $y/L = 2.0$.

Znając funkcje potencjału prędkości Φ możemy określić funkcję potencjału \mathfrak{R} reprezentującą współdziałanie pola potencjalnego przepływu filtracyjnego z polem sił ciężkości cząstek gruntu dla dodatniej półosi x (dla ujemnej półosi nie znamy oddziaływania od ciężaru naziomu):

$$\mathfrak{R} = \frac{\rho g}{k} \Phi - \Delta^* y \tag{10.33}$$

otrzymujemy dla rozpatrywanego przypadku:

$$\mathfrak{R} = \pm \rho g \sqrt{\frac{\Psi_0}{k}} \left(-x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) - \Delta^* y, \quad (10.34)$$

gdzie $\Delta^* = \rho_{os} (1 - f)$ określa ciężar objętościowy gruntu z uwzględnieniem wyporu. Różniczkując potencjał sił masowych \mathfrak{R} po zmiennych x i y dostajemy składowe sił masowych działających na szkielet ośrodka porowatego \vec{S} :

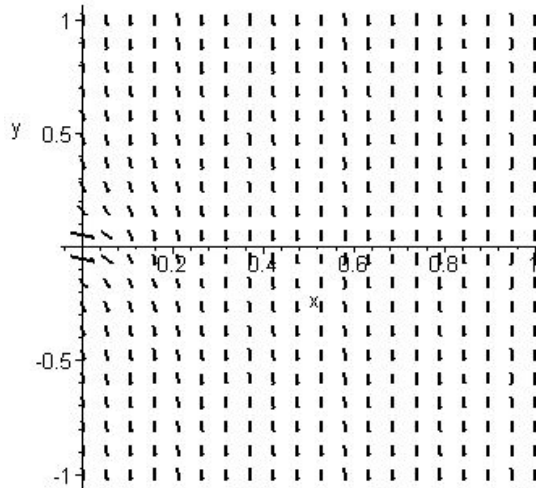
$$S_x = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x} = \rho g \sqrt{\frac{d}{2L}} \frac{\sqrt{-\frac{x}{L} + \sqrt{\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{y}{L}\right)^2}}{\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{y}{L}\right)^2}} \quad (10.35)$$

i

$$S_y = \rho g \sqrt{\frac{d}{2L}} \frac{\sqrt{-\left(\frac{x}{L}\right) + \sqrt{\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{y}{L}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{y}{L}\right)^2}} - \Delta^*. \quad (10.36)$$

Przykładowo przedstawimy wpływ filtracji na wielkość sił masowych oddziałujących na szkielet ośrodka (rys. 55 i 56). Na pierwszym z rysunków przedstawiono pole wektorowe sił masowych \vec{S} dla przypadku, gdy mamy do czynienia z niewielkim wydatkiem $Q = 0,002 \frac{m^2}{s}$, co odpowiada skrajnej odciętej linii zwierciadła swobodnego $d = 0,1m$ przy przyjęciu zasięgu leja depresji $L = 100,0m$

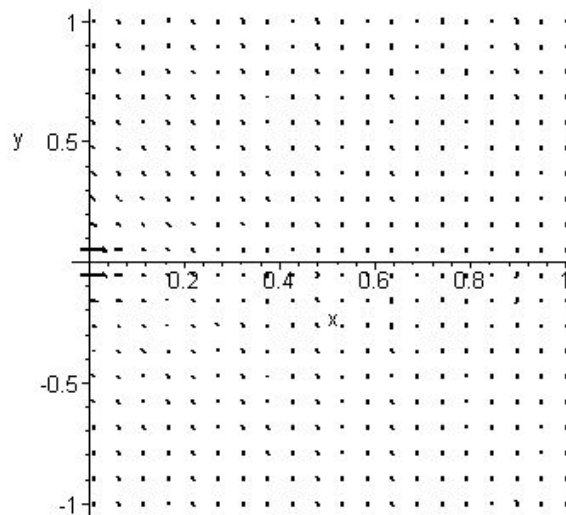
Pole wektorowe sił masowych S dla $Q=0.002$; $d=1$



Rys. 55. Pole sił masowych dla $Q = 0,002 \frac{m^2}{s}$.

Dla porównania pokazano pole sił masowych, gdy mamy do czynienia z dziesięciokrotnie większym wydatkiem, co odpowiada odciętej $d = 1,0m$.

Pole wektorowe sił masowych S dla Q=0.02; d=1



Rys. 56. Pole sił masowych dla $Q = 0,02 \frac{m^2}{s}$.

