Wykład VIII

Przekształcenie Laplace'a

8.1 Geneza przekształcenia Laplace'a.

Warunek bezwzględnej całkowalności w przedziale nieskończonym, nakładany na oryginały przekształceń Fouriera, bardzo ogranicza ich klasę. Nie mieszczą się w tej klasie dwie funkcje zasadnicze dla zastosowań technicznych:

$$f(t)=\eta(t), \quad f(t)=e^{j\alpha t} \tag{8.1}$$

Bowiem całki występujące w prostym zespolonym przekształceniu Fouriera dla tych funkcji

$$\int_{-\infty}^{\infty}\eta(t)e^{-j\omega t}dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty}e^{j\alpha t}e^{-j\omega t}dt$$

są rozbieżne. Rozbieżne są wtedy także całki występujące w prawostronnym zespolonym przekształceniu Fouriera, a mianowicie

$$\int_{0}^{\infty}\eta(t)e^{-j\omega t}dt, \quad \int_{0}^{\infty}e^{j\alpha t}e^{-j\omega t}dt$$

Niech $f(t)$ będzie funkcją zgaszoną spełniającą warunki Dirichleta, ale nie koniecznie całkowalną bezwzględnie na całej osi zmiennej niezależnej. Niech ponadto $f(t)$ będzie taką funkcją, że $e^{-xt}f(t)$ przy odpowiedniej wartości rzeczywistego parametru x ma zespoloną prawostronną transformatę Fouriera. Zapiszmy tę transformatę kładąc w definicji y zamiast ω . Otrzymamy:

$$F(x,y)=\int_{0}^{\infty}e^{-xt}f(t)e^{-jyt}dt \tag{8.2}$$

Transformata $F(x,y)$ jest funkcją zmiennej y oraz parametru x. Ze względu jednak na to, że po uporządkowaniu wyrażenia podcałkowego

$$f(t)e^{-(x+jy)t}$$

Zmienna y i parametr x mogą być potraktowane jako część urojona i część rzeczywista zmiennej zespolonej s, mianowicie

$$s=x+jy \tag{8.3}$$

Będziemy zapisywać równość (8.2) w sposób następujący

$$F(s)=\int_{0}^{\infty}f(t)e^{-st}dt \tag{8.4}$$

Odwrotne przekształcenie Fouriera dla zgaszonej funkcji $e^{-xt}f(t)$ ma postać

$$e^{-xt} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x+jy) e^{jyt} dy$$

Pomnóżmy je obustronnie przez e^{xt} , otrzymamy

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x+jy) e^{(x+jy)t} dy \tag{8.5}$$

Jeżeli teraz w zmiennej zespolonej (8.3) będziemy dalej uważać y za zmienną a x za parametr, to

$$ds = jdy$$

Pozwoli to zapisać zależność (8.5) w sposób następujący:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} F(s) e^{st} ds \tag{8.6}$$

Gdzie całkowanie względem s odbywa się wzdłuż prostej $re(s) = x$, równoległej do osi urojonej, a sama całka jest brana w sensie wartości głównej.

Wzór (8.4) nazywa się prostym przekształceniem Laplace'a funkcji $f(t)$, wzór zaś (8.6) odwrotnym przekształceniem Laplace'a (retransformatą) . Całkę po prawej stronie równania (8.4) nazywamy całką Laplace'a.

Podane wzorami (8.4) I (8.6) związki między funkcją transformowaną $f(t)$ a jej laplasowskim obrazem $F(s)$ oznaczamy

$$F(s) = \ell\left[f(t)\right], \quad f(t) = \ell^{-1}\left[F(s)\right] \tag{8.7}$$

8.2 Zbieżność całki Laplace'a.

Oryginałem przekształcenia Laplace'a nazywamy funkcję $f(t)$ rzeczywistego argumentu t, spełniająca następujące trzy warunki:

1) $f(t) \equiv 0 \; dla \; t < 0$

2) $f(t)$ spełnia warunki Dirichleta (pierwszy i drugi) w każdym przedziale skończonym

3) $f(t)$ jest całkowalna w każdym przedziale skończonym i spełnia nie równość

$$|f(t)| \le Me^{\alpha t} \quad (M \ge 0, \alpha \ge 0 \; dla \; t \ge T_0) \tag{8.8}$$

gdzie α nazywamy wykładnikiem wzrostu funkcji, zaś samą funkcję, spełniającą nierówność (8.8), funkcją rzędu wykładniczego.

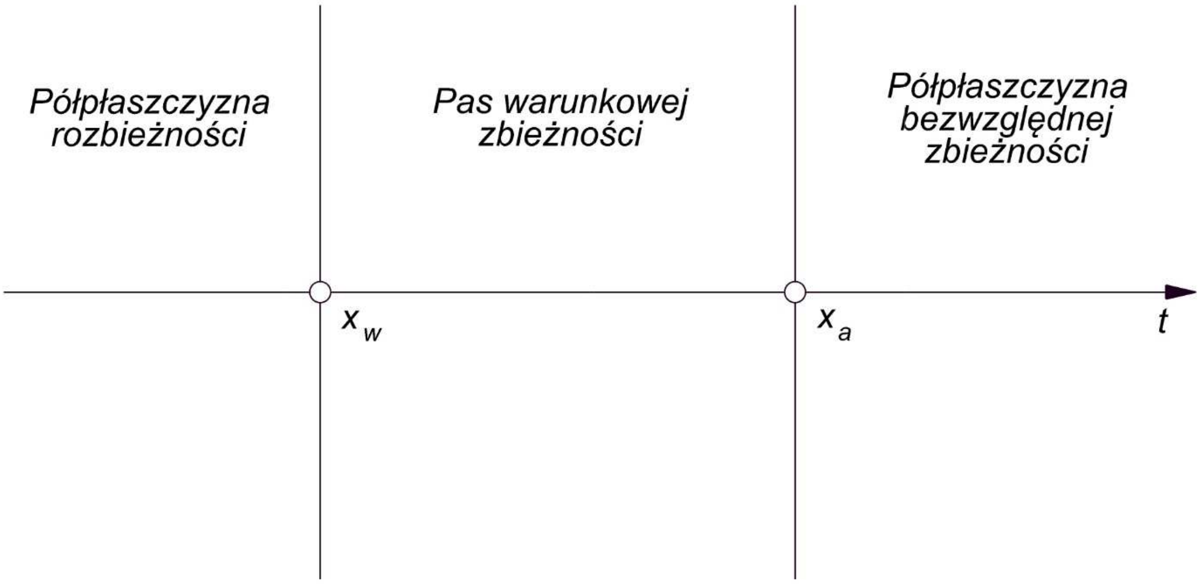
Przykładem oryginału jest funkcja stała. Funkcja ograniczona ma wykładniki wzrostu dodatnie i zero. Funkcja e^{x^2} nie jest oryginałem przekształcenia Laplace'a.

