

Wykład IX

ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH Z WYKORZYSTANIEM TRANSFORMACJI LAPLACE' A

9.1 Rozwiązanie równania różniczkowego Fouriera.

9.1.1 Zagadnienie Bousinesq'a. Płaski przepływ nieustalony.

Rozważmy przypadek przepływu swobodnego w trójwymiarowej przestrzeni x,y,z . Płaszczyzna $x,y,0$ znajduje się na granicy warstwy przepuszczalnej i nieprzepuszczalnej.

W teorii Boussinesqu'a opisującej przepływ nieustalony przyjmuje się następujące założenia:

- 1) ośrodek, przez który następuje przepływ jest jednorodny i izotropowy,
- 2) przepływ odbywa się w zakresie liniowego prawa przepływu Darcy'ego (ruch laminarny), wysokość hydrauliczna wzdłuż wyciętego z obszaru prostopadłościanu jest w każdym punkcie jednakowa i równa wysokości tego prostopadłościanu (rys. 9.1),
- 3) przepływająca przez ośrodek ciecz (w domyśle woda) jest nieodkształcalna,
- 4) własności filtracyjne określa stały w całym obszarze współczynnik filtracji k ,
- 5) prędkość filtracji jest wektorem dwuwymiarowym o składowych v_x i v_y , odpowiednio w kierunku osi x i y spełniających równania Dupuit:

$$v_x = k \frac{\partial H}{\partial x} \quad i \quad v_y = k \frac{\partial H}{\partial y},$$

- 6) do powierzchni swobodnej dopływają wody infiltracyjne o wydatku infiltracji Q_{inf} ,
- 7) wydatek infiltracji przypadający na obszar elementarny równy jest:

$$Q_{inf} = \varepsilon dx dy,$$

gdzie ε określa prędkość dopływu wód infiltracyjnych zwana dalej intensywnością infiltracji, obszar filtracji zmienia się w czasie, co na schemacie 9.1 reprezentuje podniesienie się zwierciadła wody w przedziale czasu dt o wielkość dH ,

- 8) przez podstawę prostopadłościanu nie występuje przepływ – brzeg nieprzepuszczalny

WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Całkowity przyrost wydatku przepływającego przez obszar elementarny wynosi:

$$dQ = k \frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial H}{\partial x} \right) dx dy + k \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial H}{\partial y} \right) dx dy + \varepsilon dx dy .$$

Zmiana wydatku dQ w czasie dt w obszarze filtracji powoduje wzrost lub ubytek całkowitej objętości fazy ciekłej w obszarze filtracji:

$$dQ = \frac{dV}{dt} ,$$

gdzie dV określa przyrost objętości obszaru elementarnego, który można wyrazić wzorem:

$$dV = dQ dt .$$

Zmianę objętości dV możemy w przybliżeniu obliczyć ze wzoru:

$$dV = \mu_e dH dx dy ,$$

gdzie μ_e jest współczynnikiem porowatości efektywnej.

Ponieważ dH określa przyrost wysokości hydraulicznej w czasie dt , możemy uwzględniając fakt, że przyjęty przez nas układ odniesienia jest układem Lagrange'a , zapisać:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial t} dt ,$$

więc:

$$dV = \mu_e \frac{\partial H}{\partial t} dx dy dt .$$

Korzystając z powyższych wzorów można zapisać:

$$\mu_e \frac{\partial H}{\partial t} dx dy dt = \left[k \frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial H}{\partial x} \right) + k \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \varepsilon \right] dx dy dt .$$

Dzieląc obie strony równania przez $dx dy dt$ dostajemy ostatecznie równanie Boussinesqu'a w postaci:

$$\mu_e \frac{\partial H}{\partial t} = k \frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial H}{\partial x} \right) + k \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \varepsilon .$$

W przypadku braku infiltracji równanie Boussinesqu'a sprowadza się do równania Dupuit dla przypadku przepływu przestrzennego (model dwuwymiarowy przepływu trójwymiarowego).

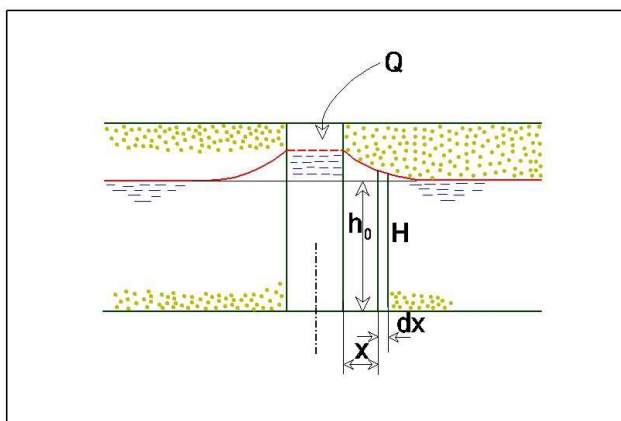
Powyższe równanie **Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania.** jest nieliniowe i z tego powodu istnieje istotna trudność w jego rozwiązywaniu. W takim przypadku poszukuje się równania liniowego, które daje rozwiązania zbliżone do równania oryginalnego. Poszukiwanie takiego równania nazywa się procesem linearyzacji, a ekwiwalentne równanie liniowe równaniem zlinearyzowanym Boussinesqu'a.