Z porównania obydwu rysunków wynika, jak znaczny wpływ mają siły unoszenia filtracji na wielkość wypadkowych sił masowych oddziaływujących na szkielet ośrodka. Na rys. 56 daje się zauważyć wektory skierowane w przeciwnym kierunku do sił ciężkości, co może powodować lokalne upłynnienie gruntu. Szczególnie niebezpieczne dla stateczności filtracyjnej są w tym przypadku składowe poziome sił masowych w okolicy drenu. Korzystając ze wzoru (4.646) i upraszczając nieco nasze zagadnienie, obliczmy zasięg strefy granicznej uwzględniając jedynie składową poziomą filtracji S_x .

Warunek stanu granicznego filtracji dla rozpatrywanego przypadku ma postać:

$$\sqrt{\frac{d}{2L}} \frac{\sqrt{-\frac{x}{L} + \sqrt{\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{y}{L}\right)^2}}}{\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{y}{L}\right)^2} \geq \frac{\Delta^*}{\rho g} \operatorname{tg}(\varphi), \quad (10.37)$$

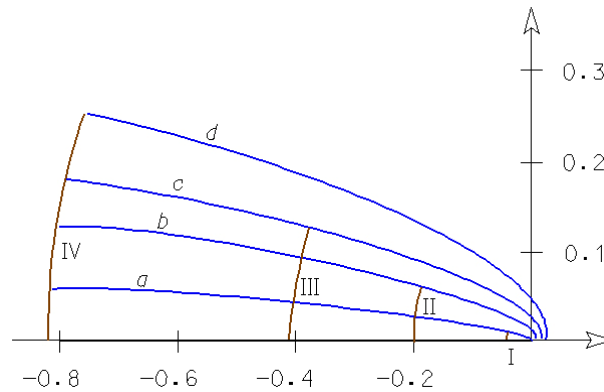
gdzie φ kat tarcia wewnętrznego ośrodka.

Powyższy warunek prowadzi do określenia krzywej granicznej obejmującej obszar, w którym spełniony jest warunek (7.12) czyli składowe poziome prędkości przekraczają wartości dopuszczalne, aby nie nastąpiło upłynnienie ośrodka porowatego. Oczywiście zgodnie z przyjętymi w rozdziale IV założeniami, zakładamy, że ośrodek nie posiada spójności, czyli $c = 0, 0Pa$. Wzór na krzywą graniczną ma w tym przypadku postać:

$$\frac{y}{L} = \sqrt{-\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{1}{A} \frac{x}{L} + \frac{1}{2A^2} + \frac{1}{2A^2} \sqrt{1 - 4A \frac{x}{L}}}, \quad (10.38)$$

przy czym $A = \frac{(\Delta^*)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{(\rho g)^2 \left(\frac{d}{L}\right)}$. Krzywe graniczne dla kilku wartości $\frac{d}{L}$ (zakładając, że $\varphi = 22^\circ$,

$g\rho_{os} = 1650 \frac{KG}{m^3}$ oraz $g\rho = 1000 \frac{KG}{m^3}$) przedstawiono na rys. 57.

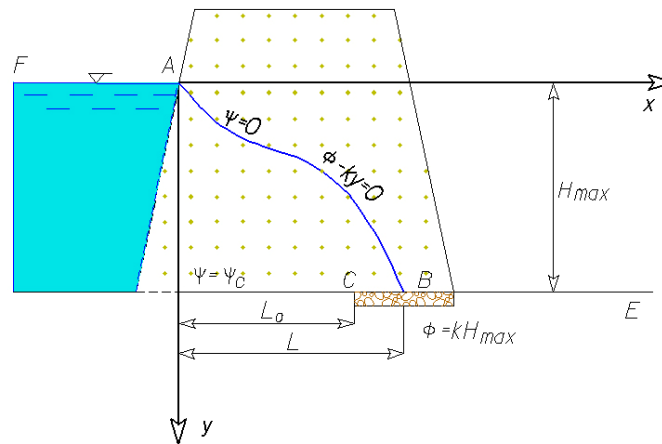


Rys. 57. Zasięg krzywych granicznych dla różnych wartości $d=2m, 1m, 0.5m, 0.1m$.

