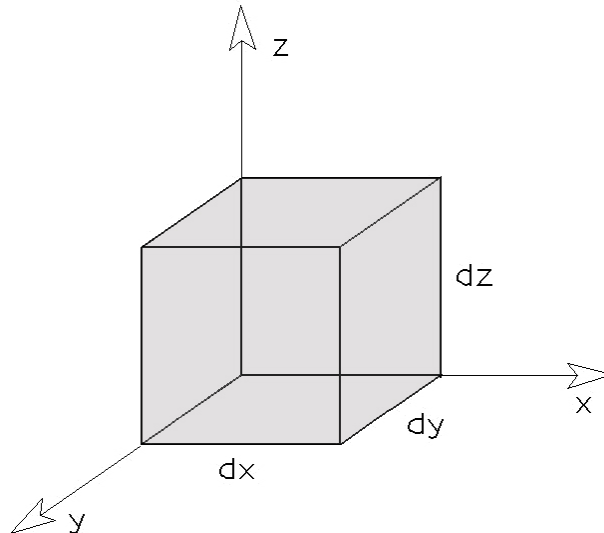


Modelowanie przepływów przez ośrodki porowate

Wykład I

Równania hydrodynamiki wód podziemnych zostały określone przy przyjęciu następujących założeń:

- ośrodek porowaty tworzy strukturę ciała stałego traktowanego jako ośrodek ciągły, wewnątrz której istnieje sieć kanalików filtracyjnych wzajemnie połączonych.
- nie występują pory zamknięte zawierające ciecz lub gaz
- sieć kanalików jest na tyle regularna, że można określić elementarną objętość reprezentatywną VER, która reprezentować będzie wyodrębniony prostopadłościan o nieskończenie małych wymiarach (rys. 4.7.).
- pory ośrodka wypełnione są cieczą.
- proces przepływu cieczy odbywa się w stałej temperaturze (proces izotermiczny).
- na proces filtracji nie ma wpływu pole elektryczne i magnetyczne ziemi
- nie uwzględniamy wpływu potencjału chemicznego.
- ruch cieczy rozpatrujemy obserwując go względem nieruchomego układu odniesienia x_i , a więc w układzie Lagrange'a.



Rys. 4.7. Objętość reprezentatywna VER.

Proces zachowywania się cieczy opisują równania:

- konstytutywne równania stanu
- równania ciągłości przepływu
- równania ruchu cieczy przez ośrodek porowaty.

Jak wykażemy, powyższy układ równań pozwala określić model matematyczny przepływu cieczy przez ośrodek porowaty. Uzyskane równania muszą być uzupełnione przez warunki brzegowe i początkowe.

1. Konstytutywne równania stanu.

Przez pory ośrodka porowatego może przepływać płyn o dużej ściśliwości objętościowej (np. gaz, mieszaniny cieczy i gazu) lub ciecz wykazująca się bardzo małą ściśliwością. Mówimy wtedy o liniowo sprężystym reżimie filtracji. W niniejszym rozdziale ograniczymy się do dwóch przypadków równania stanu: gdy mamy do czynienia z cieczą i ciałem stałym mało ściśliwym lub nieściśliwym.

Dla takiego przypadku panujące w cieczy ciśnienie lub jego przyrost powoduje odkształcenia objętościowe zarówno cieczy jak i skały. Uwzględniając zmiany objętościowe cieczy i szkieletu, mówimy o reżimie sprężystym przepływu filtracyjnego. Gdy pomijamy efekty sprężystości objętościowej, mówimy o tzw. sztywnym reżimie filtracji.

Zakładamy, że faza stała ośrodka nie ulega odkształceniom postaciowym i dopuszczamy w tej fazie rozważań jedynie zmiany objętościowe, wyrażające się zmianą porowatości porowatej matrycy ciała stałego.

Sprężystość objętościową cieczy opisuje **prawo Hooke'a**, według którego względna zmiana gęstości cieczy ρ jest proporcjonalna do zmiany ciśnienia w nim panującego:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \beta_w dp. \quad (1.1)$$

gdzie:

β_w - oznacza współczynnik objętościowej ściśliwości cieczy, definiowany jako względna zmiana objętości cieczy przy zmianie ciśnienia o 1 atm. [100 kPa].

