

Wykład VII

Przekształcenie Fouriera.

7.1 Całka Fouriera w postaci rzeczywistej.

Dotychczas rozpatrywaliśmy szeregi Fouriera funkcji w ograniczonym przedziale $[-l, l]$ lub $[0, l]$.

Teraz pokażemy analogicznie przedstawienie funkcji w przedziale $(-\infty, \infty)$ lub $(0, \infty)$. W tym celu założymy, że funkcja $f(x)$ określona w przedziale $(-\infty, \infty)$ jest w tym przedziale bezwzględnie całkowalna:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty \quad (7.1)$$

Dalej, że w każdym skończonym przedziale spełnia pierwszy i drugi warunek Dirichleta. Oznaczmy

$$l = \pi\lambda \quad (7.2)$$

I przedstawimy funkcję $f(x)$ w przedziale $[-l, l]$ za pomocą jej szeregu Fouriera:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{nx}{\lambda}\right) + b_n \cos\left(\frac{nx}{\lambda}\right) \quad (x \in (-l, l)) \quad (7.3)$$

O współczynnikach danych wzorami Eulera-Fouriera, które przybiorą postać:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi\lambda} \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t) \cos\left(\frac{nt}{\lambda}\right) dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ b_n &= \frac{1}{\pi\lambda} \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t) \sin\left(\frac{nt}{\lambda}\right) dt \end{aligned} \quad (7.4)$$

Wstawmy prawe strony związków (7.4) do równości (7.3). Otrzymamy:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi\lambda} \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t) \left[\cos\left(\frac{nx}{\lambda}\right) \cos\left(\frac{nt}{\lambda}\right) + \sin\left(\frac{nx}{\lambda}\right) \sin\left(\frac{nt}{\lambda}\right) \right] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t) \cos\left(\frac{n(x-t)}{\lambda}\right) dt \end{aligned} \quad (7.5)$$

i przejdźmy do granicy, gdy $l \rightarrow \infty$ lub, co jest równoważne, gdy $\lambda \rightarrow \infty$.

Z założenia bezwzględnej całkowalności wynika, że pierwsza z całek po prawej stronie w powyższej równości jest zbieżna, a ponieważ mianownik $2\pi\lambda$ rośnie nieograniczenie, więc:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t) dt = 0 \quad (7.6)$$

Oznaczmy

$$\omega_n = \frac{n}{\lambda} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (7.7)$$

Wobec czego

WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

$$\Delta\omega_n = \omega_n - \omega_{n-1} = \frac{n}{\lambda} - \frac{n-1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

Wprowadzając nową funkcję:

$$\phi(\omega, x, \lambda) = \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t) \cos(\omega(x-t)) dt \quad (7.8)$$

Możemy szereg w równości (7.5) napisać w postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi(\omega_n, x, \lambda) \Delta\omega_n$$

I uznać za sumę przybliżoną całki

$$\int_0^{\infty} \phi(\omega, x, \lambda) d\omega \quad (7.9)$$

Co nie jest ściśle, bo $\phi(\omega_n, x, \lambda)$ zależy od $\Delta\omega_n = \frac{1}{\lambda}$, poza tym nie jest to suma lecz szereg.

Przejście graniczne przy $\lambda \rightarrow \infty$ daje całkę:

$$\phi(\omega, x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega(x-t)) dt \quad (7.10)$$

Łącząc zależności (7.9) i (7.10) otrzymujemy **twierdzenie**:

Twierdzenie

Funkcję $f(x)$ bezwzględnie całkowaną w przedziale $(-\infty, \infty)$ spełniająca w nim pierwszy i drugi warunek Dirichleta można przedstawić za pomocą tzw. wzoru całkowego Fouriera:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega(x-t)) dt \quad (7.11)$$

Istnieje ścisły dowód równości (7.11), ale znacznie bardziej skomplikowany i dłuższy od powyżej podanego.