Powyższe zależności zostały otrzymane bez uwzględnienia sił tarcia wynikających z obciążenia ciężarem ośrodka znajdującego się w strefie filtracji, mają więc jedynie znaczenie pogładowe. Uwzględnienie tych sił jest w tym przypadku niemożliwe, gdyż nie zakładaliśmy określonej wysokości nadkładu. Oczywiście znając tę wartość, bez trudu możemy określić rzeczywisty przebieg krzywych granicznych dla każdego z rozważanych przypadków.

9.1.3 Przepływ przez grodzę ziemną posadowioną na podłożu o nieograniczonej miąższości.

Rozważmy przepływ przez grodzę ziemną przepuszczalną dla wody, przedstawioną schematycznie w przekroju na rys. 7.48. Rozwiązanie tego zagadnienia zostało szczegółowo omówione w pracy [Remebezy, 1998], i w innym ujęciu w pracy [Strzeleckiego, Kosteckiego, 2006a]. Powtarzając za Remebezą tok postępowania, przeprowadzimy następnie szczegółową analizę uzyskanego rozwiązania.



Rys. 58. Schemat zagadnienia brzegowego.

W przypadku zagadnień ze swobodnym zwierciadłem wody nie znamy kształtu zwierciadła swobodnego. Jest to więc zadanie z nieznanym brzegiem i nie możemy bezpośrednio wykorzystać wzoru Christoffela-Schwarza. Aby można było jednakże rozwiązać ten problem, została opracowana metoda dodatkowego odwzorowania poprzez funkcję potencjału Żukowskiego [Połubarinova-Koczina, 1977]. Potencjał Żukowskiego wyraża się przy pomocy zespolonego potencjału Ω wzorem:

$$\theta = z - \frac{i}{k} \Omega = \theta_1 + i\theta_2. \quad (10.39)$$

Stosuje się także inne postaci potencjału Żukowskiego, np. $\theta = z + i\Omega/k$ lub $\theta = \Omega - ikz$. Podstawiając pod $z = x + iy$, dostajemy część rzeczywistą i urojoną potencjału Żukowskiego:

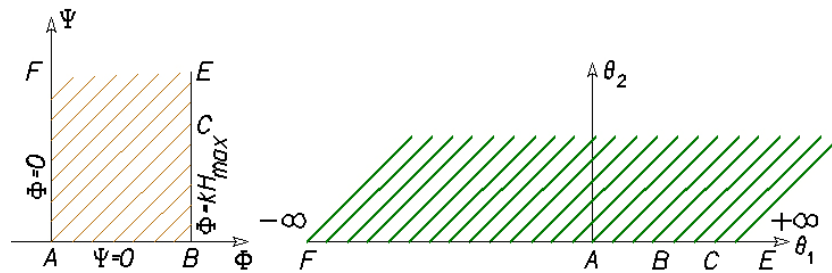
$$\theta_1 = x + \frac{\Psi}{k} \quad \text{oraz} \quad \theta_2 = y - \frac{\Phi}{k}. \quad (10.40)$$

Dla przyjętego układu odniesienia jak na rys. 58 możemy przedstawić schemat obliczeniowy naszego zagadnienia na płaszczyźnie potencjału zespolonego i na płaszczyźnie potencjału Żukowskiego rys. 7.49.

Na płaszczyźnie potencjału zespolonego Ω znamy wartości potencjału w punktach:

$$\begin{aligned} A \rightarrow \Omega = 0 & \quad \text{oraz} \quad \theta = 0, \\ B \rightarrow \Omega = kH_m & \quad \text{oraz} \quad \theta = L, \\ C \rightarrow \Omega = kH_m + i\Psi_c & \quad \text{oraz} \quad \theta = L_0 + \frac{\Psi_c}{k}, \\ D \rightarrow \Omega = kH_m + i\infty & \quad \text{oraz} \quad \theta = \infty, \end{aligned} \quad (10.41)$$

gdzie H_m oznacza różnicę wysokości hydraulicznej przed i za grodzą ziemną.



Rys. 59. Schemat obliczeniowy zagadnienia brzegowego grodzą ziemną.

