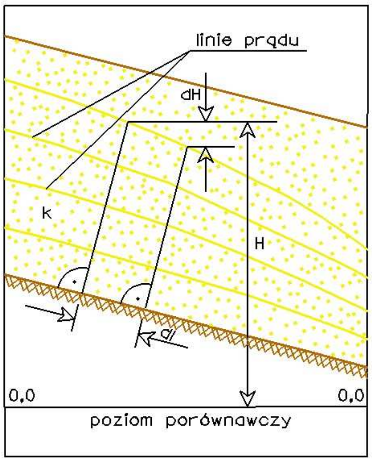
Modelowanie przepływu cieczy przez ośrodki porowate
Wykład V

5.1Aproksymacja Dupuit.

Aproksymacja Dupuit jest najstarszym modelem przepływu filtracyjnego i mimo uproszczeń idących naszym zdaniem zbyt daleko, jest dość powszechnie stosowana przez inżynierów budownictwa lądowego i wodnego, melioracji i pokrewnych dziedzin do projektowania systemów odwodnieniowych.

Dupuit wprowadził założenia do opisu filtracji, które powodują, że przepływy dwu- i trójwymiarowe sprowadzają się odpowiednio do przepływów jedno- i dwuwymiarowych. Istotę tych założeń wyjaśnimy na przykładzie przepływu dwuwymiarowego rys.11.



Rys. 11 Schemat dla zobrazowania założeń aproksymacji Dupuit.

W obszarze filtracji poprowadzimy dwa przekroje prostopadłe do powierzchni nieprzepuszczalnej, oddalone od siebie o nieskończenie małą odległość dl **Dupuit** wprowadził następujące założenia:

l) wysokość hydrauliczna jest jednakowa we wszystkich punktach przekroju;
2) przepływ jest jednostajny;
3) prędkość filtracji jest prostopadła do powierzchni przekroju prostopadłego, który jest prostopadły do powierzchni nieprzepuszczalnej.
4) Filtrująca ciecz jest nieściśliwa podobnie jak szkielet przez pory, którego odbywa się przepływ.

W wyniku tych założeń prędkość filtracji będzie jednakowa w każdym punkcie danego przekroju i wyniesie:

$$v = k\frac{dH}{dl}. \qquad (5.1)$$

Jest wiele zadań w praktyce inżynierskiej, do których to zadań z dostateczną dokładnością można stosować teorię Dupuit. Wielkość błędu wynikającego z przyjęcia założeń Dupuit zależy od stopnia, w jakim założenia teorii Dupuit odbiegają od rzeczywistości, w szczególności, gdy linie prądu nie przebiegają prostopadle do powierzchni przekroju stanowiącą płaszczyznę prostopadłą do powierzchni nieprzepuszczalnej.

W zależności od kształtu powierzchni przekroju, rozwiązywać będziemy zadania w prostokątnym, walcowym lub sferycznym układzie współrzędnych. Uogólnienie teorii Dupuit na przypadek przepływu nieustalonego, będącego wynikiem dopływu wód infiltracyjnych do swobodnej powierzchni przepływu jest teoria Boussinesqu'a.

5.2 Założenia i równanie teorii Boussinesqu'a.

Rozważmy przypadek przepływu swobodnego w trójwymiarowej przestrzeni x,y,z. Płaszczyzna x,y,0 znajduje się na granicy warstwy przepuszczalnej i nieprzepuszczalnej.

W teorii Boussinesqu'a opisującej przepływ nieustalony przyjmuje się następujące założenia:

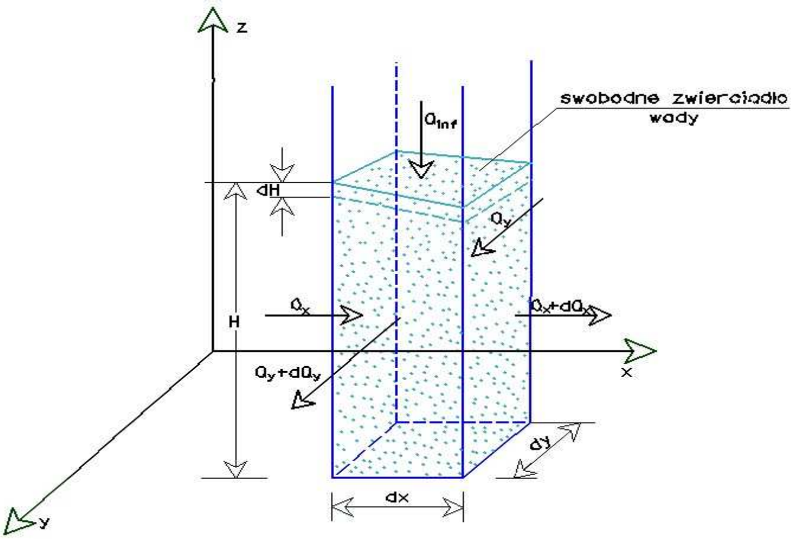
1) ośrodek, przez który następuje przepływ jest jednorodny i izotropowy,
2) przepływ odbywa się w zakresie liniowego prawa przepływu Darcy'ego (ruch laminarny),
   wysokość hydrauliczna wzdłuż wyciętego z obszaru prostopadłościanu jest w każdym punkcie jednakowa i równa wysokości tego prostopadłościanu (rys. 11),
3) przepływająca przez ośrodek ciecz (w domyśle woda) jest nieodkształcalna,
4) własności filtracyjne określa stały w całym obszarze współczynnik filtracji k,
5) prędkość filtracji jest wektorem dwuwymiarowym o składowych v_x i v_y odpowiednio w kierunku osi x i y spełniających równania Dupuit:

