

Modelowanie przepływu cieczy przez ośrodki porowate

Wykład IX

Metody rozwiązywania metodami analitycznymi równań hydrodynamiki wód podziemnych płaskich zagadnień filtracji.

9.1 Funkcja potencjału zespolonego.

Rozważania przedstawione w tym podrozdziale oparte są na wynikach prac badawczych [Połubarinovej-Kocziny, 1977] oraz teorii funkcji analitycznych omówionej w monografii [Trajdos-Wróbla, 1965] oraz pracach [Rembezy, 1984, 1992, 1998], [Castany'ego, 1967], [Filcakova, 1960], [Wieczystego, 1982].

Wprowadźmy do naszych rozważań dowolną funkcję analityczną $\Omega = \Omega(z)$. Każdą funkcję analityczną można przedstawić w postaci kombinacji liniowej dwóch funkcji zmiennych rzeczywistych $\Phi(x, y)$ i $\Psi(x, y)$ w postaci:

$$\Omega = \Omega(x + iy) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y). \quad (9.1)$$

Wykażemy teraz, że funkcje Φ i Ψ spełniają równania wprowadzone w rozdziale IV.

Na wstępie rozważmy własności funkcji analitycznej Ω . W tym celu przypomnijmy, że zmienną zespoloną z wyrażamy wzorem:

$$z = x + iy, \quad (9.2)$$

gdzie $i = \sqrt{-1}$.

Pierwsze i drugie pochodne zmiennej zespolonej po ∂x i ∂y są równe:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = i, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Różniczkę zupełną funkcji Ω z obliczamy ze wzoru:

$$d\Omega = \frac{\partial \Omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy,$$

stąd:

$$d\Omega = d\Omega + i dy.$$

Obliczmy następnie pierwsze pochodne funkcji Ω po ∂x i ∂y . Dostaniemy:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{\partial \Omega}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \text{ skąd dostajemy, że } \frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{\partial \Omega}{\partial z},$$

a następnie

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y} = \frac{\partial \Omega}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \text{ z czego wynika, że } \frac{\partial \Omega}{\partial y} = i \frac{\partial \Omega}{\partial z}.$$

Powyższe zależności pozwalają zapisać:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = i \frac{\partial \Omega}{\partial y}. \quad (9.3)$$

Wiedząc, że:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (9.4)$$

i

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + i \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (9.5)$$

oraz wstawiając związki (7.158) i (7.159) do równania (7.157) dostajemy:

$$i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = 0.$$

Równanie powyższe jest spełnione, gdy część rzeczywista i urojona jest równa zero. Otrzymujemy stąd związki:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad i \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (9.6)$$

Związki (9.6) są związkami Cauchy – Riemanna [Trajdos-Wróbel, 1965]. Jak wiemy z geometrii analitycznej, funkcje $\Phi(x, y) = const$ i $\Psi(x, y) = const$ są wzajemnie ortogonalne i spełniają warunek prostopadłości krzywych płaskich:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \quad (9.7)$$

Obliczmy następnie drugie pochodne funkcji Ω po ∂x i ∂y :

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(i \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right) = i \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \right) = i \frac{\partial}{\partial z} \left(i \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right) = -\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}.$$

Sumując stronami powyższe związki dostajemy:

$$\nabla^2 \Omega = 0. \quad (9.8)$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + i \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (9.9)$$

dostaniemy:

$$\nabla^2 \Omega = \nabla^2 \Phi + i \nabla^2 \Psi. \quad (9.10)$$

Biorąc pod uwagę związek (9.10) i równanie (9.8) otrzymujemy następujące dwa równania:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{i} \quad \nabla^2 \Psi = 0. \quad (9.11)$$

Możemy więc stwierdzić, że funkcje Φ i Ψ spełniają równania (9.11) i związki (9.6). Są więc, zgodnie z rozważaniami przedstawionymi w podrozdziale IV.2, odpowiednio: funkcją prądu Ψ i funkcją potencjału prędkości Φ .