Analiza wzoru Christoffela-Schwarza i schematu obliczeniowego na rys. 59 pokazuje, że do uwzględnienia we wzorze:

$$z = M \int_0^t \frac{dt}{(t-a_1)^{1-\frac{\alpha_1}{\pi}} (t-a_2)^{1-\frac{\alpha_2}{\pi}} \dots (t-a_n)^{1-\frac{\alpha_n}{\pi}}} + N$$

są dwa punkty oraz podstawienie:

$$\begin{aligned} A \rightarrow a_1 = 0; \quad \alpha_1 &= \frac{\pi}{2}; \\ B \rightarrow a_2 = L; \quad \alpha_2 &= \frac{\pi}{2}; \end{aligned} \quad (10.42)$$

z zastąpimy przez Ω ,
t zastąpimy przez θ ,

co pozwala zapisać wzór Christoffela-Schwarza dla naszego zagadnienia w postaci:

$$\Omega = M \int_0^\theta \frac{d\theta}{\theta^{\frac{1}{2}} (\theta - L)^{\frac{1}{2}}} + N. \quad (10.43)$$

Po pocalkowaniu dostajemy:

$$\Omega = iM \arcsin\left(\frac{L-2\theta}{L}\right) + N. \quad (10.44)$$

Znając wartości potencjału zespolonego w punktach A i B, możemy wyznaczyć stałe M i N z układu równań:

$$\begin{aligned} i\frac{\pi}{2}M + N &= 0, \\ -i\frac{\pi}{2}M + N &= kH_m. \end{aligned} \quad (10.45)$$

Dostajemy: $M = i\frac{kH_m}{\pi}$ oraz $N = \frac{kH_m}{2}$.

Ostatecznie zależność pomiędzy potencjałem zespolonym Ω oraz potencjałem Żukowskiego ma postać:

$$\Omega = \frac{kH}{\pi} \arccos\left(\frac{L-2\theta}{L}\right). \quad (10.46)$$

Po prostych przekształceniach wzór (10.46) można zapisać w postaci:

$$z + i\frac{\Omega}{k} = \frac{L}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi\Omega}{kH_m}\right) \right). \quad (10.47)$$

Uwzględniając, że $z = x + iy$ oraz $\Omega = \Phi + i\Psi$, dostaniemy po wykonaniu przekształceń algebraicznych:

$$x = -\frac{H_m \tilde{\Psi}}{\pi} + \frac{L}{2} \left[1 - \cos(\tilde{\Phi}) \cosh(\tilde{\Psi}) \right] \quad (10.48)$$

oraz

$$y = \frac{H_m \tilde{\Phi}}{\pi} + \frac{L}{2} \sin(\tilde{\Phi}) \sinh(\tilde{\Psi}), \quad (10.49)$$

gdzie $\tilde{\Phi} = \frac{\pi}{kH_m} \Phi$ i $\tilde{\Psi} = \frac{\pi}{kH_m} \Psi$.

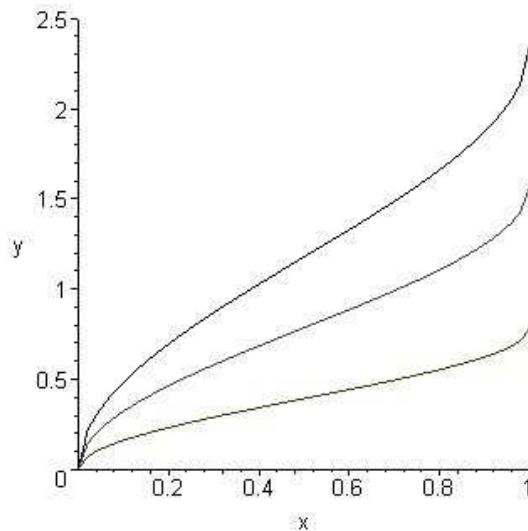
Określmy linię zwierciadła swobodnego podstawiając we wzorach (10.48) i (10.49):

$$\tilde{\Psi} = 0 \quad \text{oraz} \quad \tilde{\Phi} = \pi \frac{y}{H_m}. \quad (10.50)$$

Ostatecznie dostajemy równanie zwierciadła swobodnego:

$$\frac{y}{L} = \frac{1}{\pi} \frac{H_m}{L} \arcsin \sqrt{\frac{x}{L}}. \quad (10.51)$$

Przyjmując $\frac{H_m}{L} = 0,5; 1; 1,5$, krzywą zwierciadła swobodnego przedstawiono na rys. 60.



Rys. 60 Kształt zwierciadła swobodnego w zależności od H_m/L dla zmiennych bezwymiarowych $u = x/L$ oraz $y_b = y/L$.