Na przykład:

dla słodkich wód podziemnych można przyjąć:

$$\beta_w = 1.0 \cdot 10^{-5} \frac{1}{at} = 5 \cdot 10^{-10} \frac{1}{Pa},$$

a dla wód zmineralizowanych:

$$\beta_w = (1.0 \cdot 10^{-5} \div 7 \cdot 10^{-8}) \frac{M_i}{\rho g} \frac{1}{at} = (1.0 \cdot 10^{-10} - 7 \cdot 10^{-13}) \frac{1}{Pa},$$

gdzie M_i to mineralizacja wody w g/l.

Dla wody słodkiej rozwiązanie równania (1.1) ma postać:

$$\rho = 0,9997 e^{-0,0005\rho}, \quad (1.2)$$

przy niewielkich wielkościach ciśnienia (do 100 at) można przyjąć, że zmiany gęstości są nieznaczne i wówczas

$$\rho = const . \quad (1.3)$$

Sprężystość porowatej matrycy ciała stałego, w tym oczywiście dla gruntów i skał objawia się w przypadku pomijania odkształceń postaciowych zmianą porowatości matrycy. Można przyjąć, że porowatość objętościowa f zmienia się proporcjonalnie do zmian ciśnienia dp_s przenoszonego przez skały:

$$df = -\beta_s dp_s . \quad (1.4)$$

Wiedząc, że ciśnienie przenoszone przez ciało porowate jest równe ciśnieniu przenoszonemu przez ciecz, choć przeciwnie skierowanemu, to:

$$dp_s = -dp , \quad (1.5)$$

stąd

$$df = \beta_s dp , \quad (1.6)$$

gdzie β_s jest współczynnikiem objętościowej ściśliwości skały.

Wartość β_s zależy od rodzaju materiału budującego ciało porowate. W przypadku skały lub gruntu zawiera się w granicach:

$$\beta_s = [10^{-7} \div 10^{-10}] \frac{1}{Pa}$$

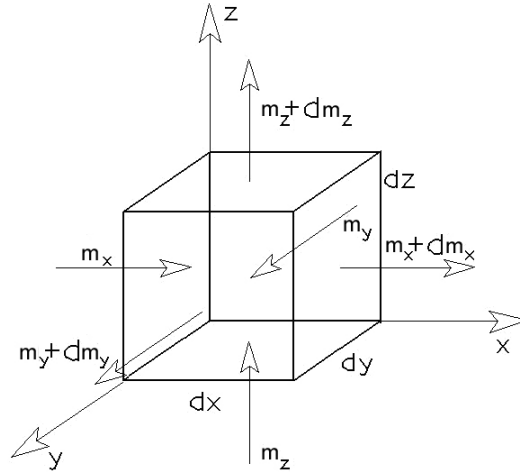
Dla przypadku niewielkich ciśnień można więc przyjąć, że skała, podobnie jak ciecz jest nieściśliwa. W taki przypadku zakładamy, że:

$$f = const . \quad (1.7)$$

W dalszej części monografii zajmować się będziemy związkami konstytutywnymi bardziej złożonymi, uwzględniającymi odkształcenia postaciowe szkieletu ciała porowatego oraz cechy lepkie szkieletu.

IV.2. 2. Równanie ciągłości przepływu.

Równanie ciągłości przepływu wynika z zasady zachowania masy cieczy przepływającej przez prostopadłościenny element VER reprezentowany przez prostopadłościan o krawędziach dx , dy , dz .



Rys. 4.8. Przepływ cieczy przez obszar elementarny VER.

Dla jasności wykładu wyprowadzenie równania ciągłości przepływu przedstawimy dwoma sposobami: klasycznym – przedstawiającym bilans mas przepływających przez ściany elementarnego prostopadłościanu VER i metodą nieco bardziej zaawansowaną na podstawie analizy bilansu mas przepływających przez obszar Ω ograniczony dowolną powierzchnią S .

Metoda klasyczna.

Masę płynu wpływającą do prostopadłościanu w czasie dt w kierunku osi x (rys. 4.8) obliczamy wzorem:

$$m_x = \rho F_{\perp x} v_x dt = \rho v_x dy dz dt, \quad (1.8)$$

gdzie:

m_x masa cieczy wpływającej do VER z kierunku x ,

v_x jest składową wektora prędkości filtracji w kierunku osi x ,

ρ gęstość przepływającej cieczy,

$F_{\perp x}$ powierzchnia prostopadłościanu prostopadła do osi x ,

dt przyrost czasu, w którym masa m_x powierzchnię $F_{\perp x}$.