Funkcję Ω będziemy nazywali dalej funkcją potencjału zespolonego i wyrazimy ją przy pomocy funkcji Φ i Ψ w postaci:

$$\Omega = \Phi + i\Psi. \quad (9.12)$$

Spróbujemy następnie wyznaczyć prędkość filtracji w dowolnym punkcie obszaru filtracji przy pomocy funkcji potencjału zespolonego. Ze wzorów (9.6) wiemy, że:

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad ; \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (9.13)$$

Obliczymy pochodną funkcji Ω po zmiennej zespolonej z :

$$\Omega'(z) = \frac{d\Omega(z)}{dz}. \quad (9.14)$$

Różniczka zupełna funkcji Ω wyraża się wzorem:

$$d\Omega(z) = \frac{\partial \Omega}{\partial x} dx + i \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy.$$

Wyrażając funkcję Ω w postaci (9.12) i uwzględniając (9.13) dostajemy:

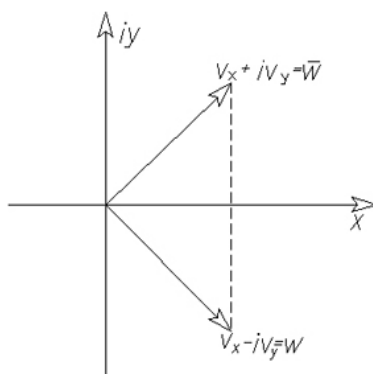
$$d\Omega(z) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) dx + i \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} - i \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dy.$$

Korzystając następnie ze związków (9.13) możemy zapisać:

$$d\Omega(z) = (v_x - iv_y)(dx + idy),$$

stąd

$$\Omega'(z) = v_x - iv_y = w. \quad (9.15)$$



Rys. 40 Schemat do wizualizacji zespolonej prędkości filtracji.

Funkcję $w(z)$ będziemy nazywali prędkością zespoloną filtracji. Znając funkcję w , można określić funkcję \bar{w} sprzężoną z funkcją w (rys.7.30) :

$$\bar{w} = v_x + iv_y . \quad (9.16)$$

Długość wektora filtracji \bar{v} można wyrazić wzorem:

$$|\bar{v}| = \sqrt{w \cdot \bar{w}} . \quad (9.17)$$

Znając funkcję potencjału zespolonego można określić funkcję prędkości zespolonej filtracji, a, co za tym idzie, określić składowe wektora filtracji v_x i v_y .

9.2 Sposób rozwiązywania płaskich zagadnień przepływu.

Sposób rozwiązywania płaskich zagadnień teorii filtracji przy wykorzystaniu funkcji analitycznej przedstawiono w wielu monografiach i podręcznikach akademickich. Pierwsze prace wraz z licznymi przykładami zostały wykonane przez Połubarinową-Koczinę w latach 40-tych XX wieku [Połubarinowa-Koczina, 1977]. Wiele późniejszych autorów publikacji (np. [Castany, 1967] korzystało z metodyki rozwiązywania płaskich zagadnień teorii filtracji opracowanej przez tę uczoną. W niniejszej pracy omówimy metodykę postępowania pozwalającą na znalezienie rozwiązań w postaci zamkniętej dla najbardziej istotnych zadań z zakresu budownictwa wodnego. Przedstawimy ponadto przykłady liczbowe dla niektórych zagadnień brzegowych, aby zorientować czytelnika o przydatności przedstawionego sposobu uzyskiwania rozwiązań praktycznych problemów inżynierskich.

Okreśmy na brzegach obszaru filtracji warunki brzegowe. Następnie poszukujemy takiej funkcji analitycznej, która spełnia warunki brzegowe zadania. Jeżeli istnieje trudność w określeniu bezpośrednio funkcji potencjału zespolonego, możemy poszukiwać funkcji prędkości zespolonej, spełniającej warunki brzegowe zadania, a następnie określić poprzez całkowanie funkcję potencjału zespolonego. Następnie należy rozdzielić funkcję Ω na część rzeczywistą i urojoną uzyskując tą drogą funkcje Φ i Ψ . Pozwala to na wyznaczenie linii $\Phi = const$ i $\Psi = const$, tworzących w obszarze filtracji siatkę hydrodynamiczną przepływu. Korzystając z własności funkcji prądu Ψ , możemy określić wydatek pomiędzy dowolnie wybranymi z obszaru filtracji liniami prądu.