Powyżej zostało wyprowadzone równanie Boussinesqu'a, które dla płaskiego przepływu swobodnego ma postaci:

$$\mu_e \frac{\partial H}{\partial t} - k \frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \varepsilon = 0, \quad (9.1)$$

gdzie:

- $H(x, t)$ określa wysokość hydrauliczną ,
- ε oznacza intensywność infiltracji wody,
- μ_e jest to współczynnik porowatości efektywnej, który równa się odsączalności, jeśli zwierciadło wody opada bądź niedostatkowi nasycenia, jeśli się podnosi.



Rys. 9.2 Schemat zadania płaskiego przepływu nieustalonego.

Poniżej rozwiążemy zagadnienie płaskiego przepływu nieustalonego. Problem ten nie zostanie rozwiązany dla przypadku ogólnego. Rozwiążemy jedno z najprostszych zagadnień brzegowych, wprowadzając szereg założeń upraszczających. Rozważać będziemy warstwę gruntu o ograniczonej miąższości, spoczywającą na poziomej warstwie nieprzepuszczalnej. Warstwa przepuszczalna jest izotropowa i jednorodna w całej swojej rozciągłości. Poziom wody w rozważanej warstwie w chwili początkowej jest jednakowy względem granicy warstw i wynosi H_0 (rys.9.2).

W chwili $t=0$ rozpoczynamy wpompowywanie wody ze stałym wydatkiem Q do rowu sięgającego do warstwy nieprzepuszczalnej i przecinającego naszą warstwę przepuszczalną. Na skutek podnoszenia się wody w rowie występuje nieustalony przepływ wody przez warstwę przepuszczalną. Naszym zadaniem będzie określenie ewolucji zwierciadła swobodnego w czasie.

Równanie Bousinesqa jest nieliniowe. Aby uzyskać rozwiązanie tego równania w postaci zamkniętej dokonamy linearyzacji tego równania zgodnie z pomysłem Boussinesqa. Wysokość położenia zwierciadła wody H możemy wyrazić wzorem:

$$H = z + h_0 \quad (9.2)$$

gdzie z określa położenie wody względem jego położenia początkowego w chwili $t=0$. Pomijając infiltrację ε oraz uwzględniając (9.2) w równaniu Boussinesqa dostajemy:

$$\mu_e \frac{\partial (z + h_0)}{\partial t} - k \frac{\partial}{\partial x} \left[(z + h_0) \frac{\partial (z + h_0)}{\partial x} \right] = 0. \quad (9.3)$$

WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Założmy następnie, że z jest małe w stosunku do H_0 . Wówczas człon równania $\frac{\partial}{\partial x} \left(z \frac{\partial z}{\partial x} \right)$ jest mały w porównaniu z pozostałymi członami równania i można go pominąć. Uwzględniając powyższe założenia, równanie wyjściowe upraszcza się do postaci:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial z}{\partial t} = 0, \quad (9.4)$$

gdzie:

$$a^2 = \frac{\mu_e}{kh_0}. \quad (9.5)$$

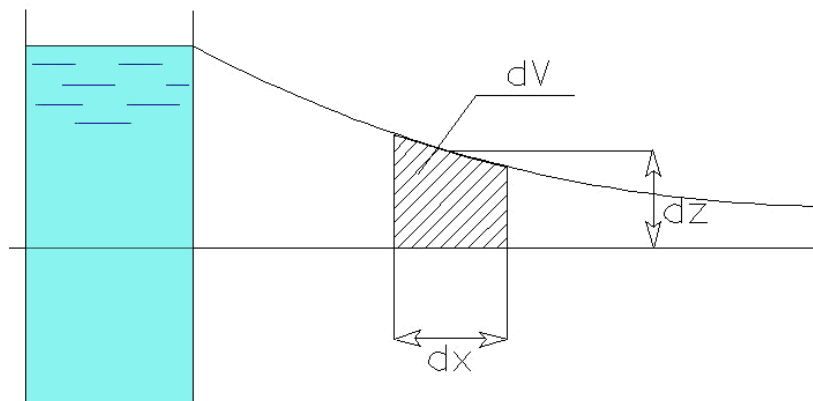
Otrzymane równanie (9.4) jest równaniem różniczkowym drugiego stopnia o pochodnych cząstkowych, którego postać jest identyczna z **równaniem przewodnictwa cieplnego Fouriera**. Należy ono do rodziny równań parabolicznych.

Aby przystąpić do rozwiązania zadania, konieczne jest sformułowanie warunków granicznych.