Prawa strona wzoru (7.11) nazywa się całką Fouriera funkcji $f(x)$. Przekształcając ją dostajemy:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \right) \cos \omega x + \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \right) \sin \omega x \right] \quad (7.12)$$

Co zapiszemy w postaci

$$f(x) = \left[\int_0^{\infty} a(\omega) \cos \omega x + b(\omega) \sin \omega x \right] d\omega \quad (7.13)$$

WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Przy czym oznaczamy

$$\begin{aligned} a(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \\ b(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \end{aligned} \quad (7.14)$$

Wzór (7.13) będący analogiem szeregu Fouriera dla funkcji w przedziale ograniczonym, mówi, że $f(x)$ można w nieograniczony przedziale $(-\infty, \infty)$ rozłożyć na drgania harmoniczne o częstotliwości zmieniającej się w sposób ciągły od zera do nieskończoności.

Funkcje $a(\omega)$ i $b(\omega)$ nazywają się współczynnikami widma ciągłego funkcji $f(x)$. Funkcje te mają następujące własności

$$a(-\omega) = a(\omega), \quad b(-\omega) = -b(\omega) \quad (7.15)$$

Funkcję, której wartość w każdym punkcie jest równa wartości jej całki Fouriera, nazywamy rozwijalną na całkę Fouriera. Dla takiej funkcji zachodzi wtedy analogon równości Parsevala

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [a^2(\omega) + b^2(\omega)] d\omega \quad (7.16)$$

7.2 Całka Fouriera funkcji parzystej lub nieparzystej.

Niech funkcja $f(x)$ rozwijalna na całkę Fouriera, będzie funkcją parzystą. Wtedy $b(\omega) \equiv 0$, bo funkcja podcałkowa we wzorach (7.14) będzie nieparzysta. Natomiast

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \quad (7.17)$$

Wzór całkowy dla funkcji parzystej przybiera postać

$$f(x) = \int_0^{\infty} a(\omega) \cos(\omega x) d\omega \quad (7.18)$$

Analogicznie w przypadku funkcji nieparzystej otrzymujemy

$$\begin{aligned} b(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \\ f(x) &= \int_0^{\infty} b(\omega) \sin(\omega x) d\omega \end{aligned} \quad (7.19)$$

7.3 Całka Fouriera funkcji w przedziale $(0, \infty)$.

Rozpatrzmy funkcję $f(x)$ zadaną w przedziale $[0, \infty)$ i w nim bezwzględnie całkowaną oraz spełniającą pierwszy i drugi warunek Dirichleta.

Utwórzmy funkcję pomocniczą określoną w sposób następujący

$$\phi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{gdy } x \in (0, \infty) \\ f(-x) & \text{gdy } x \in (-\infty, 0) \end{cases} \quad (7.20)$$

Funkcja $\phi(x)$ jest oczywiście rozwijalna na całkę Fouriera, mianowicie

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int_0^{\infty} a(\omega) \cos(\omega x) d\omega \quad x \in (-\infty, \infty) \\ a(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \end{aligned}$$

Wobec czego w przedziale $(0, \infty)$ zachodzi równość

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\omega x) d\omega \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \quad (7.21)$$

Analogicznie tworząc nieparzystą funkcję pomocniczą otrzymujemy

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(\omega x) d\omega \int_0^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \quad x \in (0, \infty) \quad (7.22)$$

Każdą z równości (7.21) i (7.22) nazywamy wzorem Fouriera w przedziale $(0, \infty)$, a prawe strony tych wzorów nazywamy całkami Fouriera w przedziale $(0, \infty)$. Funkcję, która w przedziale $(0, \infty)$ da się przedstawić równościami (7.21) lub (7.22) nazywamy funkcją rozwijalną na całkę Fouriera w przedziale $(0, \infty)$.