Trzeci z warunków nakładanych na oryginał w przekształceniu Laplace'a jest odpowiednikiem bezwzględnej całkowalności oryginału w przekształceniu Fouriera i ma na celu zapewnienia takiego obszaru na płaszczyźnie zmiennej zespolonej s, w którym całka Laplace'a jest bezwzględnie zbieżna.

Zauważymy bowiem, że

$$\int_0^\infty |f(t)|e^{-st} \le A\int_0^\infty e^{-(x-\alpha)t}dt = \frac{A}{x-\alpha}e^{-(x-\alpha)t}\Big|_0^\infty = \frac{A}{x-\alpha} \tag{8.9}$$

Przy czym ostatnia równość jest spełniona wtedy, gdy $x = re(s) > \alpha, tzn.$ w półpłaszczyźnie na prawo od prostej $re(s) = \alpha$.



Rys. 81. Zakresy zbieżności całki Laplace'a

Dla funkcji $f(t)$ będącej oryginałem przekształcenia Laplace'a istnieją dwie liczby $x_w \; i \; x_a$ związane ze sobą zależnościami

$$-\infty \le x_w \le x_a \le \infty \tag{8.10}$$

zwane odpowiednio odciętą warunkowej zbieżności i odciętą bezwzględnej (absolutnej0 zbieżności takie, że całka Laplace'a w równości (8.4) jest:

1) Rozbieżna, gdy

$$re(s) < x_w$$

2) Warunkowo zbieżna, gdy

$$x_w < re(s) < x_a$$

3) Bezwzględnie zbieżna, gdy

$$x_a < re(s)$$

Schematycznie przedstawienie obszarów, w których całka Laplace'a jest rozbieżna, warunkowo zbieżna, lub bezwzględnie zbieżna, podane zostało na rys. 8.1.

W wielu przypadkach występujących w zastosowaniach praktycznych spotyka się równość $x_w = x_a$, wtedy ich wspólną wartość nazywamy odciętą zbieżności.

W dalszych rozważaniach będziemy milcząco zakładać, ze parametr s występujący w całce Laplace'a spełnia warunek:

$$re(s) > x_a$$

tzn., że całka Laplace'a jest bezwzględnie zbieżna. Jest wtedy

$$e^{-st} f(t) \to 0, \quad gdy \quad t \to \infty \tag{8.11}$$

Twierdzenie

W obszarze zbieżności całki Laplace'a (8.4) transformata $F(s)$ jest funkcją holomorficzną zmiennej s, zaś je pochodna $F'(s)$ wyraża się wzorem

$$F'(s) = \int_0^\infty (-t) f(t) e^{-st} dt \tag{8.12}$$

Przez funkcję $F(s)$ na podstawie twierdzenia o przedłużeniu analitycznym w dalszym ciągu będziemy rozumieć funkcję określoną i analityczną nie tylko w obszarze, w który zbieżna jest odpowiadająca jej całka Laplace'a, ale w całym obszarze , na który może być ta funkcja przedłużona.

8.3 Liniowość przekształceń Laplace'a.

Przekształcenia Laplace'a – proste i odwrotne – są liniowe, mianowicie:

$$\ell[f_1 + f_2] = \ell[f_1] + \ell[f_2] \tag{8.13}$$

$$\ell[kf] = k\ell[f] \tag{8.14}$$

$$\ell^{-1}[F_1 + F_2] = \ell^{-1}[F_1] + \ell^{-1}[F_2] \tag{8.15}$$

$$\ell^{-1}[kF] = k\ell^{-1}[F] \tag{8.16}$$

Przy czym dużą literą z indeksem oznaczony został obraz laplasowski funkcji oryginału oznaczonej małą literą z tym samym indeksem.

Dowód liniowości przekształceń opiera się na liniowości całki oznaczonej. Należy pamiętać, że wykładnikiem wzrostu sumy funkcji jest większy z wykładników jej składników, oraz że mnożenie funkcji przez liczbę zachowuje wykładnik wzrostu, np. dla funkcji $e^t \ i \ e^{2t}$ wykładnikiem wzrostu jest 2.

Oto przykłady protego przekształcenia Laplace'a, często występujące w zastosowaniach:

$$\ell\left[\eta(t)\right] = \int_0^\infty 1(t)e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s} \quad \left(re(s) > 0\right) \tag{8.17}$$

$$\ell\left[e^{\lambda t}\right] = \int_0^\infty e^{\lambda t}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{(\lambda - s)t}dt = \frac{1}{s-\lambda} \quad \left(re(s) > re(\lambda)\right) \tag{8.18}$$

Liniowość przekształceń Laplace'a oraz wzór (8.18) prowadzą do łatwego obliczania niektórych transformat:

$$\ell\left[\sin(\omega t)\right] = \ell\left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right] = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega}\right] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \tag{8.19}$$

Analogicznie można obliczyć:

$$\ell\left[\cos(\omega t)\right] = \frac{s}{s^2+\omega^2}, \quad \ell\left[\sinh(\omega t)\right] = \frac{\omega}{s^2-\omega^2}, \quad \ell\left[\cosh(\omega t)\right] = \frac{s}{s^2-\omega^2} \tag{8.20}$$

Występujące w przekształceniu Laplace'a (8.18) λ jest dowolnym parametrem zespolonym. Kładąc $\lambda = \alpha + j\omega$ otrzymamy:

$$\ell\left[e^{\lambda t}\right] = \ell\left[e^{st}\left(\cos\omega t + j\sin\omega t\right)\right] = \frac{1}{s-\lambda} = \frac{1}{s-(\alpha+j\omega)} = \frac{s-\alpha+j\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$$