Obliczmy następnie wartość funkcji prądu dla cieczy dopływającej do punktu C. Korzystając ze wzoru (10.48) oraz z warunku, jaki powinien być spełniony w punkcie C (warunek ekstremum funkcji):

$$\frac{dz}{d\Omega} = 0, \quad (10.52)$$

dostajemy:

$$\Psi_c = \frac{kH_m}{\pi} \arcsin h \left(\frac{2H_m}{\pi L} \right). \quad (10.53)$$

Korzystając ze wzorów (10.49) i (10.50), możemy obliczyć równania linii prądu dla $\tilde{\Psi} = const$ w postaci:

$$\frac{y}{L} = \frac{H_m}{\pi L} \arccos \left[\frac{-2 \left(\frac{x}{L} \right) + \frac{\tilde{\Psi} H_m}{\pi L} - \frac{1}{2}}{\cosh \tilde{\Psi}} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4 \left(\left(\frac{x}{L} \right) + \frac{\tilde{\Psi} H_m}{\pi L} - \frac{1}{2} \right)^2}{\cosh^2 \tilde{\Psi}}} \operatorname{sh} \tilde{\Psi},$$
(10.54)

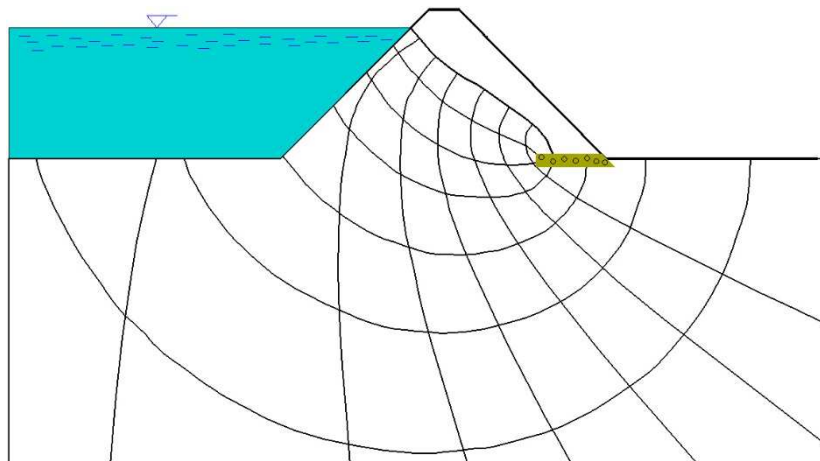
gdzie $0 \leq \tilde{\Psi} \leq \infty$ oraz powierzchni ekwipotencjalnych dla $\tilde{\Phi} = \text{const}$:

$$\frac{x}{L} = -\frac{H_m}{\pi L} \arcsin h \left[2 \frac{\frac{y}{L} - \frac{H_m}{L} \frac{\tilde{\Phi}}{\pi}}{\sin \tilde{\Phi}} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[1 - \cos \tilde{\Phi} \sqrt{1 + \left(2 \frac{\left(\frac{y}{L} \right) - \frac{H_m}{L} \frac{\tilde{\Phi}}{\pi}}{\sin \tilde{\Phi}} \right)^2} \right],$$
(10.55)

gdzie $0 \leq \tilde{\Phi} \leq \pi$.

Obliczając linie prądu i powierzchnie ekwipotencjalne dla rozpatrywanego zagadnienie, na podstawie wzorów (10.54) i (10.55) dostajemy siatkę hydrodynamiczną przepływu, którą prezentujemy na rys. 7.51, przyjmując dla $\tilde{\Phi}$ wartości: $0, 0.25 * \pi / 2, 0.5 * \pi / 2, 0.75 * \pi / 2, 1.0 * \pi / 2, 1.25 * \pi / 2, 1.5 * \pi / 2$.



Rys. 7.51. Siatka hydrodynamiczna przepływu przy filtracji przez grodzę ziemną posadowioną na nieograniczonej warstwie przepuszczalnej dla $H_m/L = 1.0$.

Często dla celów praktycznych istotna jest długość „czynna” drenazu poziomego, czyli odległość $L - L_0$, gdzie, zgodnie ze schematem przedstawionym na rys. 58, L_0 określa odcięta punktu C. Znając wartość funkcji prądu dla linii prądu przechodzącej przez punkt C – wzór (10.53) możemy obliczyć odcięta L_0 na podstawie wzoru (10.48):

$$L_0 + iH_m = \frac{i}{k}(kH_m + i\Psi_C) + \frac{L}{2} \left[1 - \cos \left(\pi + i \frac{\pi\Psi_C}{kH_m} \right) \right]. \quad (10.56)$$