Masę płynu wypływającą z prostopadłościanu VER w kierunku x obliczamy ze wzoru:

$$m_x + dm_x = \rho v_x dydzdt + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx dy dz dt . \quad (1.9)$$

Przyrost masy w czasie dt określamy jako różnica mas wpływających i wypływających w kierunku osi x wynosi:

$$dm_x = -\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx dy dz dt . \quad (1.10)$$

Postępując analogicznie możemy określić przyrosty masy cieczy w kierunku osi y i z :

$$dm_y = -\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} dx dy dz dt , \quad (1.11)$$

$$dm_z = -\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} dx dy dz dt . \quad (1.12)$$

Suma przyrostów masy z poszczególnych kierunków (1.10), (1.11), (1.12) daje całkowity przyrost masy przepływającej cieczy w obszarze VER w czasie dt i wyraża się wzorem:

$$dm = -\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] dx dy dz dt . \quad (1.13)$$

Jeżeli w dowolnym czasie t masa cieczy znajdującej się w prostopadłościanie dx , dy , dz wyraża się wzorem:

$$m(t) = (\rho) dx dy dz , \quad (1.14)$$

gdzie: f określa porowatość objętościową, to w czasie $t + dt$ masę całkowitą obliczamy w sposób następujący:

$$m(t + dt) = f [\rho f + d(\rho f)] dx dy dz. \quad (1.15)$$

Przyrost masy w przedziale czasu dt obliczamy, więc wzorem:

$$dm = \frac{\partial(f \rho dx dy dz)}{\partial t} dt. \quad (1.16)$$

Ostatecznie przyrost masy w okresie dt wynosi:

$$dm = \frac{\partial(\rho f)}{\partial t} dx dy dz dt. \quad (1.17)$$

Porównując wartość przyrostu masy wynikającą z bilansu przepływu cieczy przez ściany prostopadłościanu VER (1.13) do wartości dm wynikającej ze wzoru (1.17), dostajemy ostatecznie:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = -\frac{\partial(\rho f)}{\partial t}. \quad (1.18)$$

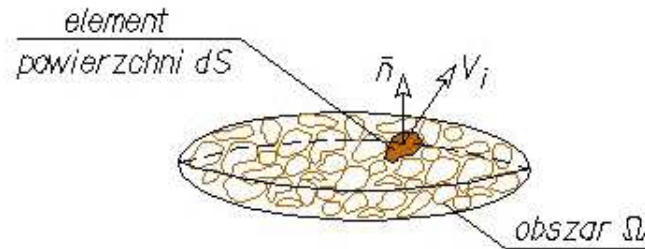
Równanie różniczkowe (1.18) est równaniem ciągłości przepływu cieczy ściśliwej przez ściśliwy szkielet ośrodka porowatego. Powyższy wynik uzyskano poprzez bardzo elementarne rozumowanie przedstawione głównie dla celów dydaktycznych. Zazwyczaj stosuje się nieco odmienny sposób dochodzenia do równanie ciągłości przepływu filtracyjnego.

Metoda całkowania.

Niech Ω określa obszar elementarny wypełniony ośrodkiem dwufazowym. Oznaczmy S powierzchnię ograniczającą, przez którą odbywa się przepływ filtracyjny cieczy. Niech \vec{n} oznacza wektor normalny do S i skierowany na zewnątrz obszaru Ω .

Przepływ cieczy przez powierzchnię S ograniczającą obszar Ω rys. 4.9 określa równanie:

$$\int_S \rho v_i dS + \int_{\Omega} \frac{\partial(\rho f)}{\partial t} d\Omega = 0. \quad (1.19)$$



Rys. 4.9. Przepływ medium przez powierzchnię S ograniczającą obszar Ω .

Korzystając z **twierdzenia Gaussa – Ostrogradzkiego**, możemy zamienić całkę powierzchniową na objętościową. Dostajemy, więc:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial(\rho f)}{\partial t} d\Omega = 0. \quad (1.20)$$

Powyższe równanie pozwala zapisać związek lokalny w postaci:

$$\text{div}(\rho \vec{v}) = -\frac{\partial(\rho f)}{\partial t} \quad (1.21)$$

Jak było do przewidzenia powyższy związek jest identyczny z równaniem (1.18).

IV.2.3. Równania ruchu cieczy.