7.4 Sinusowe i cosinusowe przekształcenie Fouriera.

Założmy, że funkcja $f(x)$ jest rozwijalna na całkę Fouriera w przedziale $(0, \infty)$. Wtedy (7.21) i (7.22):

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \right] \sin \omega x d\omega \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \right] \cos \omega x d\omega \quad x \in (0, \infty) \end{aligned}$$

Przyjmijmy oznaczenia:

$$F_s(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \quad (7.23)$$

$$F_c(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \quad (7.24)$$

Wobec czego

WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_s(\omega) \sin(\omega t) dt = f(t) \quad (7.25)$$

Oraz

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_c(\omega) \cos(\omega t) dt = f(t) \quad (7.26)$$

Wzór (7.23) nazywamy prostym sinusowym przekształceniem Fouriera, zaś (7.25) przekształceniem sinusowym Fouriera odwrotnym (względem niego). Analogicznie wzory (7.24) i (7.26) nazywają się prostym i odwrotnym cosinusowym przekształceniem Fouriera. Związek między funkcją $f(t)$ a jej sinusową lub cosinusową transformatą F_s lub F_c będziemy oznaczać następująco:

$$\begin{aligned} F_s &= \Phi_s[f(t)], & f(t) &= \Phi_s^{-1}[F_s(\omega)] \\ F_c &= \Phi_c[f(t)], & f(t) &= \Phi_c^{-1}[F_s(\omega)] \end{aligned} \quad (7.27)$$

W dalszym ciągu zajmiemy się obliczaniem sinusowego i cosinusowego przekształcenia pochodnych i całki funkcji $f(t)$.

Oznaczmy przez k_0 i k_1 prawostronne granice w początku układu:

$$k_0 = f(0+), \quad k_1 = f'(0+) \quad (7.28)$$

Obliczmy transformaty pierwszych pochodnych funkcji $f(t)$ przy założeniu

$$f(t) \rightarrow 0, \quad \text{gdy } t \rightarrow \infty$$

$$\Phi_s[f'(t)] = \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} \sin(\omega t) dt = [f(t) \sin(\omega t)]_0^{\infty} - \omega \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt = -\omega F_c(\omega) \quad (7.29)$$

$$\Phi_c[f'(t)] = \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} \cos(\omega t) dt = [f(t) \cos(\omega t)]_0^{\infty} + \omega \int_0^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt = -k_0 + \omega F_s(\omega)$$

Przy obliczaniu drugich pochodnych założmy ponadto, że

$$f'(t) \rightarrow 0, \quad \text{gdy } t \rightarrow \infty$$

$$\begin{aligned} \Phi_s[f''(t)] &= \int_0^{\infty} \frac{d^2 f}{dt^2} \sin(\omega t) dt = \left[\frac{df}{dt} \sin(\omega t) \right]_0^{\infty} - \omega \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} \cos(\omega t) dt = \\ &= -\omega[-k_0 + \omega F_s] = k_0 \omega - \omega^2 F_s(\omega) \end{aligned} \quad (7.30)$$

$$\Phi_c[f''(t)] = \int_0^{\infty} \frac{d^2 f}{dt^2} \cos(\omega t) dt = \left[\frac{df}{dt} \cos(\omega t) \right]_0^{\infty} + \omega \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} \sin(\omega t) dt = -k_1 - \omega^2 F_c(\omega)$$

Przy obliczaniu transformat całki

$$\int_0^t f(\tau) d\tau$$

Założmy, że

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \rightarrow 0, \quad \text{gdy } t \rightarrow \infty$$

$$\begin{aligned} \Phi_s \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] &= \int_0^\infty \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] \sin \omega t = \\ &= -\frac{1}{\omega} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] \cos(\omega t) \Big|_0^\infty + \frac{1}{\omega} \int_0^\infty f(t) \cos(\omega t) dt = \frac{1}{\omega} F_c(\omega) \end{aligned} \quad (7.31)$$

$$\begin{aligned} \Phi_c \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] &= \int_0^\infty \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] \cos \omega t dt = \\ &= \frac{1}{\omega} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] \sin(\omega t) \Big|_0^\infty - \frac{1}{\omega} \int_0^\infty f(t) \sin(\omega t) dt = -\frac{1}{\omega} F_s(\omega) \end{aligned} \quad (7.32)$$

