Modelowanie przepływu cieczy przez ośrodki porowate

Wykład II

2. Równania ruchu cieczy.

Za punkt wyjścia do określenia równań ruchu lepkiej cieczy Newtonowskiej przez pory ciała stałego przyjmujemy drugie prawo Newtona.
Oznaczając przez $\vec{o}$ siły działające w cieczy odniesione do jednostki objętości (gęstość działających sił) **drugie prawo Newtona** możemy w kartezjańskim układzie współrzędnych x,y,z przedstawić wzorem:

$$o_x = \rho \frac{\partial v_{nx}}{\partial t},\quad o_y = \rho \frac{\partial v_{ny}}{\partial t},\quad o_z = \rho \frac{\partial v_{nz}}{\partial t}, \tag{2.1}$$

gdzie: $\vec{v}_n$ określa wektor rzeczywistej (w sensie średniej) prędkości przepływającej cieczy i posiada składowe v_{nx}, v_{ny}, v_{nz}.

Prędkość v_n można przy założeniu, że porowatość powierzchniowa f_A jest w przybliżeniu równa porowatości objętościowej f, powiązać z prędkością filtracji $\vec{v}$ następującym związkiem:

$$\vec{v}_n = \frac{1}{f}\vec{v}. \tag{2.2}$$

Korzystając z powyższego związku równania (2.1) można zapisać inaczej:

$$o_x = \rho \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v_x}{f}\right),\quad o_y = \rho \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v_y}{f}\right),\quad o_z = \rho \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v_z}{f}\right). \tag{2.3}$$

Gęstość siły $\vec{o}$ jest sumą sił, których źródło wynika z działania ciśnienia *p*, zwanym często ciśnieniem porowym, energii potencjalnej płynącej cieczy oraz siły lepkości (lepkiego oporu przepływu).
Oznaczając:
składowe siły lepkości (oporu przepływu) –

$$\rho\vec{o}_{lep} \text{ przez } \rho o_{lepx}, \rho o_{lepy}, \rho o_{lepz},$$

składowe gęstości sił ciężkości (obliczone z energii potencjalnej przepływu) –

$$\rho\frac{\partial u}{\partial x}, \rho\frac{\partial u}{\partial y}, \rho\frac{\partial u}{\partial z},$$

gdzie $u = gz$ oraz składowe gęstości sił pochodzących od ciśnienia –

$$\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Stąd $\vec{o}$ można zapisać wzorem:

$$\begin{aligned}
\vec{o}_x &= -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho \frac{\partial u}{\partial x} - \rho o_{lepx}, \\
\vec{o}_y &= -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho \frac{\partial u}{\partial y} - \rho o_{lepy}, \\
\vec{o}_z &= -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho \frac{\partial u}{\partial z} - \rho o_{lepz}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Znak minus wynika z faktu, że gęstość siły $\vec{o}$ jest siłą bezwładności, a więc siłą przeciwnie skierowaną do akcji, jakimi są siły znajdujące się po prawej stronie równań (2.4). W rezultacie drugie prawo Newtona w odniesieniu do składowych sił w kierunkach *x*, *y*, *z* można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v_x}{f}\right) &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} + o_{lepx}, \\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v_y}{f}\right) &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} + o_{lepy}, \\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v_z}{f}\right) &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} + o_{lepz}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Powyższe równania przy użyciu zapisu wskaźnikowego **Einsteina** mają postać:

$$\frac{1}{f}\frac{\partial v_i^f}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} - g\left(x_i \delta_{i3}\right),_i + o_{lep\,i}, \tag{2.6}$$

gdzie porównując wyrażenia (2.5) i (2.6) otrzymujemy:

$o_{lep\,i}$ - oznacza składowe siły tarcia lepkiego

$u_i = g x_i \delta_{i3}$ - oznacza składowe siły masowej ciężkości cieczy.

Dla cieczy Newtona opór lepki jest proporcjonalny do prędkości filtracji, lecz odwrotnie do niej skierowany i wyraża się wzorem:

$$o_{lep\,i} = -c v_i, \tag{2.7}$$

gdzie c jest współczynnikiem oporu lepkiego przepływajacej cieczy.

Wprowadźmy prędkość $\vec{s}$ związaną z prędkością $\vec{v}$ związkiem:

$$\vec{s} = \vec{v} - \lambda \vec{K}, \tag{2.8}$$

przy czym wektor $\vec{K}$ w związku (2.8) wyraża się wzorem:

$$\vec{K} = grad\left(\frac{1}{\rho} p + g x_i \delta_{i3}\right), \tag{2.9}$$

a $\lambda = 1/c$.