Za punkt wyjścia do określenia równań ruchu lepkiej cieczy Newtonowskiej przez pory ciała stałego przyjmujemy drugie prawo Newtona.

Oznaczając przez \bar{o} siły działające w cieczy odniesione do jednostki objętości (gęstość działających sił) **drugie prawo Newtona** możemy w kartezjańskim układzie współrzędnych x,y,z przedstawić wzorem:

$$\begin{aligned} o_x &= \rho \frac{\partial v_{nx}}{\partial t}, \\ o_y &= \rho \frac{\partial v_{ny}}{\partial t}, \\ o_z &= \rho \frac{\partial v_{nz}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

gdzie: \vec{v}_n określa wektor rzeczywistej (w sensie średniej) prędkości przepływającej cieczy i posiada składowe v_{nx}, v_{ny}, v_{nz} .

Prędkość v_n można przy założeniu, że porowatość powierzchniowa f_A jest w przybliżeniu równa porowatości objętościowej f , powiązać z prędkością filtracji \vec{v} następującym związkiem:

$$\vec{v}_n = \frac{1}{f} \vec{v}. \quad (1.23)$$

Korzystając z powyższego związku równania (1.22) można zapisać inaczej:

$$\begin{aligned} o_x &= \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v_x}{f} \right), \\ o_y &= \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v_y}{f} \right), \\ o_z &= \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v_z}{f} \right). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Gęstość siły \bar{o} jest sumą sił, których źródło wynika z działania ciśnienia p , zwanym często ciśnieniem porowym, energii potencjalnej płynącej cieczy oraz siły lepkości (lepkiego oporu przepływu).

Oznaczając:

składowe siły lepkości (oporu przepływu) –

$$\rho \bar{o}_{lep} \text{ przez } \rho o_{lepx}, \rho o_{lepy}, \rho o_{lepz},$$

składowe gęstości sił ciężkości (obliczone z energii potencjalnej przepływu) –

$$\rho \frac{\partial u}{\partial x}, \rho \frac{\partial u}{\partial y}, \rho \frac{\partial u}{\partial z},$$

gdzie $u = gz$ oraz składowe gęstości sił pochodzących od ciśnienia –

$$\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Stąd \bar{o} można zapisać wzorem:

$$\begin{aligned} \bar{o}_x &= -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho \frac{\partial u}{\partial x} - \rho o_{lepx}, \\ \bar{o}_y &= -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho \frac{\partial u}{\partial y} - \rho o_{lepy}, \\ \bar{o}_z &= -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho \frac{\partial u}{\partial z} - \rho o_{lepz}. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Znak minus wynika z faktu, że gęstość siły \bar{o} jest siłą bezwładności, a więc siłą przeciwnie skierowaną do akcji, jakimi są siły znajdujące się po prawej stronie równań (1.25). W rezultacie drugie prawo Newtona w odniesieniu do składowych sił w kierunkach x, y, z można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v_x}{f} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} + o_{lepx}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v_y}{f} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} + o_{lepy}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v_z}{f} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} + o_{lepz}. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Powyższe równania przy użyciu zapisu wskaźnikowego **Einsteina** mają postać:

$$\frac{1}{f} \frac{\partial v_i^f}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - g(x_i \delta_{i3})_{,i} + o_{lepi}, \quad (1.27)$$

gdzie porównując wyrażenia (1.26) i (1.27) otrzymujemy:

o_{lepi} - oznacza składowe siły tarcia lepkiego

$u_i = g x_i \delta_{i3}$ - oznacza składowe siły masowej ciężkości cieczy.

Dla cieczy Newtona opór lepki jest proporcjonalny do prędkości filtracji, lecz odwrotnie do niej skierowany i wyraża się wzorem:

$$o_{lepi} = -c v_i, \quad (1.28)$$

gdzie c jest współczynnikiem oporu lepkiego przepływającej cieczy.

Wprowadźmy prędkość \vec{s} związaną z prędkością \vec{v} związkiem:

$$\vec{s} = \vec{v} - \lambda \vec{K}, \quad (1.29)$$

przy czym wektor \vec{K} w związku (1.29) wyraża się wzorem:

$$\vec{K} = grad \left(\frac{1}{\rho} p + g x_i \delta_{i3} \right), \quad (1.30)$$

a $\lambda = 1/c$.