Sposób rozwiązania zobrazujemy na przykładach konkretnych zagadnień brzegowych. Przedstawiona metoda jest łatwym sposobem wykorzystania odwzorowań konforemnych. Dla bliższego wyjaśnienia, czym są rozwiązania oparte na odwzorowaniach konforemnych, weźmy pod rozwagę funkcję analityczną:

$$Z = f(z) , \quad (9.18)$$

którą można wyrazić przy pomocy dwóch funkcji X i Y wzorem:

$$Z = X + iY \quad (9.19)$$

i która jest funkcją zmiennej zespolonej $z = x + iy$. Jeżeli funkcja $f(z)$ jest ciągła i spełnia równania Cauchy – Riemanna, czyli jeżeli:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x},$$

wówczas funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w całej płaszczyźnie zmiennej zespolonej z . Jeżeli dodatkowo założymy, że funkcje X i Y mają ciągłe pierwsze i drugie pochodne cząstkowe, to można wykazać, że są to funkcje harmoniczne czyli, że:

$$\nabla^2 X = 0 \quad \text{oraz} \quad \nabla^2 Y = 0.$$

W pracy [Trajdosz – Wróbla, 1965] przedstawiono dowody dwóch twierdzeń:

Twierdzenie I

Jeżeli w funkcji harmonicznej $u(X, Y)$ wprowadzimy nowe zmienne x, y , względem których zmienne są harmonicznymi sprzężonymi, to funkcja

$$u[X(x, y), Y(x, y)] = u(X, Y)$$

będzie harmoniczna względem nowych zmiennych.

Twierdzenie II

Jeżeli $X(x, y)$ i $Y(x, y)$ są funkcjami harmonicznymi sprzężonymi i w pewnym obszarze ich jacobian $\frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)}$ jest różny od zera, to w tym obszarze funkcje odwrotne $x(X, Y)$ i $y(X, Y)$ są funkcjami harmonicznymi sprzężonymi.

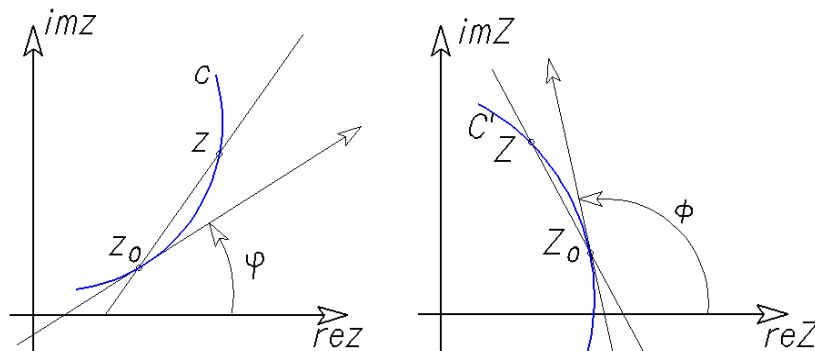
Założmy, że funkcja $Z = f(z)$ jest holomorficzna i posiada pierwszą pochodną różną od zera. Jeżeli jacobian odwzorowania jest różny od zera:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (9.20)$$

z tego wynika, że $J = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 = |f'(z)|^2 \neq 0$, zgodnie z przyjętym założeniem.

W takim przypadku obrazem linii jest linia, a obrazem obszaru – obszar. Niech przez ustalony punkt z_0 przechodzi zadana gładka linia C . Wówczas przez obraz Z_0 tego punktu przechodzi gładki obraz

C' tej linii. Wybierzmy na linii C punkt z bliski z_0 . Obrazem punktu z będzie oczywiście punkt Z na krzywej C' bliski Z_0 . Poprowadźmy przez z_0 i z sieczną linii C oraz przez punkt Z_0 i Z (niebędącą na ogół obrazem siecznej linii C) sieczną linii C' [rys. 41].



Rys. 41 Odwzorowanie funkcji holomorficznej (wg. [Trajdosa – Wróbla, 1967]).