A stąd

$$\ell\left[e^{\alpha t}\cos\omega t\right] = \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega^2} \quad \left(re(s) > \alpha\right) \tag{8.21}$$

$$\ell\left[e^{\alpha t}\sin\omega t\right] = \frac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2} \quad \left(re(s) > \alpha\right) \tag{8.22}$$

Kładąc $\alpha = 0$ w przekształceniach (8.21) i (8.22) otrzymamy:

$$\ell\left[\cos\omega t\right] = \frac{s}{s^2+\omega^2}, \quad \ell\left[\sin\omega t\right] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

8.4 Różniczkowanie i całkowanie przekształceń Laplace'a.

Niech $f(t)$ i $f'(t)$ będą oryginałami i $f(0+) = k_0$. Wtedy, przy $\ell[f] = F$ otrzymamy, posługując się warunkiem (8.11)

$$\ell\left[f'(t)\right] = \int_0^\infty \frac{df}{dt}e^{-st}dt = \left[f(t)e^{-st}\right]\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = sF - k_0 \tag{8.23}$$

Zakładając teraz, że $f''(t)$ też jest oryginałem i $f'(0+)=k_1$, otrzymamy

$$\ell\left[f''(t)\right]=s\ell\left[f'(t)\right]-k_1=s\left[sF-k_0\right]-k_1=s^2F-\left(sk_0+k_1\right) \tag{8.24}$$

Analogicznie zakładając, że $f^{(n)}$ jest oryginałem, a $f^{(\nu)}(0+)=k_\nu \ \left(\nu=0,1,2...,n-1\right)$, otrzymujemy:

$$\ell\left[f^{(n)}(t)\right]=s^nF-\sum_{\nu=0}^{n-1}k_\nu s^{n-1-\nu} \tag{8.25}$$

Zauważymy, że jeśli wszystkie wartości początkowe są zerami, to n-krotne różniczkowanie oryginału jest równoważne mnożeniu obrazu przez s^n. W ogólnym przypadku należy po stronnie obrazu odjąć pewien wielomian stopnia n-1 o współczynnikach będących początkowymi wartościami funkcji i jej pochodnych aż do rzędu n-1.

Przykładem zastosowania wzoru (8.23) jest

$$\ell\left[\cos\omega t\right]=\frac{1}{\omega}\ell\left[\left(\sin\omega t\right)'\right]=\frac{1}{\omega}\left[s\ell\left(\sin\omega t\right)-\sin 0\right]=\frac{1}{\omega}s\frac{\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

W celu znalezienia obrazu całki oryginału $f(t)$ oznaczymy

$$\int_0^t f(\tau)d\tau=\varphi(t)$$

Nie trzeba zakładać, że $\varphi(t)$ jest oryginałem, gdyż całka oryginału jest zawsze oryginałem. Jest wtedy $\varphi(0+)=0, \varphi'(t)=f(t)$. Stosując do powyższej funkcji wzór (8.23):

$$\ell\left[\varphi'(t)\right]=s\ell\left[\varphi(t)\right]=\ell\left[f(t)\right]=F(s)$$

Otrzymamy

$$\ell\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]=\frac{F(s)}{s} \tag{8.26}$$

Wzór (8.26) odczytujemy: całkowanie w granicach od 0 do t oryginału jest równoważne dzieleniu obrazu przez s.

Obliczmy teraz pochodną funkcji holomorficznej $F(s)$, będącej obrazem oryginału $f(t)$. Skorzystamy tu z twierdzenia analogicznego do znanego nam z analizy matematycznej twierdzenia Leibniza o różniczkowalności całki względem parametru. Mianowicie będzie wtedy:

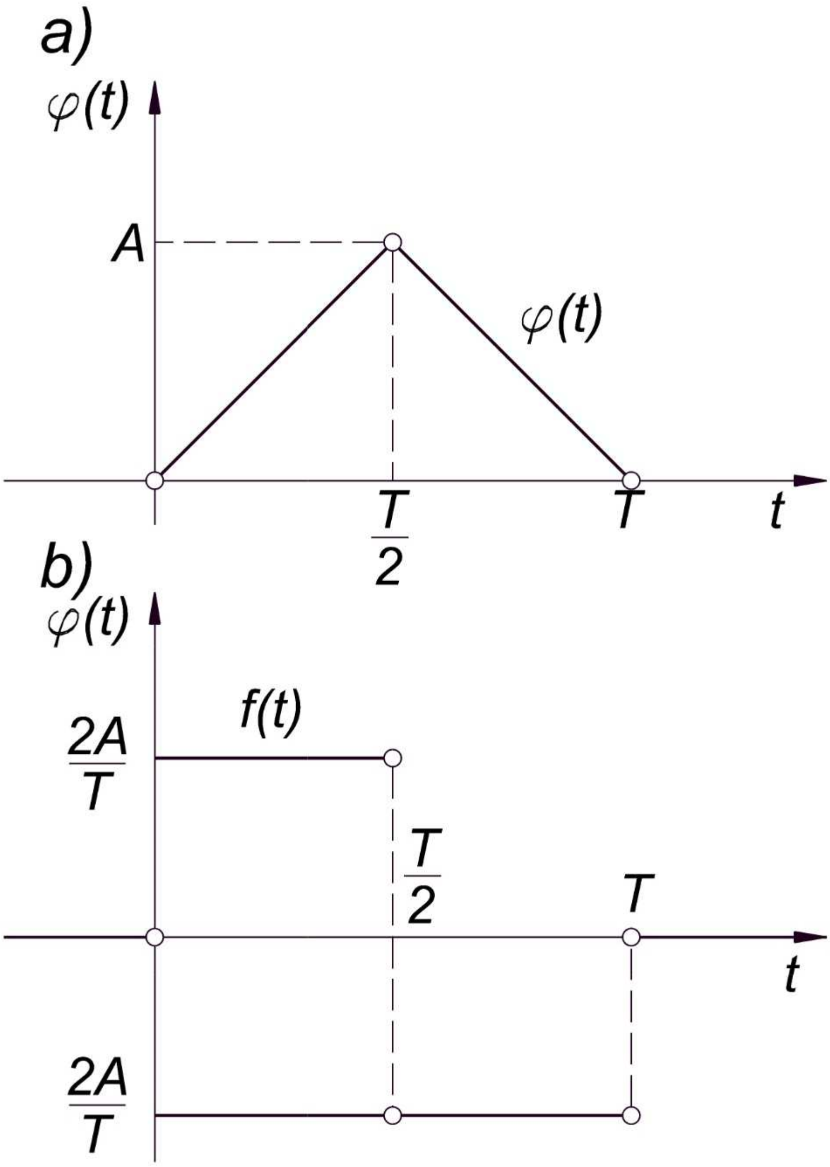
$$F'(s)=\frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty -tf(t)e^{-st}dt=\ell\left[-tf(t)\right]$$