Przykład obliczeniowy

Treść zadania

Znaleźć transformatę sinusową funkcji $f(x) = e^{-x}$ gdy $x \in [0, \infty)$

Rozwiązanie

$$F_s(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega}{\omega^2 + 1} \sin(\omega x) dx$$

7.5 Całka Fouriera w postaci zespolonej.

Niech funkcja $f(x)$ będzie rozwijalną na całkę Fouriera. Wtedy

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos(\omega(x-t)) dt \quad (7.33)$$

Wewnętrzna całka jest parzystą funkcją zmiennej ω , wobec czego można zewnętrzną całkę rozciągnąć na przedział $(-\infty, \infty)$ dzieląc jednocześnie całą prawą stronę równości (7.33) przez 2.

Wobec tego będzie

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty d\omega \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos(\omega(x-t)) dt \quad (7.34)$$

Gdybyśmy teraz w prawej stronie równości (7.33) zastąpili cosinus sinusem, to całka wewnętrzna byłaby nieparzystą zmiennej ω , wobec czego całka zewnętrzna stałaby się równa zeru. Byłoby wtedy

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega(x-t)) dt \quad (7.35)$$

Dodajmy stronami równość (7.34) do równości (7.35) pomnożonej przez j , pamiętając jednocześnie, że wzór Eulera pozwala zapisać:

$$\cos \omega(x-t) + j \sin \omega(x-t) = e^{j\omega(x-t)}$$

Otrzymamy

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega(x-t)} dt \quad (7.36)$$

Wzór (7.36) nazywa się wzorem całkowym Fouriera w postaci zespolonej, zaś jego prawa strona – zespoloną całką Fouriera.

7.6 Zespolone przekształcenie Fouriera.

Zapiszmy równość (7.36) korzystając z własności dodawania argumentów funkcji wykładniczej:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} \right] e^{j\omega x} d\omega \quad (7.37)$$

Oznaczmy całkę wewnętrzną

$$F_z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \stackrel{df}{=} \Phi_z[f(t)] \quad (7.38)$$

Wtedy równość (7.37) przybierze postać:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_z(\omega) e^{j\omega x} d\omega \stackrel{df}{=} \Phi_z^{-1}[F_z(\omega)] \quad (7.39)$$

Wzór (7.38) nazywamy prostym zespolonym przekształceniem Fouriera (niekiedy dodajemy dwustronny), zaś (7.39) nazywamy zespolonym przekształceniem odwrotnym.

Funkcja $f(t)$ nazywa się oryginałem albo funkcją oryginalną przekształcenia, zaś $F_z(\omega)$ - obrazem, transformatą lub przekształceniem odwrotnym.

Transformatę $F_z(\omega)$ nazywamy także zespolonym widmem ciągłym funkcji $f(t)$. Aby znaleźć związek między zespolonym widmem ciągłym i widmami rzeczywistymi, danymi wzorami (7.14) zauważymy, że:

$$F_z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$$

Oznaczając, zgodnie z wzorami (7.14)

WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

$$\left. \begin{aligned} A(\omega) &= \pi a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \\ B(\omega) &= \pi b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \end{aligned} \right\} \quad (7.40)$$

Możemy widmo zespolone przedstawić w postaci:

$$F_z(\omega) = A(\omega) - jB(\omega) = |F_z[\omega]| e^{j \text{Arg} F_z(\omega)}$$

Widmo amplitudy $|F_z(\omega)|$ i widmo fazy $\text{Arg} F_z(\omega)$ da się obliczyć w zależności od widm rzeczywistych. Mianowicie:

$$A = |F_z| \text{Arg} F_z, \quad B = -|F_z| \text{Arg} F_z$$

Wobec czego:

$$|F_z| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

Oczywiście $\text{re}(F_z) = A$ jest funkcją parzystą, a $\text{im}(F_z) = B$ jest funkcją nieparzystą argumentu ω .