Wiemy z przyjętego założenia, że

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{Z - Z_0}{z - z_0} \neq 0. \quad (9.21)$$

Obliczając argument pochodnej dostajemy:

$$\begin{aligned} \text{Arg} [f'(z_0)] &= \text{Arg} \left[\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{Z - Z_0}{z - z_0} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \text{Arg} (Z - Z_0) - \lim_{z \rightarrow z_0} \text{Arg} (z - z_0) = \Theta - \theta + 2k\pi, \end{aligned} \quad (9.22)$$

gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą. Z tego wynika, że każda krzywa wychodząca z punktu z_0 doznaje obrotu, przy odwzorowaniu za pomocą funkcji holomorficznej, o kąt równy $\text{Arg} [f'(z_0)]$. W pracy udowodniono twierdzenie o kącie względnym pomiędzy dwoma liniami o treści:

Twierdzenie III

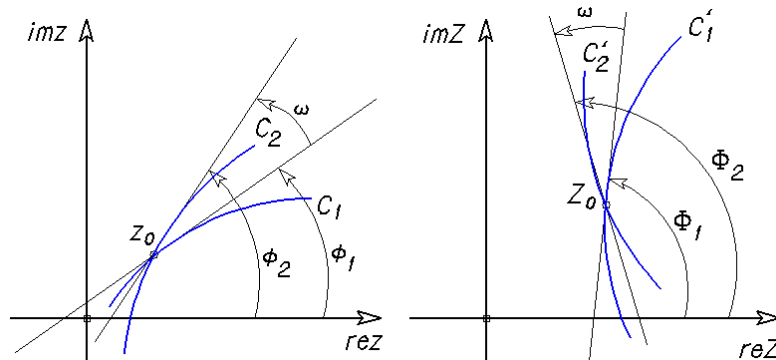
Kąt względny pomiędzy dwoma liniami w danym punkcie nie ulega zmianie przy odwzorowaniu za pomocą funkcji holomorficznej o pochodnej w tym punkcie różnej od zera.

Rozpatrzmy dwie krzywe C_1 i C_2 na płaszczyźnie z oraz odpowiadające im obrazy C_1' i C_2' przedstawione na rys. 42 Zgodnie z oznaczeniami na rys. 42 i uwzględniając poprzednie rozważania – wzór (9.22) możemy zapisać:

$$\omega = \Theta_1 - \theta_1 = \Theta_2 - \theta_2. \quad (9.23)$$

Powyższa równość zachodzi z dokładnością do wielokrotności kąta 2π .

Odwzorowanie zachowujące względne kąty nazywamy **odwzorowaniem konforemnym**. Każda funkcja holomorficzna o pochodnej różnej od zera określa przekształcenie konforemne. Jeżeli w przekształceniu konforemnym kąty nie ulegają zmianie, a długości zmieniają się proporcjonalnie do modułu pochodnej, to pola zmieniają się proporcjonalnie do kwadratu modułu pochodnej, co wynika bezpośrednio z definicji jacobianu(9.20) przekształcenia konforemnego.



Rys. 42 Idea odwzorowań konforemnych (wg. [Trajdosa – Wróbla, 1967]).

Dwa podstawowe zagadnienia teorii odwzorowań konforemnych to:

- znalezienie obrazu danego zbioru (linii, obszaru) przy zadanym odwzorowaniu konforemnym,
- znalezienie odwzorowania konforemnego, które danemu obszarowi przypisuje określony obraz, będący również obszarem.

Drugie z zagadnień jest bardziej skomplikowane i nie zawsze potrafimy je rozwiązać. O jego rozwiązalności świadczy jednakże twierdzenie Riemanna, będące jednym z podstawowych twierdzeń teorii odwzorowań konforemnych.

Twierdzenie Riemanna.

Każde dwa jednospójne obszary, których brzozy składają się więcej niż z jednego punktu, można na siebie odwzorować konforemnie.

Twierdzenie Riemanna, jak to pokazał [Trajdosa Wróbel, 1967], zawiera jednakże jedno istotne założenie o jednospójności obu obszarów, wynikające z tego, że odwzorowanie konforemne jest rodzajem odwzorowania topologicznego, przy którym zachowuje się rodzaj spójności obszaru.