Pochodna cząstkowa po czasie wektora \vec{s} równa się:

$$\frac{\partial \vec{s}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \lambda \frac{\partial \vec{K}}{\partial t}. \quad (1.31)$$

Podstawiając (1.29) do (1.27), po uwzględnieniu związku (1.28) możemy zapisać:

$$\frac{1}{f} \frac{\partial \vec{s}}{\partial t} + \frac{\lambda}{f} \frac{\partial \vec{K}}{\partial t} = \vec{K} - \frac{1}{\lambda} [\vec{s} + \lambda \vec{K}]. \quad (1.32)$$

Jeżeli prędkości zmiany gradientu ciśnienia jest mała w porównaniu z pozostałymi wielkościami w równaniu (1.32) (zagadnienia quasi – statyczne) to możemy przyjąć, że:

$$\frac{\lambda}{f} \frac{\partial \vec{K}}{\partial t} = 0$$

i równanie (1.32) sprowadza się do postaci:

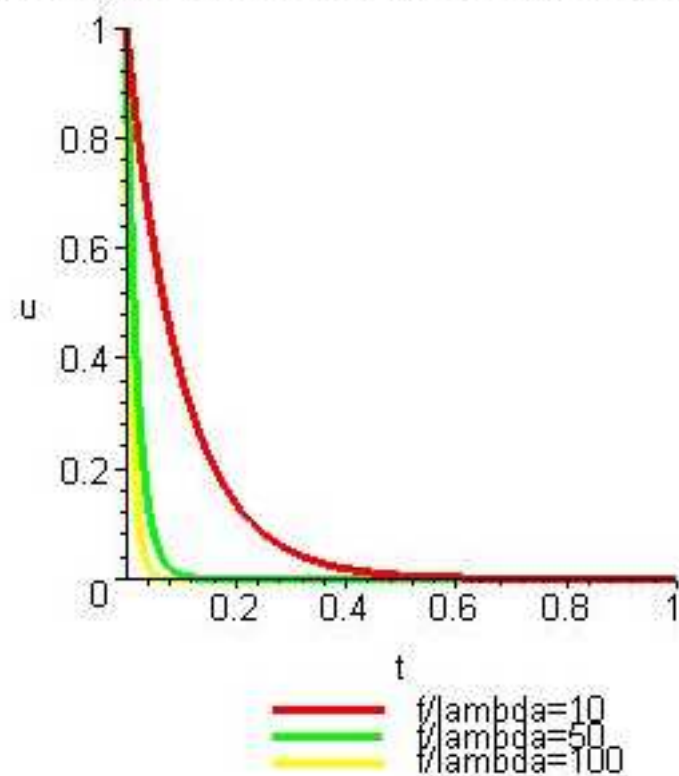
$$\frac{1}{f} \frac{\partial \vec{s}}{\partial t} = -\frac{1}{\lambda} \vec{s}. \quad (1.33)$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja:

$$\vec{s} = \vec{s}_0 e^{-\frac{f}{\lambda} t}. \quad (1.34)$$

Jak widać to na rys. 4.10 im większe opory tarcia lepkiego w przypadku przepływu laminarnego cieczy przez ośrodek porowaty, tym szybciej wartość bezwzględna wektora \vec{s} osiąga wartość bliską zeru.

Zależność wartości bezwzględnej wektora $u(t)$



Rys. 4.10. Przebieg funkcji $|\vec{s}(t)|$ w czasie dla wartości $f/\lambda = 10; 50; 100$.

Można więc stwierdzić, że dla odpowiednio dużych wielkości oporu lepkiego po bardzo krótkim czasie (mniejszym niż 1 sekunda) dostajemy związek liniowy:

$$\vec{v} = \lambda \vec{K}, \tag{1.35}$$

co można zapisać inaczej w postaci:

$$\vec{v} = -\frac{g}{c} \text{grad} \left(\frac{p}{\rho g} + x_i \delta_{i3} \right). \tag{1.36}$$