i ogólnie

$$F^{(n)}(s) = \ell\left[(-1)^n t^n f(t)\right] \tag{8.27}$$

Co wysławiamy: różniczkowanie obrazu jest równoważne pomnożeniu oryginału przez –t.

Niech dla przykładu zastosowania twierdzenia o całkowaniu oryginału będzie dana funkcja $\varphi(t)$ przedstawiona na rys. 8.1a. Jest ona wykresem całki funkcji $f(t)$ pokazanej na rys. 8.1b.



Rys. 8.2 Przykład twierdzenia o całkowaniu

Funkcję $f(t)$ można analitycznie przedstawić za pomocą funkcji Heaviside'a:

$$f(t) = \frac{2A}{T}\left[\eta(t) - 2\eta\left(t - \frac{T}{2}\right) + \eta(t - T)\right]$$

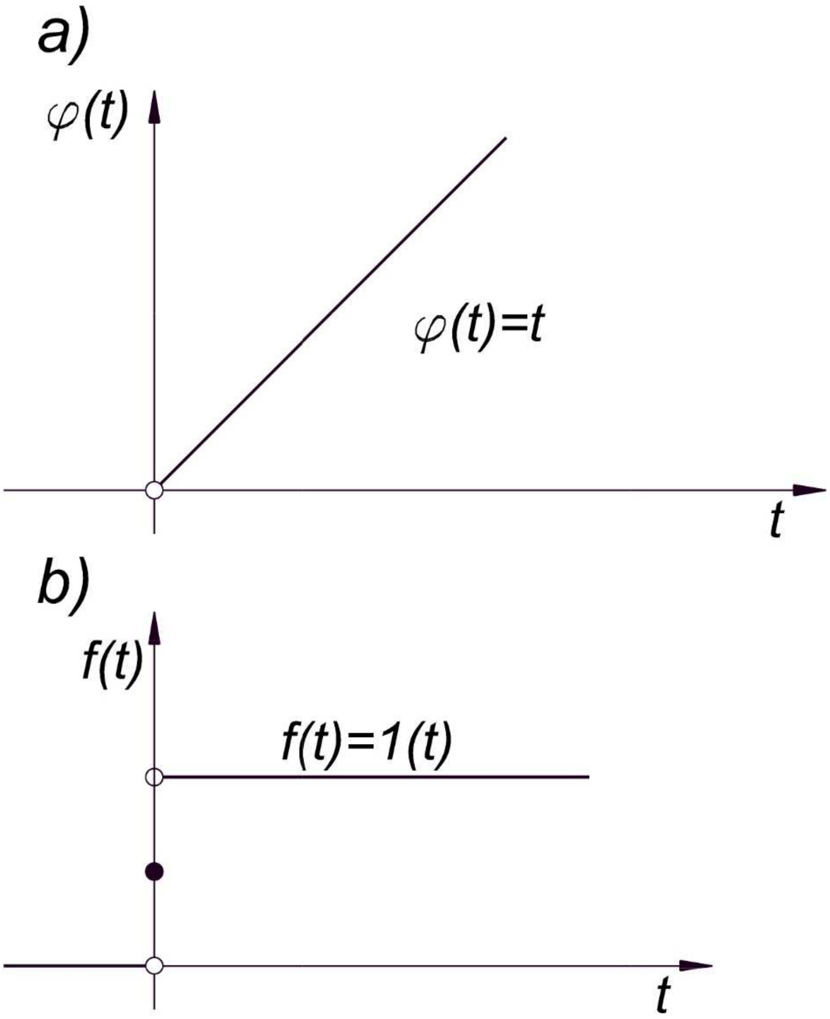
Wobec czego jej transformatą jest

$$F(s)=\frac{2A}{T}\left[\frac{1}{s}-\frac{2}{s}e^{-s\frac{T}{2}}+\frac{1}{s}e^{-sT}\right]=\frac{2A}{sT}\left[1-e^{-s\frac{T}{2}}\right]^2$$

Stosując wspomniane twierdzenie otrzymamy

$$\ell\left[\varphi[t]\right]=\frac{2A}{s^2T}\left[1-e^{-s\frac{T}{2}}\right]^2$$

Znajdźmy teraz obraz funkcji $\varphi(t)$ =t – rys. 8.2.



Rys. 8.2 Przykład twierdzenia o całkowaniu dla funkcji liniowej

Dokonany tego dwoma sposobami. Zauważymy najpierw, ze zachodzi związek

$$\varphi(t)=t\eta(t)$$

Wobec czego dzięki (8.27) i (8.17)

$$\ell[t]=-\left(\frac{1}{s}\right)'=\frac{1}{s^2} \tag{8.28}$$

Można ten sam wynik otrzymać stosując wzór (8.26). Mianowicie z tego, że

$$\varphi(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau \quad oraz \quad \ell\left[\eta(t)\right]=\frac{1}{s}$$

Wynika, że

$$\ell[t]=\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}\right)=\frac{1}{s^2}$$

Dalsze przykłady:

$$\ell\left[t^n\right]=\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \ell\left[te^{\lambda t}\right]=-\frac{d}{ds}\left(\ell\left[e^{\lambda t}\right]\right)=-\left(\frac{1}{s-\lambda}\right)=\frac{1}{(s-\lambda)^2} \tag{8.29}$$

$$\ell\left[t^n e^{\lambda t}\right]=\frac{n!}{(s-\lambda)^{n+1}} \tag{8.30}$$

$$\ell[t\sin\omega t]=-\left(\ell[\sin\omega t]\right)'=-\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right)'=\frac{2\omega s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2} \tag{8.31}$$

$$\ell[t\cos\omega t]=\frac{s^2-\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2} \tag{8.32}$$