7.7 Przekształcenie Fouriera operacji różniczkowych i całkowych.

Założmy, że pochodne pierwsza i druga oraz całka $\int_0^t f(\tau) d\tau$ funkcji $f(t)$, mającej transformatę

Fouriera, także są transformowalne oraz że spełnione są następujące warunki graniczne:

$$f(t) \rightarrow 0, \quad f'(t) \rightarrow 0, \quad \int_0^t f(\tau) d\tau \rightarrow 0, \quad \text{gdy } |t| \rightarrow \infty \quad (7.41)$$

Obliczmy:

Pierwsza pochodna

$$\Phi_z[f'(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-j\omega t} dt = [f(t) e^{-j\omega t}]_{-\infty}^{\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = j\omega F_z[\omega] \quad (7.42)$$

Druga pochodna

$$\Phi_z[f''(t)] = (j\omega)^2 F_z(\omega) \quad (7.43)$$

Całka

$$\Phi_z\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{j\omega} F_z(\omega) \quad (7.44)$$

Można otrzymane wyniki wysłowić jak następuje:

WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

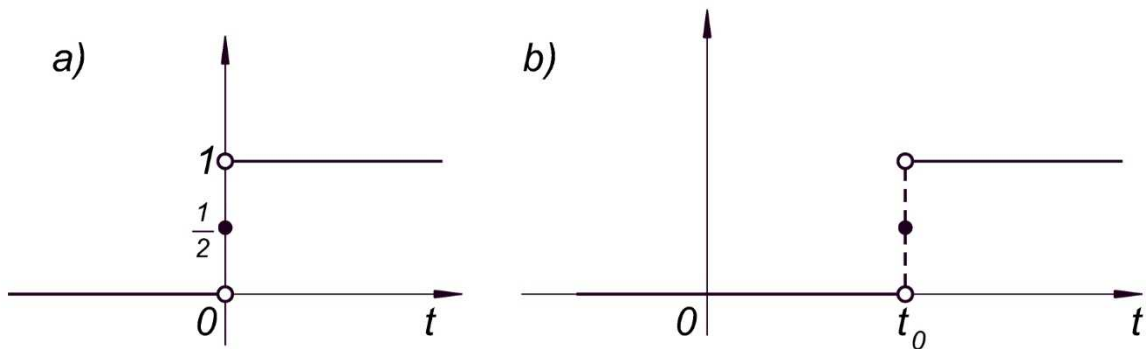
Różniczkowanie oryginału jest równoważne mnożeniu obrazu przez $j\omega$, całkowanie (w granicach $(0, t)$) oryginału jest równoważne dzieleniu obrazu przez $j\omega$.

7.8 Funkcja Heaviside'a.

Pseudofunkcją Heaviside'a nazywamy „funkcję” określoną w sposób następujący:

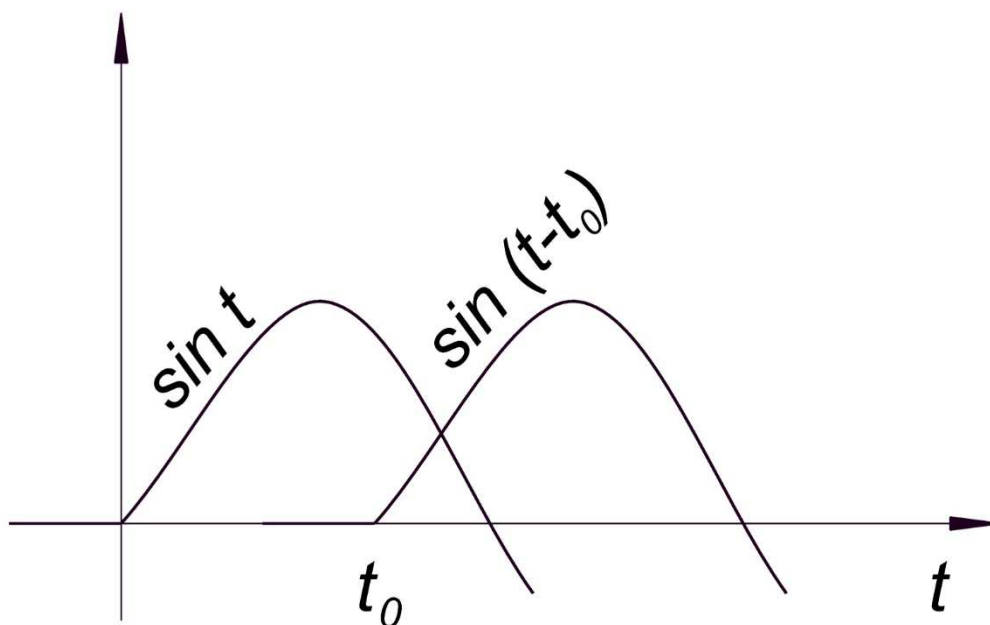
$$\eta(t) \stackrel{df}{=} \begin{cases} 1, & \text{gdy } x > 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{gdy } x = 0 \\ 0, & \text{gdy } x < 0 \end{cases} \quad (7.45)$$

Na rys. 7.1 przedstawiono funkcję Heaviside'a $\eta(t)$, zaś na rys. 7.2 tę samą funkcję z opóźnionym argumentem $\eta(t-t_0)$.

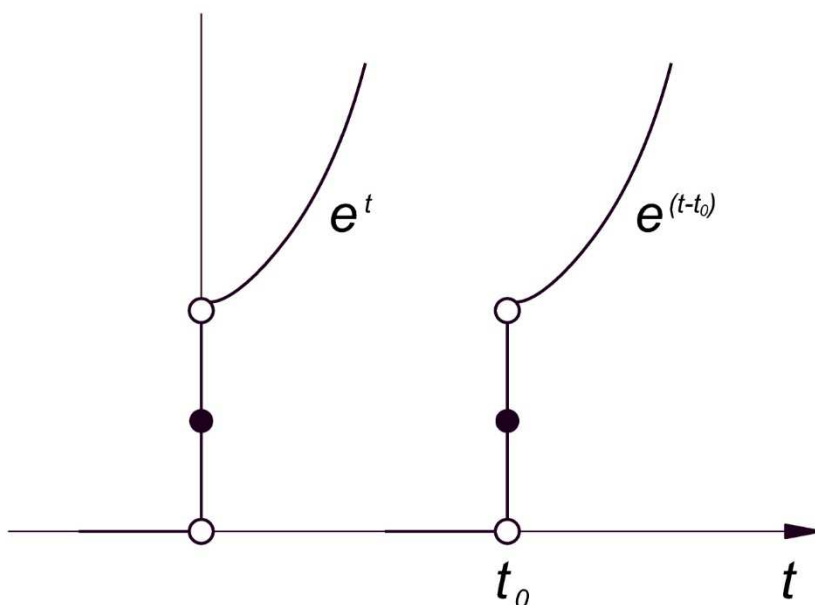


Rys. 7.1 Funkcja Heaviside'a $\eta(t-t_0)$: a) $t_0 = 0$, b) $t_0 \neq 0$

Operację polegającą na przemnożeniu funkcji $f(t-t_0)$ przez funkcję Heaviside'a $\eta(t-t_0)$ nazywamy gaszeniem funkcji. Przykłady funkcji zgaszonych zostały przedstawione na rys. 7.2 $\sin(t-t_0) \equiv \eta(t-t_0) \sin(t-t_0)$ i rys. 7.3 $[e^{(t-t_0)} \equiv \eta(t-t_0) e^{(t-t_0)}]$



Rys. 7.2 Zgaszona funkcja $\sin(t-t_0)$



Rys. 7.3 Zgaszona funkcja $e^{(t-t_0)}$

Zauważmy, że funkcja Heaviside'a spełnia warunki Dirichleta w każdym przedziale skończonym, natomiast nie jest rozwijalna na całkę Fouriera, gdyż nie jest bezwzględnie całkowalna na całej osi rzeczywistej.