Pochodna cząstkowa po czasie wektora $\vec{s}$ równa się:

$$\frac{\partial \vec{s}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \lambda \frac{\partial \vec{K}}{\partial t}. \tag{2.10}$$

Podstawiając (2.8) do (2.6), po uwzględnieniu związku (2.7) możemy zapisać:

$$\frac{1}{f}\frac{\partial \vec{s}}{\partial t} + \frac{\lambda}{f}\frac{\partial \vec{K}}{\partial t} = \vec{K} - \frac{1}{\lambda}\left[\vec{s} + \lambda \vec{K}\right]. \tag{2.11}$$

Jeżeli prędkości zmiany gradientu ciśnienia jest mała w porównaniu z pozostałymi wielkościami w równaniu (2.11) (zagadnienia quasi – statyczne) to możemy przyjąć, że:

$$\frac{\lambda}{f}\frac{\partial \vec{K}}{\partial t} = 0$$

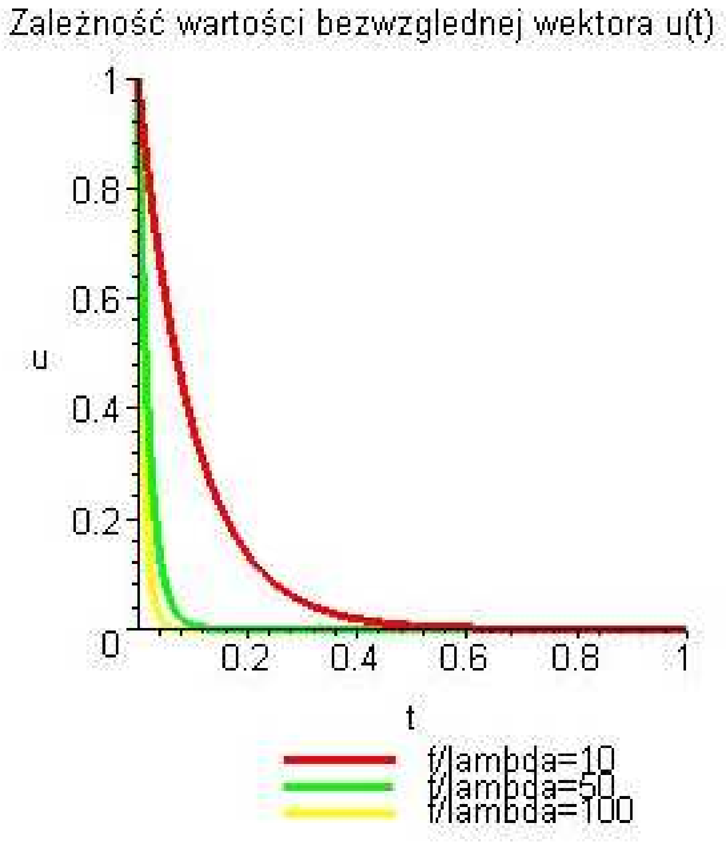
i równanie (2.11) sprowadza się do postaci:

$$\frac{1}{f}\frac{\partial \vec{s}}{\partial t} = -\frac{1}{\lambda}\vec{s}. \tag{2.12}$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja:

$$\vec{s} = \vec{s}_0 e^{-\frac{f}{\lambda}t}. \tag{2.13}$$

Jak widać to na rys. 4 im większe opory tarcia lepkiego w przypadku przepływu laminarnego cieczy przez ośrodek porowaty, tym szybciej wartość bezwzględna wektora $\vec{s}$ osiąga wartość bliską zeru.



Rys. 4 Przebieg funkcji $\left|\vec{s}\,(t)\right|$ w czasie dla wartości $f\,/\,\lambda$ =10;50;100.

Można więc stwierdzić, że dla odpowiednio dużych wielkości oporu lepkiego po bardzo krótkim czasie (mniejszym niż 1 sekunda) dostajemy związek liniowy:

$$\vec{v} = \lambda \vec{K} \ , \tag{2.14}$$

co można zapisać inaczej w postaci:

$$\vec{v} = -\frac{g}{c} grad\left(\frac{p}{\rho g} + x_i \delta_{i3}\right) \ . \tag{2.15}$$