$$v_x = k\frac{\partial H}{\partial x} \quad i \quad v_y = k\frac{\partial H}{\partial y}, \tag{5.2}$$

6) do powierzchni swobodnej dopływają wody infiltracyjne o wydatku infiltracji $Q_{\inf}$,
7) wydatek infiltracji przypadający na obszar elementarny równy jest:

$$Q_{\inf} = \varepsilon dxdy \ , \tag{5.3}$$

   gdzie ε określa prędkość dopływu wód infiltracyjnych zwana dalej intensywnością infiltracji,
   obszar filtracji zmienia się w czasie, co na schemacie 12 reprezentuje podniesienie się zwierciadła wody w przedziale czasu dt o wielkość dH,
8) przez podstawę prostopadłościanu nie występuje przepływ – brzeg nieprzepuszczalny



Rys. 12 Schemat obrazujący założenia teorii Boussinesqu'a.

Całkowity przyrost wydatku Q stanowi sumę przyrostu wydatków przepływających w kierunku osi x, y i z, więc:

$$dQ = dQ_x + dQ_y + dQ_z \ . \tag{5.4}$$

Przyrost wydatku w kierunku osi z ze względu na brak przepływu przez podstawę prostopadłościanu elementarnego wynosi:

$$dQ_z = Q_{\inf} = \varepsilon dxdy \, . \qquad (5.5)$$

Obliczmy przyrost wydatku dQ_x:

$$dQ_x = \frac{\partial H}{\partial x} dx \, , \qquad (5.6)$$

gdzie

$$Q_x = F_{\perp x} v_x \, ,$$

przy czym

$$F_{\perp x} = dyH \quad oraz \quad v_x = k \frac{\partial H}{\partial x} \, , \qquad (5.7)$$

więc

$$dQ_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(kH \frac{\partial H}{\partial x} dy \right) dx \, . \qquad (5.8)$$

Ponieważ k jest wielkością stałą, a y jest zmienną niezależną od x, więc:

$$dQ_x = k \frac{\partial}{\partial x}\left(H \frac{\partial H}{\partial x} \right) dxdy \, . \qquad (5.9)$$

Podobnie obliczymy przyrost wydatku dQ_y ze wzoru:

$$dQ_y = k \frac{\partial}{\partial y}\left(H \frac{\partial H}{\partial y} \right) dxdy \, . \qquad (5.10)$$

Całkowity przyrost wydatku przepływającego przez obszar elementarny wynosi:

$$dQ = k \frac{\partial}{\partial x}\left(H \frac{\partial H}{\partial x} \right) dxdy + k \frac{\partial}{\partial y}\left(H \frac{\partial H}{\partial y} \right) dxdy + \varepsilon dxdy \, . \qquad (5.11)$$

Zmiana wydatku dQ w czasie dt w obszarze filtracji powoduje wzrost lub ubytek całkowitej objętości fazy ciekłej w obszarze filtracji:

$$dQ = \frac{dV}{dt} \, , \qquad (5.12)$$

gdzie dV określa przyrost objętości obszaru elementarnego, który można wyrazić wzorem:

$$dV = dQdt \, . \qquad (5.13)$$

Zmianę objętości dV możemy w przybliżeniu obliczyć ze wzoru:

$$dV = \mu_e dHdxdy \, , \qquad (5.14)$$

gdzie μ_e jest współczynnikiem porowatości efektywnej.