Z poprzednich rozważań (Rozdział III.1) wiemy, że wysokość hydrauliczna z pominięciem, ze względu na jej małą wielkość, energii kinetycznej przepływającej cieczy wyraża się wzorem:

$$H = \frac{p}{\rho g} + x_i \delta_{i3}. \quad (1.37)$$

Wprowadzając ponadto w miejsce g/c wielkość k oznaczającą współczynnik filtracji k , dostajemy **prawo Darcy'ego** dla przypadku ośrodka jednorodnego i izotropowego:

$$\vec{v} = -k \text{grad} H. \quad (1.38)$$

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dla przypadku ośrodka anizotropowego równanie (1.38) przyjmie postać:

$$v_i = k_{ij} H_{,j}, \quad (1.39)$$

gdzie k_{ij} jest tensorem przepuszczalności o 9 współczynnikach przepuszczalności wyrażony wzorem:

$$k_{ij} = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix}, \quad (1.40)$$

przy czym ze względu na symetrię tensora występuje tylko 6 możliwych różnych wielkości współczynników przepuszczalności. Najczęściej w przypadku ośrodków anizotropowych mamy do czynienia z tensorem przepuszczalności, który posiada jedynie wartości różne od zera na głównej przekątnej:

$$k_{ij} = \begin{vmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{vmatrix}. \quad (1.41)$$

Uzyskaliśmy tą drogą równania ruchu zgodne z prawem Darcy'ego. W dalszych rozważaniach będziemy stosować bardziej ogólny sposób dochodzenia do podstawowych związków fizycznych modelu. Prowadzą one do identycznych rezultatów, jednak są nieco bardziej złożone pod względem aparatu matematycznego. Z tego względu zdecydowaliśmy się na przedstawienie obydwu dróg dochodzenia do równań modelu.

Powyższe rozważania prowadzą również do wniosku, że podczas przepływu filtracyjnego cieczy przez ośrodek porowaty występuje siła oporów lepkich, która determinuje prędkość przepływu filtracyjnego, ale również oddziałuje na szkielet ośrodka porowatego, przy czym ma w tym przypadku zwrot przeciwny i wynosi:

$$\vec{R} = \frac{g}{k} \vec{v}. \quad (1.42)$$

Siłę \vec{R} wyrażoną związkiem (1.42) będziemy nazywali **siłą unoszenia filtracji**. Siła ta ma duży wpływ na odkształcenia postaciowe szkieletu gruntowego, a także na stany graniczne ośrodka porowatego.

IV.2.4. Równania hydrodynamiki wód podziemnych dla przypadku przepływu cieczy nieściśliwej przez nieodkształcalny ośrodek porowaty.

Zakładając, że ośrodek gruntowy jest ciałem idealnie sztywnym, a ciecz przepływająca przez siatkę kanalików filtracyjnych jest nieściśliwa, układ równań opisujący proces przepływu laminarnego sprowadza się do:

- o równania stanu:

$$\rho = const, \quad (1.43)$$

- o równania ciągłości przepływu

$$\frac{\partial(v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(v_z)}{\partial z} = 0, \quad (1.44)$$

które można zapisać inaczej w postaci:

$$div \vec{v} = 0. \quad (1.45)$$

- o równań ruchu

$$\begin{aligned} v_x &= -k_x \frac{\partial H}{\partial x}, \\ v_y &= -k_y \frac{\partial H}{\partial y}, \\ v_z &= -k_z \frac{\partial H}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

W olbrzymiej większości przypadków rozważamy zagadnienia ośrodka izotropowego. Dla tego przypadku mamy:

$$k_x = k_y = k_z = k . \quad (1.47)$$

Równanie ruchu cieczy można zapisać inaczej:

$$\vec{v} = -k \text{grad} H . \quad (1.48)$$

Podstawiając równania ruchu (1.48) do równania ciągłości przepływu (1.44) dostajemy równanie różniczkowe opisujące proces przepływu cieczy nieściśliwej przez jednorodny, izotropowy, nieodkształcalny ośrodek porowaty w postaci:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0 , \quad (1.49)$$

co można zapisać inaczej:

$$\nabla^2 H = 0 . \quad (1.50)$$

W dalszych rozważaniach istotne wydaje się wprowadzenie nowej wielkości określanej mianem potencjału prędkości przepływu i wyrażanej związkiem:

$$\Phi = -kH . \quad (1.51)$$

Równanie (1.49) przyjmuje w tym przypadku postać:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.52)$$

lub

$$\nabla^2 \Phi = 0. \quad (1.53)$$

natomiast równania ruchu sprowadzają się do:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ v_y &= \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \\ v_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1.54)$$

lub

$$\vec{v} = g \vec{\text{grad}} \Phi. \quad (1.55)$$

Wyprowadzone równania (1.53) i (1.55) pozwalają na rozwiązanie zagadnień przepływu ustalonego cieczy nieściśliwej przez nieodkształcalny ośrodek porowaty przy założeniu jednorodności i izotropowości ośrodka.