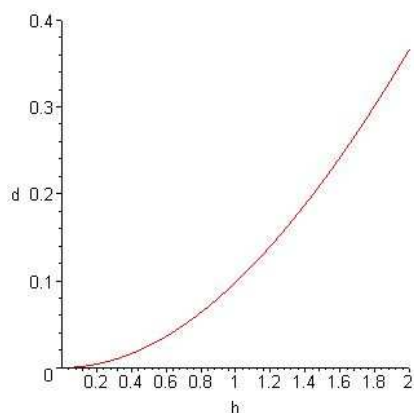
Z równania (10.56) obliczymy wartość odciętej L_0 :

$$L_0 = \frac{L}{2} \left\{ 1 + \cosh \left[\operatorname{arcsin} h \left(\frac{2H_m}{\pi L} \right) \right] \right\} - \frac{H_m}{\pi} \operatorname{arcsin} h \left(\frac{2H_m}{\pi L} \right). \quad (10.57)$$

Wartość odległości BC oznaczmy przez d i na podstawie wzoru (10.57) obliczymy:

$$d = L - L_0 = \frac{L}{2} \left\{ 1 - \cosh \left[\operatorname{arcsin} \left(\frac{2H_m}{\pi L} \right) \right] \right\} + \frac{H_m}{\pi} \operatorname{arcsin} h \left(\frac{2H_m}{\pi L} \right). \quad (10.58)$$

Przykładowo obliczymy względną wartość długości odcinka CB d/L w zależności od H_m/L dla wartości $0 \leq \frac{H_m}{L} \leq 2$, co przedstawiono na rys. 62



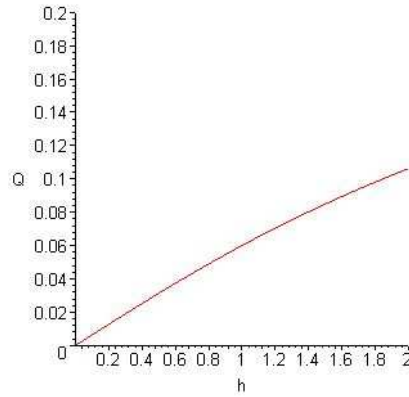
Rys. 62. „Długość czynna” drenu w zależności od $h = H_m/L$.

Obliczmy następnie wydatek dopływający do drenu na odcinku BCB, który uwzględniając dopływ od góry i od dołu wyniesie:

$$Q = 2\Psi_0 = 2kL \frac{H_m}{L} \operatorname{arcsin} h \left(\frac{2H_m}{\pi L} \right). \quad (10.59)$$

Zakładając, że $k = 10^{-3} \text{ m/s}$ oraz $L = 100,0 \text{ m}$ wartość wydatku dopływające na długości d do drenu wynosi w zależności od H_m/L , dla wartości $0 \leq \frac{H_m}{L} \leq 2$ co przedstawiono na rys. 63.

Oczywiście jest to wydatek na jednostkę długości grodzy (przyjmiemy w naszym przypadku na 1mb grodzy).



Rys. 63. Funkcja wydatku Q [m^3/s] dopływającego do drenu w zależności od $h = H_m/L$.

Przejdźmy następnie do obliczenia pola wektorowego prędkości \vec{v} . Wychodząc z równania (7.229):

$$z + i \frac{\Omega}{k} = \frac{L}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{\pi \Omega}{k H_m} \right) \right),$$

zróżniczkujemy je po dz . Otrzymamy związek pomiędzy prędkością przepływu i funkcją potencjału zespolonego Ω w postaci:

$$w = \frac{k}{i + \frac{\pi L}{2H_m} \sin \left(\frac{\Omega \pi}{k H_m} \right)}, \quad (10.60)$$

gdzie w - oznacza prędkość zespoloną filtracji. Po odpowiednich przekształceniach dostajemy następującą postać składowych prędkości filtracji v_x i v_y :

$$v_x = k \frac{\pi L}{2H_m} \frac{\sin \tilde{\Phi} \cosh \tilde{\Psi}}{\left(1 + \frac{\pi L}{2H_m} \cos \tilde{\Phi} \sinh \tilde{\Psi} \right)^2 + \left(\frac{\pi L}{2H_m} \sin \tilde{\Phi} \cosh \tilde{\Psi} \right)^2},$$

$$v_y = k \frac{1 + \frac{\pi L}{2H_m} (\cos \tilde{\Phi})^2 \sinh \tilde{\Psi}}{\left(\frac{\pi L}{2H_m} \cos \tilde{\Phi} \sinh \tilde{\Psi} + 1 \right)^2 + \left(\frac{\pi L}{2H_m} \sin \tilde{\Phi} \cosh \tilde{\Psi} \right)^2}. \quad (10.61)$$