Jeśli każdej wartości zmiennej zespolonej z przyporządkujemy jedną wartość funkcji Ω :

$$\Omega = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$$

oraz założymy, że istnieje taka funkcja $f(z)$, posiadająca pierwszą pochodną po z , taką, że:

$$\Omega = f(z), \tag{9.24}$$

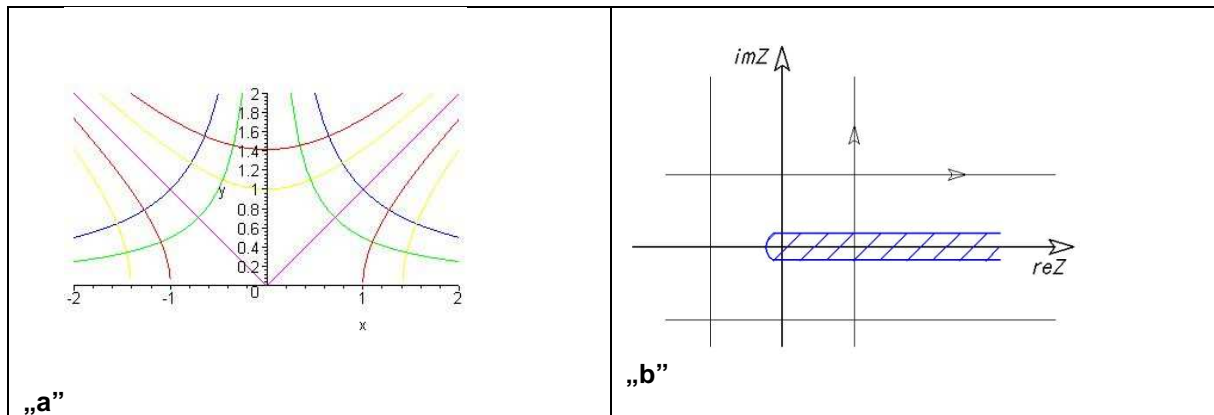
to możemy stwierdzić, że Ω jest funkcją zmiennej zespolonej z , co można zapisać w postaci wzoru (9.24). Można więc stwierdzić, że funkcja ta przyporządkowuje punktom płaszczyzny $z = x + iy$ punkty płaszczyzny $\Omega = \Phi + i\Psi$ (rys. 7.33). Możemy, więc wysnuć wniosek, że funkcja $f(z)$ odwzorowuje płaszczyznę zmiennej z na płaszczyznę zmiennej Ω i jest funkcją holomorficzną. Przyjmijmy dla przykładu:

$$\Phi = x^2 - y^2 \quad \text{oraz} \quad \Psi = 2xy. \tag{9.25}$$

Podobnie jak w przypadku płaszczyzny zmiennej zespolonej z na płaszczyźnie Ω , proste $\Phi = C$ i $\Psi = C_1$ przecinają się pod kątem prostym. Wynika stąd bezpośrednio, że odwzorowanie $f(z)$ zachowuje kąty. A właśnie takie odwzorowanie, które zachowuje kąty, co pokazaliśmy powyżej, nazywamy **odwzorowaniem konforemnym**.

„a”

„b”

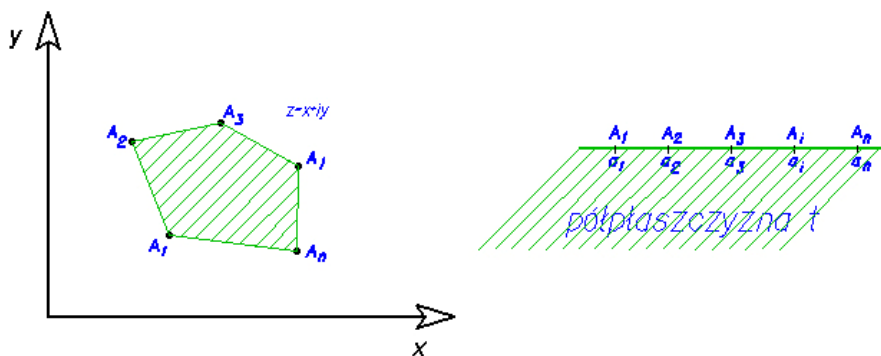


Rys. 43 Siatka hydrodynamiczna przepływu na płaszczyźnie $z=x+iy$ („a”) i na płaszczyźnie $Z = X + iY$ („b”).