IV.2.5. Równanie hydrodynamiki wód podziemnych dla przypadku przepływu cieczy ściśliwej z uwzględnieniem ściśliwości szkieletu gruntowego.

Powróćmy do równania ciągłości przepływu uwzględniającego efekty ściśliwości cieczy i fazy stałej ośrodka porowatego (1.18):

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = -\frac{\partial(\rho f)}{\partial t}. \quad (1.56)$$

Pochodną cząstkową po czasie możemy zapisać inaczej:

$$\frac{\partial(\rho f)}{\partial t} = \rho \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (1.57)$$

Zgodnie z równaniami stanu (1.1) i (1.4) oraz uwzględniając, że

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho g \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (1.58)$$

otrzymamy:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho \beta_w \frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho^2 g \beta_s \frac{\partial H}{\partial t} \quad (1.59)$$

oraz

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \beta_s \frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho g \beta_s \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (1.60)$$

Związek (1.58) można przedstawić, zatem:

$$\frac{\partial(\rho f)}{\partial t} = \rho^2 g \beta_s \frac{\partial H}{\partial t} + f \rho^2 g \beta_w \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (1.61)$$

czyli

$$\frac{\partial(\rho f)}{\partial t} = \rho \eta_{spr} \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (1.62)$$

gdzie

$$\eta_{spr} = \rho g (\beta_s + f \beta_w). \quad (1.63)$$

Współczynnik η_{spr} określany jest nazywany **współczynnikiem pojemności sprężystej warstwy wodonośnej**.

Wielkość η_{spr} jest wielkością małą i jego wartość waha się w przedziale $10^{-6} \div 10^{-5} \left[\frac{1}{m} \right]$.

Równanie ciągłości przepływu można zapisać w formie:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = -\rho \eta_{spr} \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (1.64)$$

Uwzględniając, że zmiany gęstości cieczy w zależności od zmiennych przestrzennych x, y, z są małe, można przyjąć, że nie zależą od tych zmiennych niezależnych. Równanie (4.151) uprości się wówczas do postaci:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\eta_{spr} \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (1.65)$$

Uwzględniając równania ruchu dla przypadku ośrodka izotropowego w postaci:

$$\begin{aligned} v_x &= -k \frac{\partial H}{\partial x}, \\ v_y &= -k \frac{\partial H}{\partial y}, \\ v_z &= -k \frac{\partial H}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Równanie (1.65) można przedstawić w następującej formie:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \frac{\eta_{spr}}{k} \frac{\partial H}{\partial t} \quad (1.67)$$

Ostatecznie równanie opisujące proces przepływu cieczy ściśliwej przez ściśliwy ośrodek porowaty można zapisać:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (1.68)$$

gdzie

$$a = \frac{k}{\eta_{spr}} = \frac{k}{\rho g (\beta_s + f \beta_w)} \quad (1.69)$$

Współczynnik a nosi nazwę **współczynnika piezoprzewodności**.

Równanie (1.68) jest różniczkowym równaniem filtracji nieustalanej w ośrodku jednorodnym i izotropowym przy sprężystym reżimie przepływu filtracji i nosi nazwę równania przewodnictwa Fouriera. Postać tego równania jest analogiczna do równania przewodności cieplnej.

W przypadku przepływu pod ciśnieniem dla warstwy o miąższości M równanie (1.68) przedstawiane jest w innej postaci. Pomnóżmy licznik i mianownik członu równania znajdującego się po prawej stronie równania (1.68) przez M (średnią miąższość warstwy wodonośnej).

Możemy zapisać:

$$\frac{M}{aM} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{M \eta_{spr}}{kM} \frac{\partial H}{\partial t} \quad (1.70)$$

Oznaczając przez:

$T = kM$ - przewodność warstwy

$S = \eta_{spr} M$ - bezwymiarowy współczynnik pojemności wodnej warstwy wodonośnej

równanie (1.68) można przedstawić w postaci:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial H}{\partial t} \quad (1.71)$$

W rozdziale VIII będzie pokazany przykład rozwiązania zagadnień przepływu nieustalonego metodami analitycznymi. Zagadnienia przepływu nieustalonego są rozwiązywane również metodami numerycznymi przy pomocy profesjonalnych programów komputerowych np. [Flac, ModFlow, Mathematica 5, Maple 8].