Modelowanie przepływu cieczy przez ośrodki porowate
Wykład III

6 Ogólne zasady rozwiązywania równań hydrodynamicznego modelu przepływu.

Metody rozwiązania równania Laplace'a.

Wprowadzenie wielkości potencjału prędkości przepływu zbliża rozważanie przepływu do ogólnej teorii pola potencjalnego, co pozwala na wykorzystanie szeregu zagadnień brzegowych rozwiązanych przez badaczy w zakresie teorii pola. Należy podkreślić, że ogólna teoria pola potencjalnego obejmuje teorie dotyczące na przykład pola elektrycznego czy magnetycznego. Rozważmy na początku metody rozwiązywania równania przepływu cieczy nieściśliwej przez nieściśliwy szkielet ośrodka porowatego

Równanie ruchu cieczy przez ośrodek porowaty jest równaniem różniczkowym cząstkowym drugiego rzędu zwanym równaniem Laplace'a. Jest to równanie zaliczające się do grupy równań eliptycznych. W ogólnym przypadku równanie Laplace'a jest szczególnym przypadkiem równania Helmholtza:

$$\nabla^2\Phi + c\Phi = 0\,, \tag{3.1}$$

gdy stała $c = 0$

W pracy [Trajdosa-Wróbla, 1965] zostały przedstawione szczegółowo własności tego typu równań, twierdzenia oraz dowody jednoznaczności rozwiązań. Aby zrozumieć dalszy ciąg rozważań prowadzących do rozwiązania konkretnych zagadnień brzegowych konieczne jest zapoznanie się z teorią rozwiązywania równania Laplace'a. Z teorii tej dowiadujemy się przede wszystkim, że funkcję ciągłą w obszarze, spełniającą równanie Laplace'a nazywamy funkcją harmoniczną. Można wykazać, że funkcja harmoniczna w obszarze jest w tym obszarze funkcją klasy C^2, tzn. że w każdym punkcie obszaru ma ciągłe drugie pochodne.

Przykładem funkcji harmonicznej w przestrzeni trójwymiarowej w układzie prostokątnym kartezjańskim jest funkcja liniowa

$$\Phi(x,y,z) = Ax + By + Cz + D\,. \tag{3.2}$$

Ogromne jest bogactwo rozwiązań równania Laplace'a. Mają one tę interesującą własność, że można je otrzymać, dokonując pewnych działań nad pewnym rozwiązaniem, zwanym rozwiązaniem podstawowym.

Z analizy wektorowej wiadomo, że Laplasjan funkcji w trójwymiarowej przestrzeni można przedstawić w układzie sferycznym (biegunowym przestrzennym) w sposób następujący:

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)\right)\right]. \tag{3.3}$$

Skorzystajmy z tożsamości, którą można bezpośrednio uzyskać przez wykonanie działań w obu jej stronach:

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)\right] = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\Phi)}{\partial r^2}\,. \tag{3.4}$$

Poszukajmy rozwiązania równania Laplace'a, zależnego od zmiennych r, φ, θ. W przypadku zagadnień osiowo symetrycznych pochodna cząstkowa szukanej funkcji Φ względem zmiennej *r* stanie się pochodną zwyczajną, zaś pozostałe pochodne cząstkowe będą równe zeru.
Korzystając z zależności (3.3) i (3.4) równanie $\nabla^2\Phi = 0$ zapiszemy w postaci:

$$\frac{1}{r}\frac{d^2\Phi(r\Phi)}{dr^2}=0. \tag{3.5}$$

Całkowanie prowadzi kolejno do:

$$\frac{d(r\Phi)}{dr}=C_1, \tag{3.6}$$

$$r\Phi=C_1r+C_2. \tag{3.7}$$

Całką ogólną (przy założeniu, że $r \neq 0$) jest

$$\Phi(r)=C_1+\frac{C_2}{r}. \tag{3.8}$$

Kładąc $C_1=0$ i $C_2=1$ otrzymujemy rozwiązanie podstawowe równania Laplace'a w przestrzeni

$$\Phi(r)=\frac{1}{r} \qquad (r\neq 0). \tag{3.9}$$

Gdybyśmy wprowadzili układ biegunowy, w którym punktowi 0 odpowiadałby dowolnie ustalony punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ prostokątnego układu kartezjańskiego, uzyskalibyśmy rozwiązanie (3.9) z tym, że r jako odległość zmiennego punktu $P=P(x,y,z)$ od punktu P_0 wyraziłaby się związkiem:

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}. \tag{3.10}$$

Poszukujemy rozwiązania podstawowego równania Laplace'a dla przypadku płaskiego. W układzie biegunowym na płaszczyźnie Laplasjan daje się zapisać w postaci:

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\Phi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)\right]. \tag{3.11}$$

Wobec tego rozwiązanie równania Laplace'a, zależne tylko od *r*, znajdziemy całkując równanie różniczkowe:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Phi}{dr}\right)=0 \qquad (r\neq 0). \tag{3.12}$$

Mamy kolejno

$$r\frac{d\Phi}{dr}=C, \tag{3.13}$$

$$\Phi(r)=C_1+C_2\ln r. \tag{3.14}$$

Kładąc $C_1=0$ i $C_2=-1$ otrzymujemy rozwiązanie równania Laplace'a na płaszczyznach, które nazywać będziemy rozwiązaniami podstawowymi:

$$\Phi(r) = \ln\frac{1}{r} \qquad (r \neq 0). \tag{3.15}$$

Ponieważ rozwiązaniem równania Laplace'a jest funkcja harmoniczna powinniśmy znać kilka podstawowych własności funkcji harmonicznych w przestrzeni:

- całka pochodnej normalnej funkcji $\Phi(P)$ harmonicznej w obszarze Ω, a ciągłej w jego domknięciu $\bar{\Omega} = \Omega + S$ brana po brzegu obszaru jest równa zeru

$$\oiint_S \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS = 0, \tag{3.16}$$

- funkcja harmoniczna w każdym punkcie obszaru przybiera wartość równą średniej arytmetycznej swoich wartości na każdej sferze, leżącej w obszarze o środku w tym punkcie i o dowolnym promieniu

$$\Phi(P) = \frac{1}{4\pi R^2} \oiint_{K(P,R)} \Phi dS, \tag{3.17}$$

- funkcja harmoniczna niestała w obszarze w żadnym punkcie obszaru nie osiąga swego kresu górnego ani dolnego (zasada ekstremum),
- funkcja harmoniczna w obszarze Ω, a ciągła w jego domknięciu $\bar{\Omega} = \Omega + S$ jest ograniczona swoimi ekstremalnymi wartościami.

Metodyka rozwiązywania równania Fouriera.

Równanie Fouriera różni się tym od równania Laplace'a, że w równaniu tym oprócz operatora Laplace'a występuje pierwsza pochodna po czasie funkcji poszukiwanego rozwiązania.

W praktyce, w celu rozwiązania metodami analitycznymi tego równania stosujemy najczęściej przekształcenie całkowe Laplace'a, które umożliwia nam pozbycie się pochodnej po czasie, a zagadnienie po przejściu do przestrzeni Laplace'a sprowadza się do rozwiązania równania Helmholtza. Równanie to, jak pokazaliśmy w poprzednim podrozdziale rozwiązuje się metodami omówionym wyżej. Szczegółowy opis tych metod znajdzie czytelnik w pracy [Trajdosa-Wróbla, 1965].

Jedyna istotna różnica polega na określeniu w tym przypadku warunków początkowych obok warunków brzegowych.

7 Warunki brzegowe i początkowe w modelach hydrodynamicznego przepływu.

Warunki brzegowe.

Zagadnieniami brzegowymi teorii przepływu filtracyjnego określonej równaniem Laplace'a, lub Helmholtza nazywają się zagadnienia poszukiwania w obszarze przepływu takiej funkcji, która spełnia pewne warunki na brzegu obszaru.

Są trzy takie zagadnienia:

- **Zagadnienia Dirichleta.**

  Polega ono na poszukiwaniu funkcji harmonicznej potencjału prędkości $\Phi(p)$ w ograniczonym obszarze Ω i ciągłej w $\Omega + S$, która na brzegu S przybiera z góry dane wartości funkcji potencjału prędkości:

$$\Phi(Q) = f(Q) \quad (Q \in S) \tag{3.18}$$

  Funkcja f(Q) nazywa się obłożeniem zagadnienia Dirichleta i która z założenia powinna być ciągła na brzegu S. Można wykazać, że rozwiązanie wewnętrznego zagadnienia Dirichleta jest stateczne, tzn. zależy w sposób ciągły od obłożenia.