Jak widać, powyższe wzory nie pozwalają na bezpośrednie obliczenie wartości składowych prędkości w obszarze filtracji, gdyż nie mamy możliwości bezpośredniego określenia wartości $\tilde{\Phi}$ i $\tilde{\Psi}$ jako funkcji x i y , gdyż równania (10.54) i (10.55) są równaniami uwikłanymi. W pośredni sposób możemy jednakże określić wartości składowych, obliczając dla określonych wartości $\tilde{\Phi}$ i $\tilde{\Psi}$ współrzędne punktów, w których te wartości występują, a następnie obliczyć składowe prędkości filtracji \vec{v} . Dla przykładu możemy policzyć składowe prędkości filtracji wzdłuż zwierciadła swobodnego filtracji. Wiemy, że w tym przypadku:

$$\tilde{\Psi} = 0 \quad i \quad \tilde{\Phi} = \frac{\pi y}{H_m}. \quad (10.62)$$

Uwzględniając, że równanie krzywej zwierciadła swobodnego ma postać:

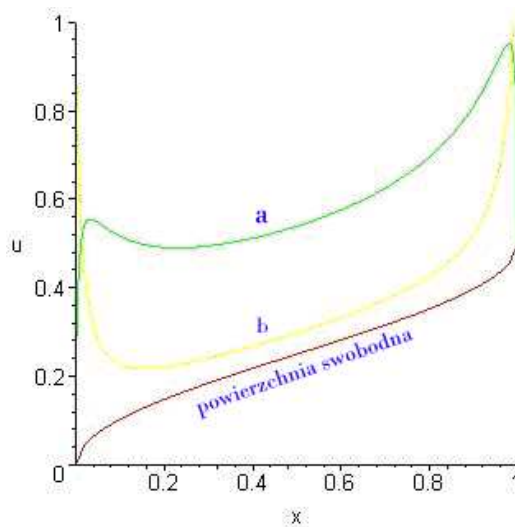
$$\frac{y}{L} = \frac{1}{\pi} \frac{H_m}{L} \arcsin \sqrt{\frac{x}{L}},$$

obliczmy składowe prędkości filtracji wzdłuż zwierciadła swobodnego:

$$v_x = k \frac{\pi L}{2H_m} \frac{\sin \left(\frac{\pi L}{H_m} \arcsin \left(\sqrt{\frac{x}{L}} \right) \right)}{1 + \left(\frac{\pi L}{2H_m} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\pi L}{H_m} \arcsin \left(\sqrt{\frac{x}{L}} \right) \right)}, \quad (10.63)$$

$$v_y = k \frac{1}{1 + \left(\frac{\pi L}{2H_m} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\pi L}{H_m} \arcsin \left(\sqrt{\frac{x}{L}} \right) \right)}.$$

Dla zobrazowania tych wzorów wykonamy obliczenia przyjmując $L/H_m = 2$ i obliczmy wielkości v_x/k oraz v_y/k , odnosząc te wielkości względem zwierciadła swobodnego wyrażonego krzywą (10.51). Odpowiednie wykresy przedstawiono na rys. 64.



Rys. 64 Wykresy $\frac{v_x}{k}$ i $\frac{v_y}{k}$ wzdłuż linii zwierciadła swobodnego.

Korzystając ze wzorów (10.61), możemy określić wielkość składowych prędkości filtracji wzdłuż brzegu BCE. Wstawiając do powyższych wzorów wartości $\tilde{\Phi} = \pi$ dostajemy:

$$v_x = 0$$

$$v_y = k \frac{1}{1 + \frac{\pi L}{2H_m} \sinh\left(\frac{\pi \Psi}{kH_m}\right)}. \quad (10.64)$$

Rozważmy warunek stateczności filtracyjnej wzdłuż linii CE. Wektor prędkości filtracji ma kierunek przeciwny do sił ciężkości. Jeżeli składowa sił masowych S_y spełnia warunek:

$$S_y = \rho g \frac{v_y}{k} + \Delta^* \leq 0, \quad (10.65)$$

to dla obszaru, w którym ten warunek jest spełniony, następuje proces upłynnienia gruntu. Interesować nas będzie obszar (określony zmienną x) znajdujący się poza zasięgiem grodzy ziemnej. W obszarze grodzy należałoby uwzględnić dodatkowo rozkład sił masowych pochodzących od ciężaru grodzy. Uwzględniając drugi ze wzorów (10.64) w warunku (10.65) możemy obliczyć graniczną wartość, powyżej której zachodzi upłynnienie gruntu:

$$\tilde{\Psi}_{gr} = \arcsin h \left(\frac{2H_m \Delta^* + \rho g}{\pi L \Delta^*} \right). \quad (10.66)$$