Załóżmy teraz, że istnieje transformata funkcji $\varphi(t)=\dfrac{f(t)}{t}$. Oznaczmy ją przez $\Phi(s)$. Korzystając ze wzoru (8.27) dla n=1 otrzymamy

$$\ell^{-1}\left[\frac{d\Phi}{ds}\right]=-t\frac{f(t)}{t}=-f(t)=\ell^{-1}\left[F(s)\right] \tag{8.33}$$

gdzie $F(s)$ jest transformatą funkcji $f(t)$. Wobec tego

$$\Phi(s)=-\int_C^t F(z)dz$$

Stałą C wyznaczymy korzystając z uwag o zachowaniu się transformaty Laplace'a przy $s\to\infty$.
Otrzymamy ostatecznie:

$$\int_s^\infty F(z)dz=\ell\left[\frac{f(t)}{t}\right] \tag{8.34}$$

Gdzie całkowanie odbywa się po dowolnej drodze w obszarze holomorficznosci funkcji $F(s)$ oraz takiej, dla której część rzeczywista granicy górnej jest równa ∞ .

Wzór (8.34) odczytujemy: Całkowanie obrazu jest równoważne dzieleniu oryginału przez t.

Przykład obliczeniowy

Treść zadania

Obliczyć transformatę sinusa całkowego, określonego wzorem:

$$Si(t) = \int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau} d\tau \tag{8.35}$$

Rozwiązanie

Korzystając ze zmienności transformaty funkcji sin t oraz ze wzoru (8.34) mamy

$$\ell\left[\frac{\sin t}{t}\right] = \int_s^\infty \frac{dz}{z^2+1} = arctg\, z\Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - arctg\, s$$

Stąd i z własności (8.14) przekształcenia Laplace'a otrzymujemy

$$\ell\left[Si(t)\right] = \frac{\pi}{2s} - \frac{arctg\, s}{s} \tag{8.36}$$

………

8.5 Przesunięcia w dziedzinie oryginału i obrazu.

Dokonajmy liniowego przekształcenia argumentu rzeczywistego t, pisząc na jego miejscu w oryginale $f(t)$ nową zmienną $f(at - t_0)$ przy założeniu, że $a > 0$ oraz $t_0 \geq 0$ i znajdźmy obraz Laplasowski nowej funkcji $f(at - t_0)$ zmiennej t pamiętając, że

$$f(at - t_0) = \eta(at - t_0) f(at - t_0)$$

Będzie wtedy

$$l\left[f(at - t_0)\right] = \int_0^\infty \eta(at - t_0) f(at - t_0) e^{-st} dt = \int_{\frac{t_0}{a}}^\infty f(at - t_0) e^{-st} dt \tag{8.37}$$

Bowiem z własności funkcji Heaviside'a wynika, że funkcja podcałkowa jest równa zeru dla $t < \frac{t_0}{a}$.

Dokonajmy w ostatniej całce transformaty (8.37) następującej zamiany zmiennych

$$\tau = at - t_0$$

Będzie wtedy

$$dt = \frac{1}{a}\tau$$

l

t	$\frac{t_0}{a}$	∞
τ	0	∞

Stąd

$$\ell\left[f\left(at-t_0\right)\right]=\int_0^\infty f\left(\tau\right)e^{-s\frac{\tau+t_0}{a}}\frac{1}{a}d\tau$$

Lub inaczej

$$\ell\left[f\left(at-t_0\right)\right]=\frac{1}{a}e^{-\frac{st_0}{a}}F\left(\frac{s}{a}\right)\quad\begin{pmatrix}a>0\\ t_0\geq 0\end{pmatrix}\tag{8.38}$$

Twierdzenie o przesunięciu w dziedzinie oryginału zwane też w mechanice twierdzeniem o tłumieniu kładąc w transformacie (8.38) a=1 czyli

$$\ell\left[f\left(t-t_0\right)\right]=e^{-st_0}F\left(s\right)\tag{8.39}$$

Obliczmy dla przykładu

$$\ell\left[\eta\left(t-t_0\right)\right]=\frac{e^{-st_0}}{s}$$

$$\ell\left[\sin\left(t-t_0\right)\right]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}e^{-st_0}$$

Twierdzenie o przesunięciu w dziedzinie obrazu ma postać następującą:

$$\ell^{-1}\left[F\left(s-s_0\right)\right]=e^{s_0t}f\left(t\right)\tag{8.40}$$

Twierdzenie o podobieństwie otrzymujemy kładąc w transformacie (8.38) $t_0=0$ czyli

$$\ell\left[f\left(at\right)\right]=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)\quad\left(a>0\right)\tag{8.41}$$

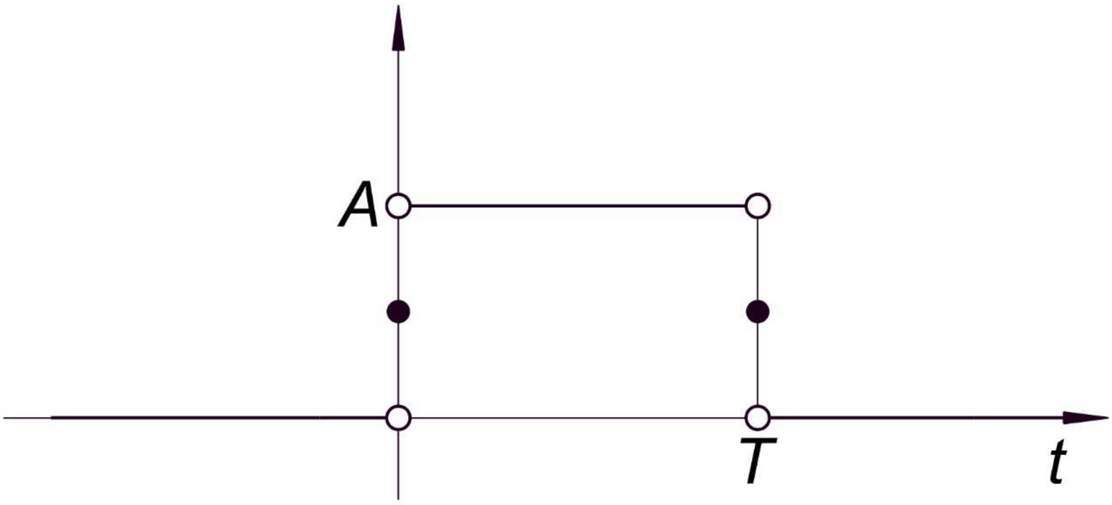
Poniżej rozwiążemy kilka zadań, a wśród nich takie, w których funkcja transformowana jest okresowa.