Warunek początkowy wynika bezpośrednio z przyjętego założenia, że położenie zwierciadła wody w chwili $t=0$ znajdowało się na wysokości H_0 względem warstwy nieprzepuszczalnej, więc:

$$\text{dla } t \rightarrow 0 \Rightarrow z = 0. \quad (9.6)$$

Pierwszy warunek brzegowy określimy z warunku, że wydatek Q wpływający do ośrodka odniesiony do jednostki długości rowu określa wzrost objętości wody pomiędzy zwierciadłem wody w gruncie w dowolnej chwili t i zwierciadłem swobodnym w chwili początkowej (rys.7.24).



Rys. 9.3 Ilustracja pierwszego warunku brzegowego.

Wzrost objętości wody w elemencie dx i szerokości jednostkowej wynosi:

$$dV = \mu_e \frac{\partial z}{\partial t} dt dx .$$

Wzrost objętości cieczy w jednostce czasu dla paseczka o długości dx wynosi:

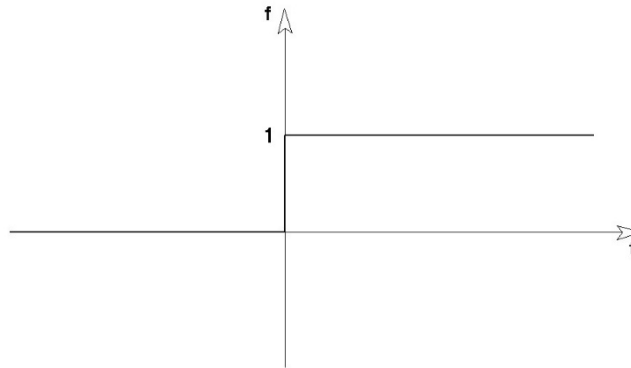
$$\frac{dV}{dt} = \mu_e \frac{\partial z}{\partial t} dx .$$

WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Całkowity wzrost objętości cieczy wpływającej do ośrodka po jednej stronie rowu w jednostce czasu równa się połowie wydatku wprowadzonego do rowu:

$$Q\eta(t) = 2\mu_e \int_0^{\infty} \frac{\partial z}{\partial t} dx, \quad (9.7)$$

gdzie $\eta(t)$ określa pseudofunkcję Heaviseida [rys.9.4].



Rys. 9.4 Funkcja Heaviseida.

Drugi warunek brzegowy wynika z założenia, że wprowadzony do rowu wydatek nie ma wpływu na poziom wody w nieskończenie dużej odległości od rowu, więc:

$$x \rightarrow \infty \Leftrightarrow z = 0. \quad (9.8)$$

Rozwiązanie zadania przeprowadzimy wykorzystując transformację Laplace'a zdefiniowaną związkami:

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (9.9)$$

gdzie:

$s = \gamma + \omega i \Leftrightarrow$ parametr transformacji i $i = \sqrt{-1}$,

$f(t) \Leftrightarrow$ funkcja transformowana – funkcja oryginału,

$\tilde{f}(s) \Leftrightarrow$ funkcja w postaci transformowanej – funkcja obrazu w przestrzeni Laplace'a.

Wzór (9.9) nazywa się prostym przekształceniem Laplace'a. Związek pomiędzy funkcją transformowaną $f(t)$ a jej Laplace'owskim obrazem $\tilde{f}(s)$ oznaczamy:

$$\tilde{f}(s) = L[f(t)].$$

Gdy znamy funkcję obrazu $\tilde{f}(s)$, funkcję oryginału $f(t)$ obliczamy stosując odwrotne przekształcenie Laplace'a zdefiniowane związkami:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} \tilde{f}(s)e^{st} ds. \quad (9.10)$$

Operację obliczania transformaty $f(t)$ oznaczamy:

$$f(t) = L^{-1}[\tilde{f}(s)]. \quad (9.11)$$

WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Przy rozwiązywaniu zagadnień technicznych dla znajdowania funkcji obrazu, jak również oryginału, korzystamy z tablic przekształceń Laplace'a np. [Ditkin, Prudnikow, 1964] lub z programów matematycznych, np. [Mathematica 5], [Maple8].

Gdy brak w tablicach funkcji oryginału lub obrazu, korzystamy z podstawowych własności przekształcenia Laplace'a pokazanych wyżej i staramy się tak przekształcić funkcję transformowaną, by możliwe było skorzystanie z tablic.

W przypadku, gdy nie ma możliwości skorzystania z tablic zastosowania odwrotnego przekształcenia Laplace'a sprowadza się ono do obliczenia całki wzdłuż prostej równoległej do osi urojonej na ogół nieujemnej odciętej, przy czym całka jest brana w sensie wartości głównej Cauchy'ego, tzn.

$$\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \bullet = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{x-iR}^{x+iR} \bullet. \quad (9.12)$$

Zazwyczaj przy obliczaniu odwrotnego przekształcenia postępuje się tak: transformatę $\tilde{f}(s)$ traktuje się jako pełną funkcję analityczną, tzn. wraz ze wszelkimi jej przedłużeniami analitycznymi i całkuje się wzdłuż odpowiednio dobranych x zamkniętego konturu, którego częścią jest odcinek $(x - iR, x + iR)$, następnie przechodzi się do granicy przy $R \rightarrow \infty$. Korzysta się przy tym z twierdzenia Cauchy'ego o residuach i z lematu Jordana [].