Z poprzednich rozważań (Rozdział III.1) wiemy, że wysokość hydrauliczna z pominięciem, ze względu na jej mała wielkość, energii kinetycznej przepływającej cieczy wyraża się wzorem:

$$H = \frac{p}{\rho g} + x_i \delta_{i3} \, . \tag{2.16}$$

Wprowadzając ponadto w miejsce g/c wielkość k oznaczającą współczynnik filtracji k, dostajemy **prawo Darcy'ego** dla przypadku ośrodka jednorodnego i izotropowego:

$$\vec{v} = -k grad H \ . \tag{2.17}$$

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dla przypadku ośrodka anizotropowego równanie (2.17) przyjmie postać:

$$v_i = k_{ij} H,_j , \tag{2.18}$$

gdzie k_{ij} jest tensorem przepuszczalności o 9 współczynnikach przepuszczalności wyrażony wzorem:

$$k_{ij} = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix} , \tag{2.19}$$

przy czym ze względu na symetrię tensora wystepuje tylko 6 możliwych różnych wielkości współczynników przepuszczalności. Najczęściej w przypadku ośrodków anizotropowych mamy do czynienia z tensorem przepuszczalności, który posiada jedynie wartości różne od zera na głównej przekątnej:

$$k_{ij} = \begin{vmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{vmatrix} . \tag{2.20}$$

Uzyskaliśmy tą drogą równania ruchu zgodne z prawem Darcy'ego. W dalszych rozważaniach będziemy stosować bardziej ogólny sposób dochodzenia do podstawowych związków fizycznych modelu. Prowadzą one do identycznych rezultatów, jednak są nieco bardziej złożone pod względem aparatu matematycznego. Z tego względu zdecydowaliśmy się na przedstawienie obydwu dróg dochodzenia do równań modelu.

Powyższe rozważania prowadzą również do wniosku, że podczas przepływu filtracyjnego cieczy przez ośrodek porowaty występuje siła oporów lepkich, która determinuje prędkość przepływu filtracyjnego, ale również oddziaływuje na szkielet ośrodka porowatego, przy czym ma w tym przypadku zwrot przeciwny i wynosi:

$$\vec{R} = \frac{g}{k} \vec{v} . \tag{2.21}$$

Siłę $\vec{R}$ wyrażoną związkiem (2.21) będziemy nazywali **siłą unoszenia filtracji**. Siła ta ma duży wpływ na odkształcenia postaciowe szkieletu gruntowego, a także na stany graniczne ośrodka porowatego.

3 Równania hydrodynamiki wód podziemnych dla przypadku przepływu cieczy nieściśliwej przez nieodkształcalny ośrodek porowaty.

Zakładając, że ośrodek gruntowy jest ciałem idealnie sztywnym, a ciecz przepływająca przez siatkę kanalików filtracyjnych jest nieściśliwa, układ równań opisujący proces przepływu laminarnego sprowadza się do:

- równania stanu:

$$\rho = const , \tag{2.22}$$

- równania ciągłości przepływu

$$\frac{\partial(v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(v_z)}{\partial z} = 0 , \tag{2.23}$$

które można zapisać inaczej w postaci:

$$div\vec{v} = 0 . \tag{2.24}$$

- o równań ruchu

$$v_x = -k_x \frac{\partial H}{\partial x} ,$$
$$v_y = -k_y \frac{\partial H}{\partial y} , \tag{2.25}$$
$$v_z = -k_z \frac{\partial H}{\partial z} .$$

W olbrzymiej większości przypadków rozważamy zagadnienia ośrodka izotropowego. Dla tego przypadku mamy:

$$k_x = k_y = k_z = k . \tag{2.26}$$

Równanie ruchu cieczy można zapisać inaczej:

$$\vec{v} = -kgradH . \tag{2.27}$$

Podstawiając równania ruchu (2.27) do równania ciągłości przepływu (2.23) dostajemy równanie różniczkowe opisujące proces przepływu cieczy nieściśliwej przez jednorodny, izotropowy, nieodkształcalny ośrodek porowaty w postaci:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0 , \tag{2.28}$$

co można zapisać inaczej:

$$\nabla^2 H = 0 . \tag{2.29}$$

W dalszych rozważaniach istotne wydaje się wprowadzenie nowej wielkości określanej mianem potencjału prędkości przepływu i wyrażanej związkiem:

$$\Phi = -kH . \tag{2.30}$$

Równanie (2.28) przyjmuje w tym przypadku postać:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{2.31}$$

lub

$$\nabla^2 \Phi = 0 . \tag{2.32}$$

natomiast równania ruchu sprowadzają się do:

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} ,$$

$$v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \tag{2.33}$$
$$v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

lub

$$\vec{v} = gr\vec{a}d\Phi. \tag{2.34}$$

Wyprowadzone równania (2.32) i (2.34) pozwalają na rozwiązanie zagadnień przepływu ustalonego cieczy nieściśliwej przez nieodkształcalny ośrodek porowaty przy założeniu jednorodności i izotropowości ośrodka.