Warunki brzegowe typu Dirichleta określają w przypadku zagadnień przepływu filtracyjnego następujące rodzaje granic:

- brzeg przepuszczalny, na którym istnieje granica oddzielająca wody podziemne z wodami powierzchniowymi (rowy, zbiorniki wodne itd.)
- zwierciadło swobodne wód gruntowych
- kontakt na brzegu dwóch rodzajów cieczy np. woda słodka i morska
- brzeg, na którym występuje wysączanie wody w przypadku, gdy następuje ono powyżej poziomu wód powierzchniowych

- **Zagadnienia Neumanna**.

Polega ono na znalezieniu funkcji harmonicznej potencjału prędkości $\Phi(P)$ w obszarze Ω i ciągłej w $\Omega + S$, której pochodna normalna na brzegu S przybiera z góry dane wartości

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}\Big|_S = f(Q) \qquad (Q \in S). \tag{3.19}$$

Funkcja f(Q) jest z założenia ciągła, a ponadto – zgodnie z własnością funkcji harmonicznych (3.17) - spełniona jest dla niej następująca równość:

$$\oiint_S f(Q)ds = 0. \tag{3.20}$$

Można ponadto pokazać, że gdy istnieją dla danego obszaru i danej funkcji brzegowej dwa rozwiązania zagadnienia Neumanna, to w obszarze $\Omega + S$ różnią się od siebie stałą.

Warunki brzegowe typu Neumanna modelują następujące typy granic:

- brzeg nieprzepuszczalny, gdy f(Q)=0, gdyż w tym przypadku wydatek przepływający przez granicę jest równy zeru.
- granica stanowiąca kontakt dwóch obszarów o różnej przepuszczalności
- zasilanie obszaru o określonej wydajności (znany jest wydatek wpływającej do obszaru cieczy)
- infiltracja lub parowanie.

- **Zagadnienie mieszane.**

Polega ono na znalezieniu funkcji harmonicznej $\Phi(P)$ w obszarze Ω i ciągłej $\Omega + S$, której kombinacja liniowa wraz z pochodną normalną:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} + \alpha(Q)\Phi = f(Q) \qquad (Q \in S) \tag{3.21}$$

na brzegu jest zadana.

Zakłada się przy tym, że funkcja F(Q) jest ciągła, zaś $\alpha(Q)$ jest ciągła nieujemnie i nierówna tożsamościowo zeru (wówczas zagadnienia Neumanna i Dirichleta nie są szczególnymi przypadkami tego zagadnienia. Można wykazać, że dla danego obszaru Ω i dla danej kombinacji liniowej istnieje jedno i tylko jedno rozwiązanie.

Warunki tego typu określają następujące typy granic:

- źródła, gdy ich wydatek zależy od położenia zwierciadła wód gruntowych,
- parowanie lub infiltracja, gdy wydatek zależy od poziomu zalegania zwierciadła wód podziemnych,
- granica modelująca przepływ w przypadku konstrukcji typu ścianki szczelne, dreny uszczelniające fundamenty budowli,
- granica stanowiąca kontakt dwóch obszarów, gdy przepływający wydatek jest funkcją wysokości hydraulicznej.

W rzeczywistości może zaistnieć sytuacja, że brzeg ograniczający obszar Ω zostaje podzielony na obszary powierzchniowe, gdzie spełniony musi być jeden z wyżej wymienionych warunków brzegowych.

Warunki początkowe.

Jeżeli wyjściowy układ równań różniczkowych lub określone równanie zawiera pierwsze, albo wyższe pochodne po czasie, to należy podać wartości rozważanych funkcji i ich pochodnych, ale o rząd niższy od najwyższego rzędu pochodnej po czasie w chwili t=0. W naszym rozważamy przypadku chodzi jedynie o początkowe wartości funkcji w chwili t=+0.

Szereg badaczy rozwiązujących na drodze analitycznej przedstawione powyżej równanie Przy zastosowaniu do rozwiązania zagadnienia transformację całkową Laplace'a przyjmuje, że w chwili t=+0 poszukiwane funkcje równają się zeru w całym obszarze. Otrzymane przez tych badaczy wyniki nie spełniają warunku początkowego. Stwierdzają oni, ze różnica pomiędzy uzyskanym rozwiązaniem przy przejściu granicznym z czasem do zera a przyjętym warunkiem początkowym świadczy o występowaniu tzw. efektów natychmiastowych w chwili t=+0. Zagadnieniem niezgodności przyjętych warunków początkowych z wartościami poszukiwanych funkcji w zerze w przypadku równań parabolicznych zajmował się G. Doetsch [ ].