Aby znaleźć zakres odciętej x , dla której występuje proces upłynnienia gruntu, należy poszukać, dla jakiej wartości odciętej odpowiada wartość $\tilde{\Psi}_{gr}$. W tym celu wykorzystamy równanie (10.54), przyjmując $y = 0$ i dostajemy równanie:

$$\frac{H_m}{\pi L} \arccos \left[\frac{-2\left(\frac{x}{L}\right) + \frac{\tilde{\Psi}_{kr} H_m}{\pi L} - 0,5}{\cosh \tilde{\Psi}_{kr}} \right] +$$

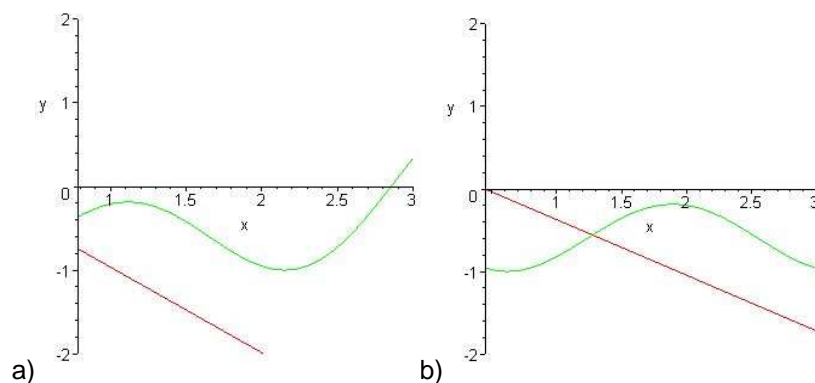
$$+ \left[0,5 \sinh(\tilde{\Psi}_{kr}) \right] \sqrt{1 - \frac{4\left(\frac{x}{L} + \frac{\tilde{\Psi}_{kr} H_m}{\pi L} - 0,5\right)^2}{\cosh^2 \tilde{\Psi}_{kr}}} = 0. \quad (10.67)$$

Określenie bezpośrednio odciętej x jest trudne, gdyż powyższe równanie jest równaniem uwikłanym. Jedną z metod może być metoda polegająca na poszukiwaniu przecięcia się dwóch funkcji uzyskanych z przeniesienia jednego z członów równania na drugą stronę równania i określeniu każdej ze stron jako oddzielnej funkcji od x . Przyjmując, że funkcje te mają postać:

$$F1(x) = \frac{-2\left(\frac{x}{L}\right) + \frac{\tilde{\Psi}_{kr} H_m}{\pi L} - 0,5}{\cosh \tilde{\Psi}_{kr}}$$

$$F2(x) = \cos \left\{ \left[\frac{\pi L}{2H_m} \sinh(\tilde{\Psi}_{kr}) \right] \sqrt{1 - \frac{4\left(\frac{x}{L} + \frac{\tilde{\Psi}_{kr} H_m}{\pi L} - 0,5\right)^2}{\cosh^2 \tilde{\Psi}_{kr}}} \right\}. \quad (10.68)$$

Poniżej przedstawiono dwa rozwiązania równania tą metodą dla H_m/L równego 1,5 i 2,5:



Rys. 65 Rozwiązanie równania uwikłanego a) dla $H_m/L=1,5$; b) dla $H_m/L=2,5$.

Jak widać z rys. 65, dla $H_m/L=1,5$ nie zachodzi zjawisko upłynnienia, natomiast dla $H_m/L=2,5$ punkt graniczny ma w przybliżeniu wartość 1,25, więc w obszarze wypływu wody po stronie odpowietrznej może nastąpić zjawisko upłynnienia gruntu i jego wyporu.

W pracy Rembezy [Rembeza, 1998] przedstawił rozwiązanie dla przypadku grodzy posadowionej na gruncie o ograniczonej miąższości. Zadanie to ma jednak postać znacznie bardziej skomplikowaną niż przedstawione wyżej. Z punktu widzenia inżynierskiego wskazane jest w zadaniach bardziej złożonych korzystać z metod numerycznych, które omówione zostaną w rozdziale IX niniejszej monografii.