Przechodząc do rozwiązania naszego zagadnienia brzegowego, określimy transformatę funkcji „z” wzorem:

$$z = \int_0^{\infty} z e^{-st} dt. \quad (9.13)$$

Wykonamy transformatę Laplace'a na równaniu wyjściowym, przy czym uwzględnimy zerowy warunek początkowy wyrażony związkami (9.6).

Dostaniemy:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2 z s = 0. \quad (9.14)$$

Przetransformowane warunki brzegowe mają postać:

$$\frac{Q}{2s} = n \int_0^{\infty} s z(x, s) dx, \quad (9.15)$$

$$z(x, s)|_{x \rightarrow \infty} = 0.$$

Jak łatwo sprawdzić, rozwiązaniem równania (9.14) jest funkcja:

$$z(x, s) = A(s)e^{ax\sqrt{s}} + B(s)e^{-ax\sqrt{s}}. \quad (9.16)$$

Wykorzystując drugi warunek brzegowy (9.15) dostajemy:

$$A(s) = 0. \quad (9.17)$$

WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Więc rozwiązanie \tilde{z} upraszcza się do postaci:

$$\tilde{z}(x, s) = B(s)e^{-ax\sqrt{s}}. \quad (9.18)$$

Wykorzystując następnie pierwszy warunek brzegowy (9.15) dostajemy:

$$\frac{Q}{2s} = \mu_e \int_0^{\infty} sB(s)e^{-ax\sqrt{s}} dx. \quad (9.19)$$

Stąd wyznaczyć możemy funkcję $B(s)$:

$$B(s) = \frac{aQ}{2\mu_e s\sqrt{s}}. \quad (9.20)$$

Ostatecznie dostaniemy transformatę funkcji $z(x, t)$ w postaci:

$$\tilde{z}(x, s) = \frac{aQ}{2\mu_e s\sqrt{s}} e^{-xa\sqrt{s}}. \quad (9.21)$$

W programie Mathematica znajdziemy, że:

$$\frac{e^{-ax\sqrt{s}}}{\sqrt{s}} \quad \text{odpowiada funkcji} \quad \frac{e^{-\frac{a^2 x^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}.$$

Możemy na podstawie powyższej relacji określić oryginał funkcji $s\tilde{z}(x, y)$, a więc prędkość zmiany zwierciadła swobodnego w czasie. Dostajemy mianowicie:

$$\frac{\partial z(x, t)}{\partial t} = \frac{aQ}{2\mu_e \sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{a^2 x^2}{4t}}}{\sqrt{t}}, \quad (9.22)$$

skąd po pokałowaniu po czasie dostajemy:

$$z(x, t) = \frac{aQ}{2\mu_e \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\exp\left[-\frac{a^2 x^2}{4\tau}\right]}{\sqrt{\tau}} d\tau. \quad (9.23)$$

Możemy sprawdzić, że uzyskane rozwiązanie spełnia równanie wyjściowe (9.4) i warunki graniczne (9.6) i (9.7) oraz (9.8).

Całkę występującą w rozwiązaniu można obliczyć metodami przybliżonymi i wyrazić ją za pomocą znanej i stabilaryzowanej funkcji błędu θ .

W tym celu wprowadzimy podstawienie:

$$\frac{a^2 x^2}{4\tau} = \alpha^2, \quad (9.24)$$

stąd

WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

$$\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} = -ax \frac{d\alpha}{\alpha^2}, \quad (9.25)$$

przy czym $\alpha \rightarrow \infty$, gdy $\tau = 0$

oraz $\alpha \rightarrow \alpha_t = \frac{ax}{2\sqrt{t}}$, gdy $\tau \rightarrow t$.

Stąd dostajemy:

$$z(x, t) = \frac{a^2 Qx}{2n\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{\alpha_t} \frac{e^{-\alpha^2}}{\alpha^2} d\alpha. \quad (9.26)$$

Całkując uzyskaną całkę przez części dostajemy:

$$z(x, t) = \frac{a^2 Qx}{2\mu_e \sqrt{\pi}} \left(\frac{e^{-\alpha^2}}{\alpha} \Big|_{\infty}^{\alpha_t} - 2 \int_{\infty}^{\alpha_t} e^{-\alpha^2} d\alpha \right). \quad (9.27)$$

Wiedząc, że:

$$\int_{\alpha}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2} [1 - \theta(\alpha)],$$

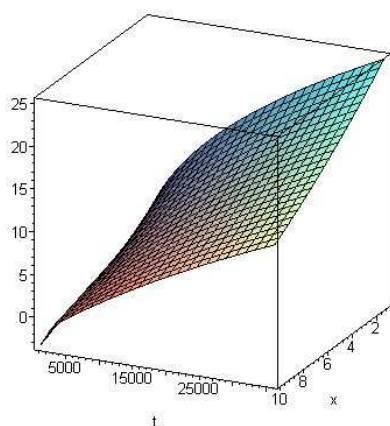
możemy rozwiązanie (9.27) zapisać w postaci:

$$z(x, t) = Q \sqrt{\frac{t}{\mu_e \pi k h_0}} e^{-\frac{\mu_e x^2}{4k h_0 t}} - \frac{Qx}{2kH} \left[1 - \theta \left(x \sqrt{\frac{\mu_e}{4k h_0 t}} \right) \right]. \quad (9.28)$$

Wizualizację powyższego wzoru przedstawiono na rys. 7.26, przy czym obliczenia wykonano dla następujących wartości parametrów:

$k = 10^{-5} \text{ m/s}; h_0 = 10 \text{ m}; Q = 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}; \mu_e = 0,2$.