4 Równanie hydrodynamiki wód podziemnych dla przypadku przepływu cieczy ściśliwej z uwzględnieniem ściśliwości szkieletu gruntowego.

Powróćmy do równania ciągłości przepływu uwzględniającego efekty ściśliwości cieczy i fazy stałej ośrodka porowatego:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = -\frac{\partial(\rho f)}{\partial t}. \tag{2.35}$$

Pochodną cząstkową po czasie możemy zapisać inaczej:

$$\frac{\partial(\rho f)}{\partial t} = \rho\frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{2.36}$$

Zgodnie z równaniami stanu oraz uwzględniając, że

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \rho g\frac{\partial H}{\partial t}, \tag{2.37}$$

otrzymamy:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho\beta_w\frac{\partial p}{\partial t} = \rho^2 g\beta_s\frac{\partial H}{\partial t} \tag{2.38}$$

oraz

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \beta_s\frac{\partial p}{\partial t} = \rho g\beta_s\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{2.39}$$

Związek (2.37) można przedstawić, zatem:

$$\frac{\partial(\rho f)}{\partial t} = \rho^2 g\beta_s\frac{\partial H}{\partial t} + f\rho^2 g\beta_w\frac{\partial H}{\partial t}, \tag{2.40}$$

czyli

$$\frac{\partial(\rho f)}{\partial t} = \rho\eta_{spr}\frac{\partial H}{\partial t}, \tag{2.41}$$

gdzie

$$\eta_{spr} = \rho g\left(\beta_s + f\beta_w\right). \tag{2.42}$$

Współczynnik η_{spr} określany jest nazywany **współczynnikiem pojemności sprężystej warstwy wodonośnej.**

Wielkość η_{spr} jest wielkością małą i jego wartość waha się w przedziale $10^{-6} \div 10^{-5}\left[\frac{1}{m}\right]$.
Równanie ciągłości przepływu można zapisać w formie:

$$\frac{\partial\left(\rho v_x\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\rho v_y\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\rho v_z\right)}{\partial z} = -\rho\eta_{spr}\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{2.43}$$

Uwzględniając, że zmiany gęstości cieczy w zależności od zmiennych przestrzennych *x*, *y*, *z* są małe, można przyjąć, że nie zależą od tych zmiennych niezależnych. Równanie (4.151) uprości się wówczas do postaci:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\eta_{spr}\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{2.44}$$

Uwzględniając równania ruchu dla przypadku ośrodka izotropowego w postaci:

$$\begin{aligned} v_x &= -k\frac{\partial H}{\partial x}, \\ v_y &= -k\frac{\partial H}{\partial y}, \\ v_z &= -k\frac{\partial H}{\partial z}. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Równanie (2.44) można przedstawić w następującej formie:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \frac{\eta_{spr}}{k}\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{2.46}$$

Ostatecznie równanie opisujące proces przepływu cieczy ściśliwej przez ściśliwy ośrodek porowaty można zapisać:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial H}{\partial t}, \tag{2.47}$$

gdzie

$$a = \frac{k}{\eta_{spr}} = \frac{k}{\rho g\left(\beta_s + f\beta_w\right)}. \tag{2.48}$$

Współczynnik a nosi nazwę **współczynnika piezoprzewodności**.

Równanie (2.47) jest różniczkowym równaniem filtracji nieustalonej w ośrodku jednorodnym i izotropowym przy sprężystym reżimie przepływu filtracji i nosi nazwę równania przewodnictwa Fouriera. Postać tego równania jest analogiczna do równania przewodności cieplnej.

W przypadku przepływu pod ciśnieniem dla warstwy o miąższości *M* równanie (2.47) przedstawiane jest w innej postaci. Pomnóżmy licznik i mianownik członu równania znajdującego się po prawej stronie równania (2.47) przez M (średnią miąższość warstwy wodonośnej).
Możemy zapisać:

$$\frac{M}{aM}\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{M\eta_{spr}}{kM}\frac{\partial H}{\partial t} \tag{2.49}$$

Oznaczając przez:

$T = kM$ - przewodność warstwy

$S = \eta_{spr} M$ - bezwymiarowy współczynnik pojemności wodnej warstwy wodonośnej

równanie (2.47) można przedstawić w postaci:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}=\frac{S}{T}\frac{\partial H}{\partial t} \quad . \tag{2.50}$$

W rozdziale VIII będzie pokazany przykład rozwiązania zagadnień przepływu nieustalonego metodami analitycznymi. Zagadnienia przepływu nieustalonego są rozwiązywane również metodami numerycznymi przy pomocy profesjonalnych programów komputerowych np. [Flac, ModFlow, Mathematica 5, Maple 8].