Przykłady obliczeniowe

Przykład 1

Na rys. 8.3 przedstawiona jest funkcja:

$$f\left(t\right)=A\left[\eta\left(t\right)-\eta\left(t-T\right)\right]\tag{8.42}$$



Rys. 8.3 Wykres funkcji

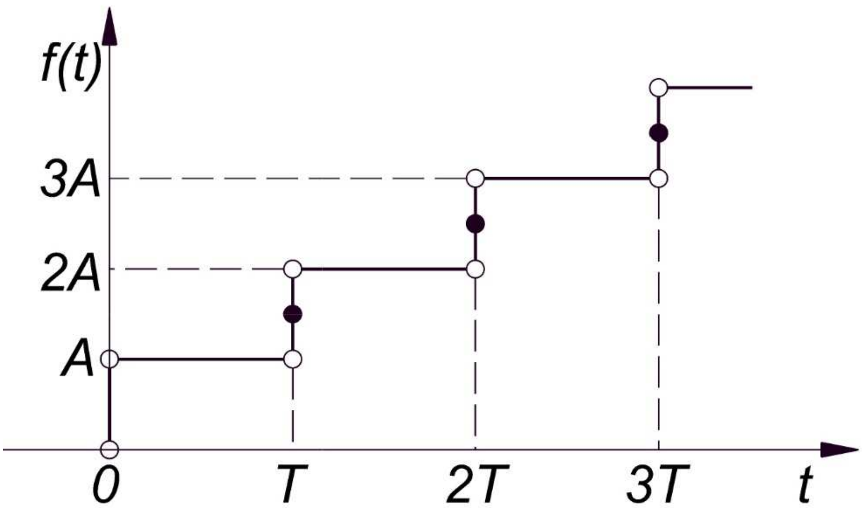
Jej obrazem w przestrzeni Laplace'a jest

$$F(s)=\ell\left[f(t)\right]=A\frac{1-e^{-sT}}{s} \tag{8.43}$$

Przykład 2

Funkcję schodkową (rys. 8.4) można zapisać za pomocą funkcji Heaviside'a jak następuje:

$$f(t)=A\left[\eta(t)+\eta(t-T)+\eta(t-2T)+.........\right] \tag{8.44}$$



8.4 Wykres funkcji (8.44)

Wobec czego w wyniku zastosowania wzoru na sumę szeregu geometrycznego obraz laplasowski ma postać

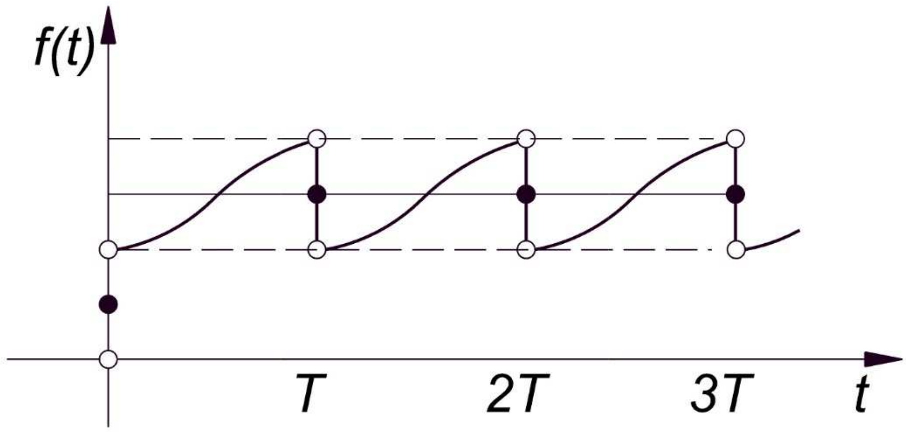
$$F(s)=\frac{A}{s}\left(1+e^{-st}+e^{-2st}+.............\right)=\frac{A}{s}\frac{1}{1-e^{-st}} \tag{8.45}$$

Przykład 3

Niech funkcja o równaniu

$f(t)$ i o okresie T będzie zadana na rys. 8.5. Opiszmy pomocnicza funkcję równościami

$$\varphi(t)=\begin{cases} f(t) & dla \quad 0<t<T \\ 0 & dla\ pozostalych\ t \end{cases}$$



Rys. 8.5 Wykres funkcji (8.46)

Wzór (8.43) pozwoli obliczyć transformatę

$$\Phi(s)=\ell\left[\varphi(t)\right]=\int_0^T f(t)e^{-st}dt$$

Samą funkcję $f(t)$ zapiszemy teraz za pomocą pomocniczej funkcji $\varphi(t)$ w postaci szeregu

$$f(t)=\varphi(t)+\eta(t-T)\varphi(t-T)+...\eta(t-nT)\varphi(t-nT)+........... \tag{8.46}$$

Wobec twierdzenia (8.39) będzie

$$F(s)=\Phi(s)+\Phi(s)e^{-st}+..........+\Phi(s)e^{-nst}+......=\Phi(s)\frac{1}{1-e^{-sT}} \tag{8.47}$$