Krzywe $Z(x, y) = C_i$ oraz $Y(x, y) = C'_i$ (rys. 43) na płaszczyźnie $z = x + iy$ będziemy nazywać poziomiami odwzorowania konforemne.

W przypadku zagadnień bardziej złożonych płaskiego przepływu teorii filtracji wód podziemnych mamy do czynienia z sytuacją, gdy znany jest obszar filtracji oraz wartości funkcji Φ i Ψ na jego brzegu, natomiast nie znamy funkcji realizującej odwzorowanie konforemne wewnątrz obszaru, mamy więc do czynienia z zagadnieniem trudniejszym. Tego typu problem pozwala nam rozwiązać teoria przekształceń konforemnych oparta na wzorze Christoffela – Schwarz. Wzór ten pozwala wg. [Połubarinovej-Kocziny, 1977] określić funkcje realizujące przekształcenie konforemne na obszary wielokątne, jeżeli przyjmiemy, że na płaszczyźnie $z=x+iy$ jest określony wielokąt o wierzchołkach M_i (M_1, M_2, \dots, M_n) (rys. 7.34). Kąty odpowiadające poszczególnym wierzchołkom tego wielokąta oznaczmy α_i , a przez a_i będziemy oznaczać współrzędne rzeczywiste tych wierzchołków. Jeżeli, przez t określimy zmienną całkowania (zmienna zespolona), to wzór Christoffela – Schwarz realizujący odwzorowanie konforemne można przedstawić w postaci:

$$z = M \int_0^t \frac{dt}{(t-a_1)^{1-\frac{\alpha_1}{\pi}} (t-a_2)^{1-\frac{\alpha_2}{\pi}} \dots (t-a_n)^{1-\frac{\alpha_n}{\pi}}} + N. \quad (9.26)$$



Rys. 44 Schemat do wzoru Christoffela – Schwarz.

Kąty α_i odpowiadające określonym punktom A_i we wzorze (9.26) odczytujemy z wielokąta na rys. 44. Wielkości stałych odpowiadające części rzeczywistej zmiennej $t - a_i$ są stałymi rzeczywistymi. Wartość tych stałych po uwzględnieniu stałej całkowania N odpowiadają długości boków wielokąta o wierzchołkach A_i . Stałe M i N są stałymi wyrażonymi przez liczby zespolone. Stosując wzór (9.26) należy mieć na uwadze zgodnie z pracą [Rembezy, 1998] kilka jego właściwości:

1. człon we wzorze Christoffela – Schwarza, który zawiera stałą $a_k = \infty$, jest w nim pomijany,
2. trzy stałe a_i mogą mieć wartość dowolną. Wynika to z twierdzenia Riemanna o jednoznaczności odwzorowań konforemnych. Zazwyczaj przyjmuje się wartość tych stałych równą $0, 1, \infty$.

Praktyczne wykorzystanie wzoru Christoffela - Schwarza znaleźć można w pracach [Połubarinovej-Kocziny, 1977], [Aravina i innych, 1953], [Castany'ego, 1967], [Rembezy, 1998] i wielu innych. Bardzo istotnym elementem budowania rozwiązań brzegowych jest stosowanie metody superpozycji rozwiązań zagadnień prostszych przy analizowaniu zagadnień bardziej skomplikowanych. Generalnie można stwierdzić, że jeżeli $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ są potencjałami zespolonymi określającymi przepływy proste, to potencjał Ω będący sumą tych potencjałów przepływów prostych jest, zgodnie z pracą [Rembezy, 1998], potencjałem odpowiadającym przepływowi złożonemu w postaci:

$$\Omega = c_1\Omega_1 + c_2\Omega_2 + c_3\Omega_3 + \dots c_n\Omega_n, \quad (9.27)$$

przy czym $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ są stałymi.