Zmiana wysokości hydraulicznej w procesie filtracji nieustalonej z/z0



WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Rys. 7.26. Wizualizacja zmiany $z(x, t) / z_0$; ($z_0 = \frac{Q}{2\sqrt{\pi k h_0}}$); (obliczenia wykonano programem Mathematica 5).

Korzystając z rozwiązania (9.28), możemy już obliczyć numeryczne wartości funkcji $z(x, t)$ z dowolną dokładnością. Funkcja błędu $\theta(\alpha)$ ma swoje przedstawienie w postaci szeregu:

$$\theta(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{1!3} + \frac{\alpha^5}{2!5} + \dots + (-1)^n \frac{\alpha^{2n+1}}{n!(2n+1)} + \dots \right). \quad (9.29)$$

Korzystając z (9.29) można zapisać, że:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} [1 - \theta(\alpha)] = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \alpha + \frac{\alpha^3}{1!3} + \dots + (-1)^n \frac{\alpha^{2n+1}}{n!(2n+1)} + \dots \quad (9.30)$$

Funkcję $\frac{e^{-\alpha^2}}{\alpha}$ można przedstawić w postaci szeregu:

$$\frac{e^{-\alpha^2}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} - \alpha + \frac{\alpha^3}{2!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{\alpha^{(2n+1)}}{(2n+1)!} + \dots \quad (9.31)$$

Funkcję $z(x, t)$ można uwzględniając (9.29) i (9.31) przedstawić w postaci szeregu:

$$z(x, t) = \frac{Qx}{2kh_0\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\alpha} - \sqrt{\pi} + \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \dots + (-1)^n \frac{\alpha^{2n+1}}{(n+1)!(n+1)} + \dots \right), \quad (9.32)$$

gdzie:

$$\alpha = x \sqrt{\frac{\mu_e}{4kh_0t}}. \quad (9.33)$$

Jeżeli α jest małe, możemy ograniczyć się do dwóch pierwszych członów szeregu i uzyskamy rozwiązanie przybliżone w postaci:

$$z(x, t) \cong \frac{Q}{2kh_0} \left(\sqrt{\frac{4kh_0t}{\mu_e\pi}} - x \right). \quad (9.34)$$

Ze wzoru (9.34) określamy w przybliżeniu zasięg depresji wzorem:

$$R \cong \sqrt{\frac{4kh_0t}{\mu_e\pi}}. \quad (9.35)$$

Wzór (9.35) można znaleźć w „Poradniku Hydrogeologa” w postaci:

$$R = 1.13 \sqrt{\frac{kh_0t}{\mu_e}} \quad (9.36)$$

WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Przykład liczbowy:

Rozważmy warstwę o miąższości $h = 2m$. Poziom początkowy wody znajduje się na wysokości $h_0 = 1m$. W chwili początkowej mamy do czynienia z zerowym warunkiem początkowym. Poprzednio wyprowadzony wzór na przebieg zwierciadła swobodnego w czasie możemy przedstawić w formie:

$$z = z_0 f(\alpha),$$

gdzie

$$z_0 = \frac{Qx}{2kh_0\sqrt{\pi}},$$

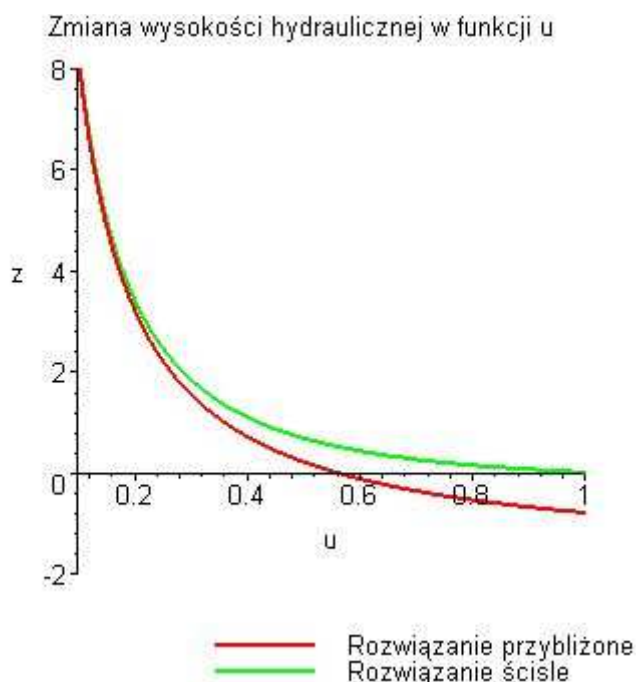
natomiast

$$f(\alpha) = \frac{e^{-\alpha^2}}{\alpha} - \sqrt{\pi}[1 - \theta(\alpha)]$$

w przypadku rozwiązania ścisłego, a w przypadku rozwiązania przybliżonego:

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \sqrt{\pi}.$$

Przebieg funkcji z/z_0 dla kolejnych wartości α w przypadku rozwiązania ścisłego i przybliżonego przedstawiono na rys. 7.27.