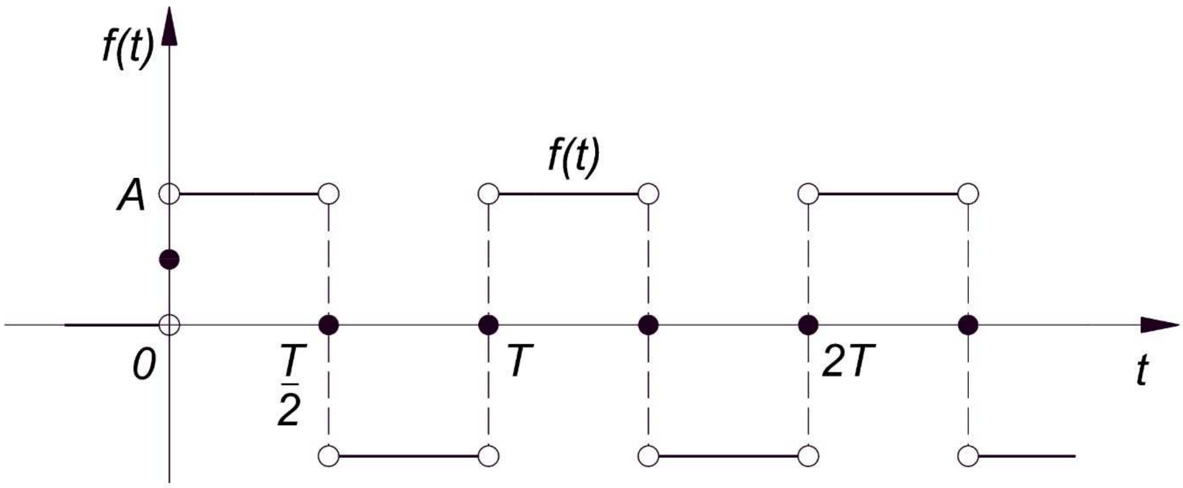
Stąd ostatecznie

$$F(s)=\frac{1}{1-e^{-st}}\int_0^T f(t)e^{-st}dt \tag{8.48}$$

Przykład 4

Niech funkcja $f(t)$ omawiana w poprzednim przykładzie ma postać jak na rys. 8.6. Zatem funkcja pomocnicza $\varphi(t)$ jest zadana wzorem:

$$\varphi(t)=A\left[\eta(t)-2\eta\left(t-\frac{T}{2}\right)+\eta(t-T)\right]$$



Rys. 8.6 Wykres funkcji $f(t)$

Jej transformatą jest

$$\Phi(s)=A\left[\frac{1}{s}-2\frac{e^{-s\frac{T}{2}}}{s}+\frac{e^{-sT}}{s}\right]=\frac{A}{s}\left(1-e^{-s\frac{T}{2}}\right)^2$$

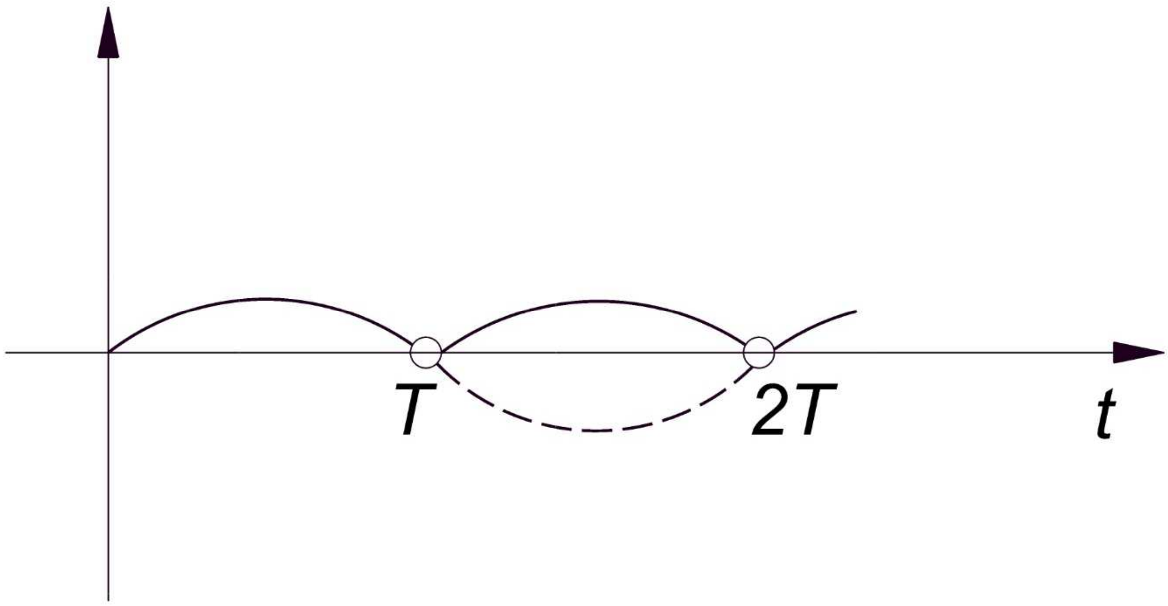
Wobec czego wzór (8.48) pozwala napisać

$$F(s)=\frac{A}{s}\frac{\left(1-e^{-s\frac{T}{2}}\right)^2}{1-e^{-sT}}=\frac{A}{s}\frac{1-e^{-s\frac{T}{2}}}{1+e^{-s\frac{T}{2}}}=\frac{A}{s}tgh\frac{sT}{2} \tag{8.49}$$

Przykład 5

Niech rys. 8.7 przedstawia funkcję :

$$f(t)=\left|\sin\frac{\pi t}{T}\right| \tag{8.50}$$



Rys. 8.7 Wykres funkcji (8.50)

Stąd

$$\varphi(t)=\eta(t)\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)+1(t-T)\sin\frac{\pi}{T}(t-T)$$

Jej transformata jest

$$\Phi(s)=\frac{\pi T}{(sT)^2+\pi^2}\left(1+e^{-sT}\right)$$

I wreszcie

$$F(s)=\frac{\pi T}{(sT)^2+\pi^2}ctgh\frac{sT}{2}$$

8.6 Twierdzenie Borela I całka Duhamela.

Niech $f_1(t)$ i $f_2(t)$ będą oryginałami przekształcenia Laplace'a. Zgodnie z definicją splotu ich splot oznaczymy przez

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

Twierdzenia Borela.

Iloczynowi obrazów odpowiada splot oryginałów:

$$\ell(f_1)\ell(f_2)=\ell(f_1*f_2) \tag{8.51}$$

Twierdzenia tego nie będziemy dowodzić, bowiem jego dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia Borela dla zespolonych przekształceń Fouriera.