Ponieważ dH określa przyrost wysokości hydraulicznej w czasie dt, możemy uwzględniając fakt, że przyjęty przez nas układ odniesienia jest układem Lagrange'a , zapisać:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial t} dt \, , \tag{5.15}$$

więc:

$$dV = \mu_e \frac{\partial H}{\partial t} dxdydt \, . \tag{5.16}$$

Korzystając ze wzoru (5.16) i uwzględniając wzory (5.11) i (5.12), można zapisać:

$$\mu_e \frac{\partial H}{\partial t} dxdy = \left[k \frac{\partial}{\partial x}\left(H \frac{\partial H}{\partial x} \right) + k \frac{\partial}{\partial y}\left(H \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \varepsilon \right] dxdy \, . \tag{5.17}$$

Dzieląc obie strony równania przez dxdy dostajemy ostatecznie równanie Boussinesqa w postaci:

$$\mu_e \frac{\partial H}{\partial t} = k \frac{\partial}{\partial x}\left(H \frac{\partial H}{\partial x} \right) + k \frac{\partial}{\partial y}\left(H \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \varepsilon \, . \tag{5.18}$$

W przypadku braku infiltracji równanie Boussinesqa sprowadza się do równania Dupuit dla przypadku przepływu przestrzennego (model dwuwymiarowy przepływu trójwymiarowego).

Powyższe równanie (5.18) jest nieliniowe i z tego powodu istnieje istotna trudność w jego rozwiązywaniu. W takim przypadku poszukuje się równania liniowego, które daje rozwiązania zbliżone do równania oryginalnego. Poszukiwanie takiego równania nazywa się procesem linearyzacji, a ekwiwalentne równanie liniowe równaniem zlinearyzowanym Boussinesqa.

5.3 Linearyzacja równania przepływu nieustalonego.

W literaturze prezentowane są dwie metody linearyzacji równania Boussinesqu'a:

- metoda Boussinesqu'a,
- metoda Bagrowa – Wierygina.

Metoda Boussinesqu'a wynika z zastąpienia członów nieliniowych równania członami liniowymi zakładając, że wysokość hydrauliczna H w członach znajdujących się w nawiasie jest wielkością stałą i równa się wielkości średniej miąższości warstwy wodonośnej $H = H_{śr}$, więc równanie (5.18) możemy zapisać w postaci:

$$\mu_e \frac{\partial H}{\partial t} = k \frac{\partial}{\partial x}\left(H_{śr} \frac{\partial H}{\partial x} \right) + k \frac{\partial}{\partial y}\left(H_{śr} \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \varepsilon \, . \tag{5.19}$$

Możemy wyciągnąć $H_{śr}$ przed znak pochodnej, a następnie po podzieleniu obu stron równania przez $kH_{śr}$ dostajemy zlinearyzowane równanie Boussinesqu'a w postaci:

$$\frac{\mu_e}{kH_{śr}} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\varepsilon}{kH_{śr}} \, . \tag{5.20}$$

Metoda Bagrowa – Wierygina jest nieco bardziej złożona i opiera się na następującym rozumowaniu:

- pochodne cząstkowe po $\partial x \quad i \quad \partial y$ występujące w równaniu (5.17) możemy zapisać wzorami równoważnymi:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(H\frac{\partial H}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2\left(\frac{H^2}{2}\right)}{\partial x^2} \quad i \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(H\frac{\partial H}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2\left(\frac{H^2}{2}\right)}{\partial y^2}; \tag{5.21}$$

- pomnóżmy obie strony równania (5.21) przez H, wówczas po uwzględnieniu powyższych zależności możemy zapisać

$$\mu_e H\frac{\partial H}{\partial t}=kH\frac{\partial^2\left(\frac{H^2}{2}\right)}{\partial x^2}+kH\frac{\partial^2\left(\frac{H^2}{2}\right)}{\partial y^2}+\varepsilon H_{śr}; \tag{5.22}$$

- człon po prawej stronie powyższego równania można zapisać wyrażeniem równoważnym:

$$\mu_e H\frac{\partial H}{\partial t}=\mu_e\frac{\partial\left(\frac{H^2}{2}\right)}{\partial t}; \tag{5.23}$$

- zastępując H przy drugich pochodnych po x i y przez $H_{śr}$, oraz podstawiając $\tau=\frac{H^2}{2}$ dostajemy zlinearyzowane równanie Bousinessqu'a w postaci:

$$\frac{\mu_e}{kH_{śr}}\frac{\partial\tau}{\partial t}=\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tau}{\partial y^2}+\frac{\varepsilon}{k}. \tag{5.24}$$

Obydwa równania (5.19) i (5.24) mają podobną postać, ale ich rozwiązanie prowadzi do odmiennych rozwiązań opisujących proces przepływu. Konsekwencje obydwu linearyzacji przedstawimy w dalszych podrozdziałach na przykładach zadania przepływu przez groblę z uwzględnieniem zasilania wodami infiltracyjnymi w rozdziale VIII.