Rys. 7.27. Przebieg funkcji $f(\alpha)$ dla wartości α od 0,01 do 1,0 (obliczenia i wykres z programu Maple 8).

WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Z rysunku tego widać, że można rozwiązanie przybliżone stosować dla wartości mniejszych od 0,5 bez popełnienia większego błędu. Dla α większego od 0,5 uzyskujemy dla przypadku rozwiązania przybliżonego ujemne wartości z/z_0 , co jest oczywiście sprzeczne zarówno z rozwiązaniem ścisłym, jak i z naturalnym wycuciem przebiegu krzywizny zwierciadła swobodnego.

9.2 Radialny przepływ nieustalony.

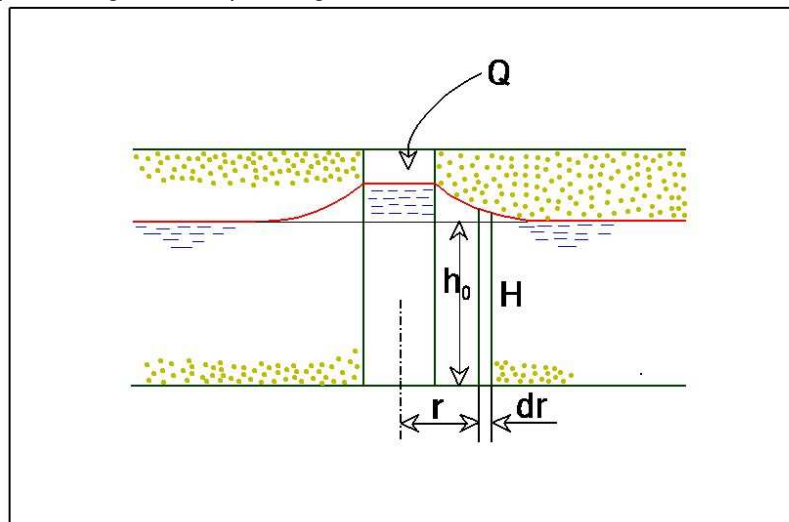
Przyjmując uproszczenie identyczne jak w przypadku płaskiego przepływu nieustalonego, zlinearyzowane równanie Boussinesqa sprowadza się do postaci

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} - a^2 \frac{\partial z}{\partial t} = 0, \quad (9.37)$$

gdzie:

$$a = \frac{\mu_e}{kh_0},$$

przy czym r jest współrzędną w radialnym układzie współrzędnych, a pozostałe oznaczenia są takie same, jak w przypadku zagadnienia płaskiego.



Rys. 38 Schemat dla przypadku przepływu radialnego.

Zakładamy podobnie jak w poprzednich zadaniach, że w chwili $t = -0$ powierzchnia swobodna jest płaska, znajduje się na wysokości h_0 względem warstwy nieprzepuszczalnej (rys. 7.28).

W chwili $t = +0$ rozpoczynamy wpompowywanie do studni o promieniu r_0 wody o stałej intensywności zasilania określonej wydatkiem Q . Będziemy poszukiwali funkcji wzniosu zwierciadła swobodnego ponad początkowe położenie $z(r, t)$.

Warunki graniczne rozpatrywanego zadania są następujące:

$$z = 0 \quad \text{dla} \quad t = 0, \quad (9.38)$$

$$z = 0 \quad \text{dla} \quad r \rightarrow \infty, \quad (9.39)$$

$$(9.40) \quad Q_\eta(t) = 2\pi\mu_e \int_0^\infty r \frac{\partial z}{\partial t} dr.$$

WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Niech $\tilde{z}(r, s)$ oznacza transformatę Laplace'a funkcji $z(r, s)$ wyrażoną wzorem:

$$\tilde{z}(r, s) = \int_0^{\infty} z(r, t) e^{-st} dt. \quad (9.41)$$

Ponieważ warunek początkowy ma postać:

$$z(r, 0) = 0, \quad (9.42)$$

obrazem funkcji $\frac{\partial z}{\partial t}$ w przestrzeni Laplace'a będzie $s\tilde{z}(r, s)$.

Równanie różniczkowe w przestrzeni Laplace'a ma postać:

$$\frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial r} + i^2 a^2 s \tilde{z} = 0, \quad (9.43)$$

gdzie: $i = \sqrt{-1}$.