Ze względu na to, że oba oryginały $f_1(t)$ i $f_2(t)$ są ograniczone w otoczeniu zera, wartość początkowa splotu (prawostronna granica dla $t \to 0$ jest równa zeru. Zastosowanie wzoru (8.23) do splotu (8.51) prowadzi do równości:

$$\ell\left[(f_1 + f_2)'\right] = s\ell(f_1)\ell(f_2) \quad \text{.............} \tag{8.52}$$

Stosując do pochodnej splotu znane twierdzenie Leibnitza o różniczkowaniu całki względem parametru możemy równość (8.52) zapisać w następującej postaci:

$$\frac{d}{dt}\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau = f_1(t) f_2(0+) + \int_0^t f_1(\tau) f_2{}'(t-\tau)\,d\tau \tag{8.53}$$

Wyrażenie występujące po lewej stronie równości (8.53) nazywa się całką Duhamela. Można wykazać, że jeżeli przyjmiemy definicję splotu w dziedzinie zespolonej

$$F_1 * F_2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{x-j\infty}^{x+j\infty} F_1(z) F_2(s-z)\,dz \tag{8.54}$$

Gdzie x jest większe od sumy wykładników wzrostu obu oryginałów f_1 i f_2 , to prawdziwe będzie twierdzenie Borela dla obrazów:

$$\ell[f_1] * l[f_2] = \ell[f_1 f_2] \tag{8.55}$$

8.7 Rozwinięcie obrazu w szereg Laurenta.

Twierdzenie

Jeżeli funkcja holomorficzna, rozwijalna w otoczeniu punktu w nieskończoności w szereg Laurenta

$$F(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{s^k} \quad (|s| > R) \tag{8.56}$$

jest w nieskończoności regularna, to jest ona obrazem laplasowskim funkcji

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1} \tag{8.57}$$

powstałej w wyniku zastosowania do szeregu (8.56) odwrotnego przekształcenia Laplace'a wyraz po wyrazie.

…….

Ażeby to twierdzenie udowodnić, wystarczy wykazać, że $f(t)$ jest oryginałem, gdyż zastosowanie do oryginału (8.57) wzoru (8.29) daje z powrotem równość (8.56).

Weźmy dla przykładu funkcję

$$F(s)=\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$$

Regularną dla $s\to\infty$. Można ją rozwinąć w szereg Laurenta, zbieżny na zewnątrz koła o środku w początku układu i promieniu $|a|$, tzn. dla s spełniających nierówność $|s|>|a|$. Jest wtedy

$$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}=\frac{1}{s}\left[1+\left(\frac{a}{s}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}......\frac{2n-1}{2}}{n!}\left(\frac{a}{s}\right)^{2n}=$$

$$=\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)}\left(\frac{a}{s}\right)^{2n+1}$$

Przekształcenie zostało dokonane na podstawie tożsamości:

$$1*3*5*......*(2n-1)=\frac{1*2*3*4*......(2n-1)2n}{2*4*6*......*2n}=\frac{(2n)!}{2^n n!}$$

Otrzymany szereg spełnia założenia twierdzenia o rozwijaniu transformaty w szereg, wiec można go poddać odwrotnemu przekształceniu Laplace'a wyraz po wyrazie. Pamiętając , że

$$\ell^{-1}\left[\frac{1}{s^{2n+1}}\right]=\frac{t^{2n}}{(2n)!}\quad (n=0,1,....)$$

Otrzymamy

$$\ell^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}\right]=\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!a^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2(2n)!}t^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{at}{2}\right)^{2n}$$

Stojąca po prawej stronie funkcja nosi nazwę funkcji Bessela zerowego rzędu (pierwszego rodzaju) argumentu at . Oznacza się ją $J_0(at)$. Wykazaliśmy wiec, że

$$l^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}\right]=J_0(at)\quad (|s|>|a|) \tag{8.58}$$

Rozpatrzmy inny przykład. Niech mianowicie oryginałem będzie

$$f(t)=e^{-t^2}$$

Jest to funkcja ciągła w przedziale $(-0,\infty)$ rzędu wykładniczego, k więc ma transformatę. Zobaczmy, czy można tu zastosować twierdzenie o rozwinięciu transformaty w szereg Laurenta. Otóż jest

$$e^{-t^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}t^{2n} \tag{8.59}$$

Szereg jest zbieżny do zespolonego t , ale nie na całej płaszczyźnie jest funkcja rzędu wykładniczego, np. na osi urojonej jest

$$\left|e^{-t^2}\right|\Big|_{t=jy} = e^{y^2}$$

Wobec czego nie można stosować omawianego twierdzenia. Zauważymy, że gdybyśmy jednak poddali szereg (8.59) transformacji wyraz po wyrazie, to otrzymalibyśmy szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{n!}\frac{1}{s^{2n+1}}$$

wszędzie rozbieżny.

Rozwiążmy powyższe zadanie inną metodą. Stwierdziliśmy już poprzednio istnienie transformaty

$$\ell\left[e^{-t^2}\right] = F(s) \tag{8.60}$$

Zakładając, że s =re s obliczymy lewą stronę powyższej równości. Będzie

$$\ell\left[e^{-t^2}\right] = \int_0^{\infty} e^{-t^2}e^{-st}dt = e^{\frac{s^2}{4}}\int_0^{\infty} e^{-\left(t+\frac{s}{2}\right)^2}dt$$

Wprowadźmy nową zmienną rzeczywistą

$$t+\frac{s}{2} = u \quad dt = du \quad \begin{array}{ccc} t & 0 & \infty \\ u & \frac{s}{2} & \infty \end{array}$$

A stąd

$$l\left[e^{-t^2}\right] = e^{\frac{s^2}{4}}\int_{\frac{s}{2}}^{\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{s^2}{4}}Erf\left(\frac{s}{2}\right) = \tilde{F}(s) \quad dla \quad s = re\, s$$

Oczywiście dla $s = re\, s$

$$F(s) = \tilde{F}(s)$$

Wobec czego tożsamość ta, dzięki przedłużeniu analitycznemu funkcji $\tilde{F}(s)$ w półpłaszczyźnie zbieżności całki (8.60). Jest więc

$$\ell\left[e^{-t^2}\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{s^2}{4}}Erf\left(\frac{s}{2}\right)$$

Gdzie

$$Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty} e^{-t^2}dt = 1 - erf(x)$$

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt$$