Przetransformowane warunki brzegowe mają postać:

$$\tilde{z}(r, s) \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (9.44)$$

$$\frac{Q}{2\pi n s} = \int_0^{\infty} s \tilde{z}(r, s) r dr.$$

Równanie (9.43) jest zmodyfikowanym równaniem Bessela i jego rozwiązanie ma postać:

$$\tilde{z}(r, s) = A(s) I_0(ar\sqrt{s}) + B(s) K_0(ar\sqrt{s}). \quad (9.45)$$

Funkcja $I_0(ar\sqrt{s})$ jest funkcją Bessela pierwszego rodzaju rzędu zerowego a $K_0(ar\sqrt{s})$ jest funkcją Bessela drugiego rodzaju rzędu zerowego.

Ponieważ wiadomo, że funkcja $I_0(ar\sqrt{s})$ dąży do nieskończoności, gdy $r \rightarrow \infty$, a $K_0(ar\sqrt{s})$ dąży do zera, więc aby był spełniony pierwszy warunek brzegowy z warunków (9.44), $A(s)$ musi być równe zero. Pozostaje, więc:

$$\tilde{z}(r, s) = B(s) K_0(ar\sqrt{s}). \quad (9.46)$$

Rozwiązanie (9.46) spełnia równanie problemu i dwa pierwsze warunki graniczne: warunek początkowy (9.42) i pierwszy warunek brzegowy (9.44). Z drugiego warunku brzegowego (9.44) określimy funkcję $B(s)$.

$$\frac{Q}{2\pi n s^2} = -B(s) \int_0^{\infty} K_0(ar\sqrt{s}) r dr. \quad (9.47)$$

Podstawiając :

WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

$$ar\sqrt{s} = \alpha, \quad (9.48)$$

wyrazimy (9.47) w postaci:

$$\frac{a^2 Q}{2\pi n s} = -B(s) \int_0^{\infty} K_0(\alpha) \alpha d\alpha. \quad (9.49)$$

Korzystając z własności transformacji Laplace'a:

$$\int_0^{\infty} f(\alpha) \alpha d\alpha = \left. \frac{dF(s)}{ds} \right|_0^{\infty}, \quad (9.50)$$

gdzie $F(s)$ jest obrazem funkcji $f(\alpha)$ w przestrzeni Laplace'a. Wykorzystując tablice przekształcenia Laplace'a znajdziemy:

$$K_0(\alpha) \frac{\log(s + \sqrt{s^2 - 1})}{\sqrt{s^2 - 1}} = F(s), \quad (9.51)$$

więc

$$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{1}{s^2 - 1} - \frac{s \log(s + \sqrt{s^2 - 1})}{(s^2 - 1)\sqrt{s^2 - 1}}. \quad (9.52)$$

Możemy określić wartość pochodnej funkcji $F(s)$ dla $s \rightarrow \infty$ i $s = 0$. Mamy więc:

$$\text{dla } s \rightarrow \infty \quad \frac{dF(s)}{ds} = 0$$

oraz

$$\text{dla } s = 0 \quad \frac{dF(s)}{ds} = -1,$$

Więc:

$$\left. \frac{dF(s)}{ds} \right|_0^{\infty} = 1.$$

Ostatecznie dostajemy:

$$\int_0^{\infty} K_0(\alpha) \alpha d\alpha = 1. \quad (9.53)$$

Wstawiając uzyskany rezultat do związku (9.49) dostajemy:

$$B(s) = -\frac{a^2 Q}{2\pi \mu_e s}. \quad (9.54)$$

Obraz funkcji $z(r, t)$ w przestrzeni Laplace'a ma więc postać:

WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

$$\tilde{z}(r, s) = -\frac{a^2 Q}{2\pi\mu_e s} K_0(ar\sqrt{s}). \quad (9.55)$$

Korzystając, np. z programu Mathematica, znajdziemy retransformatę funkcji $s\tilde{z}(r, s)$:

$$\frac{\partial z(r, t)}{\partial t} = -\frac{Qa^2}{4\pi\mu_e} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{a^2 r^2}{4t}\right)}{t}, \quad (9.56)$$

i ostateczne rozwiązanie zadania otrzymujemy w postaci:

$$z(r, t) = -\frac{Q}{4\pi kh_0} \int_0^t \exp\left[-\frac{\mu_e r^2}{4kh_0\tau}\right] \frac{d\tau}{\tau}. \quad (9.57)$$

Można bez trudu sprawdzić, czy uzyskane rozwiązanie spełnia równanie problemu i warunki graniczne. Dokonując podstawienia:

$$\beta = \frac{a^2 r^2}{4\tau}, \quad (9.58)$$

można przedstawić rozwiązanie w innej postaci:

$$z(r, t) = -\frac{Q}{4\pi kh_0} \int_{\beta}^{\infty} \exp(-\beta) \frac{d\beta}{\beta}. \quad (9.59)$$

Ponieważ całka we wzorze (9.59) wyraża się:

$$\int_{\beta}^{\infty} \exp(-\beta) \frac{d\beta}{\beta} = Ei(\beta), \quad (9.60)$$

a funkcja $Ei(\beta)$ jest funkcją wykładniczo – całkową stabelaryzowaną, można korzystając z tablic na przykład [Ditkina, Prudnikowa, 1964] lub programów matematycznych, [Mathematica 5] lub [Maple8], łatwo obliczyć wartości funkcji $z(r, t)$ bez konieczności wykonywania obliczeń numerycznych. Korzystając z funkcji $Ei(\beta)$, rozwiązanie zadania zapisujemy w postaci:

$$z(r, t) = -\frac{Q}{4\pi kh_0} Ei(\beta), \quad (9.61)$$

gdzie:

$$\beta = \frac{\mu_e r^2}{4kh_0 t}. \quad (9.62)$$

Przykład liczbowy.

Przyjmijmy następujące parametry zadania:

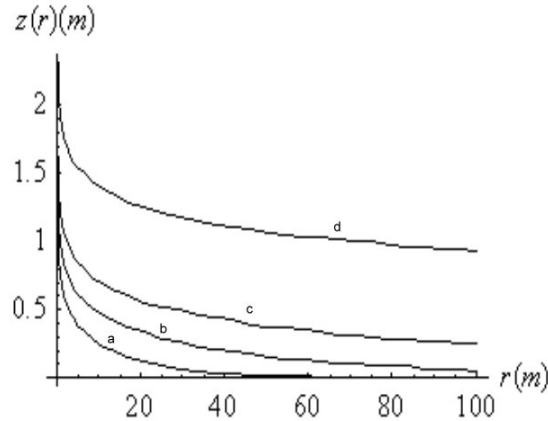
WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

$h_0 = 10\text{ m}$; $k = 10^{-3}\text{ m/s}$; $Q = 1,256 \cdot 10^{-3}\text{ m}^3/\text{s}$ oraz $\mu_e = 0,2$

Dostaniemy funkcję (9.61) w postaci:

$$z(r, t) = -0.1 * Ei(5,0 * r^2 / t).$$

Obliczenia wykonamy dla czasów t równych: 10^4 s ; 10^5 s ; 10^6 s ; 10^{10} s . Wyniki obliczeń zwierciadła wody zobrazowano na wykresie – rys. 7.29



Rys. 39 Przebieg funkcji położenia zwierciadła wody w czasie

a) $t = 10^4\text{ s}$, b) $t = 10^5\text{ s}$, c) $t = 10^6\text{ s}$, d) $t = 10^{10}\text{ s}$.

Wygodniej, w niektórych przypadkach skorzystać z rozwinięcia w szereg funkcji $Ei(\beta)$, które ma postać:

$$Ei(\beta) = -\log \beta e^\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\beta^n}{n!n}, \quad (9.63)$$

gdzie $\gamma = 0.577$ jest stałą Eulera.

Zastępując e^γ przez odpowiednią wartość cyfrową oraz β przez: $\frac{\mu_e r^2}{4kh_0 t}$, otrzymamy ostateczne rozwiązanie:

$$z(r, t) = \frac{Q}{4\pi kh_0} \left(\log \frac{2.25 kh_0 t}{\mu_e r^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\left(\frac{\mu_e r^2}{kh_0 t} \right)^n}{4^n n!n} \right). \quad (9.64)$$

Jeżeli człon $\frac{\mu_e r^2}{4kh_0 t}$ jest mały, możemy przedstawić rozwiązanie w postaci przybliżonej:

$$z(r, t) = \frac{Q}{4\pi kh_0} \log \frac{2.25 kh_0 t}{\mu_e r^2}. \quad (9.65)$$

Korzystając z rozwiązania przybliżonego (9.65), możemy określić promień leja depresji podstawiając $z(r, t) = 0$:

WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

$$R = 1.5 \sqrt{\frac{kh_0 t}{\mu_e}}. \quad (9.66)$$

Rozwiązanie przybliżone można przedstawić w postaci:

$$z(r, t) = \frac{Q}{2\pi kh_0} \log \frac{R}{r}. \quad (9.67)$$

Przedstawione powyżej rozwiązanie, dotyczące zachowania się zwierciadła swobodnego w czasie nie mają charakteru ścisłego. Wprowadzone hipotezy upraszczające, które pozwoliły na znalezienie rozwiązania równania różniczkowego Boussinesqa w postaci zamkniętej, uniemożliwiają dokładniejszą analizę fizyczną uzyskanych rozwiązań.

Możemy jednakże stwierdzić, że rezultaty te stanowią pewne przybliżenie (choć mało dokładne) procesu filtracji nieustalanej, można je jednak, naszym zdaniem, wykorzystywać dla potrzeb praktyki inżynierskiej.

Należy podkreślić, że wyprowadzone wzory można stosować zarówno w przypadku, gdy wprowadzamy wodę ze stałym wydatkiem do ośrodka gruntowego, jak również wtedy, gdy drenujemy warstwę wodonośną. W tym ostatnim przypadku należy jednak zwrócić uwagę na odmienny sens współczynnika porowatości μ_e .