7.9 Prawostronne zespolone przekształcenie Laplace'a.

Zakładając, że funkcję $\eta(t)f(t)$ można poddać przekształceniu Fouriera, zdefiniujemy następujące przekształcenia:

WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \stackrel{df}{=} \Phi[f(t)] \quad (7.46)$$

$$\eta(t) f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \stackrel{df}{=} \Phi^{-1}[F(\omega)] \quad (7.47)$$

Wzór (7.46) nosi nazwę prostego prawostronnego przekształcenia Fouriera, zaś (7.47) odwrotnego prawostronnego zespolonego przekształcenia Fouriera.

W prawostronnym zespolonym przekształceniu Fouriera będziemy zapisywać funkcję transformowaną zamiast $\eta(t) f(t)$ krótko $f(t)$, uważając ją od razu za zgaszoną. Wtedy w formule (7.47) można pominąć $\eta(t)$. Załozmy teraz, że funkcja $f(t)$ i jej pochodna $f'(t)$ są oryginałami przekształcenia Fouriera i przyjmijmy założenia:

$$f(t) \rightarrow 0, \quad f'(t) \rightarrow 0, \quad \int_0^t f(\tau) d\tau \rightarrow 0, \quad \text{gdy } t \rightarrow \infty \quad (7.48)$$

Oraz

$$f(0+) = k_0, \quad f'(0+) = k_1 \quad (7.49)$$

Wtedy

$$\Phi[f'(t)] = \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-j\omega t} dt = [f(t) e^{-j\omega t}]_0^{\infty} + j\omega \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = -k_0 + j\omega F(\omega) \quad (7.50)$$

$$\Phi[f''(t)] = -k_1 - j\omega k_0 + (j\omega)^2 F(\omega) \quad (7.51)$$

$$\Phi\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{j\omega} F(\omega) \quad (7.52)$$

Przy odpowiednich założeniach dotyczących całek $f(t)$.

7.10 Splot.

Zauważmy, że wszystkie dotychczas przez nas poznane przekształcenia są liniowe. Zapiszmy ten fakt, np. dla dwustronnego zespolonego przekształcenia Fouriera, oznaczając:

$$F_z(\omega) = \Phi_z[f(t)], \quad G_z[\omega] = \Phi_z[g(t)]$$

I zakładając istnienie wprowadzonych wyżej funkcji i odwrotnych transformat Fouriera. Zachodzą mianowicie następujące równości:

$$\Phi_z[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha F_z[\omega] + \beta G_z[\omega] \quad (7.53)$$

$$\alpha f(t) + \beta g(t) = \Phi_z^{-1}[\alpha F_z[\omega] + \beta G_z[\omega]] \quad (7.54)$$

Dowód tych własności opiera się na liniowości całki oznaczonej.

WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Równość (7.53) można wyśłowić:

Obrazem kombinacji liniowej oryginałów jest taka sama kombinacja liniowa obrazów.

Równość (7.54) :

Oryginałem kombinacji liniowej oryginałów jest taka sama kombinacja liniowa oryginałów.

Zakładając teraz, że obie funkcje $f(t)$ i $g(t)$ są całkwalne z kwadratem, poszukujemy związku między oryginałami, odpowiadającego iloczynowi obrazów tych funkcji. W tym celu wyrażmy iloczyn obrazów za pomocą całki podwójnej

$$\begin{aligned} F_z(\omega)G_z(\omega) &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau_1) e^{-j\omega\tau_1} d\tau_1 \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_2) e^{-j\omega\tau_2} d\tau_2 \right) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau_1)g(\tau_2) e^{-j\omega(\tau_1+\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (7.55)$$

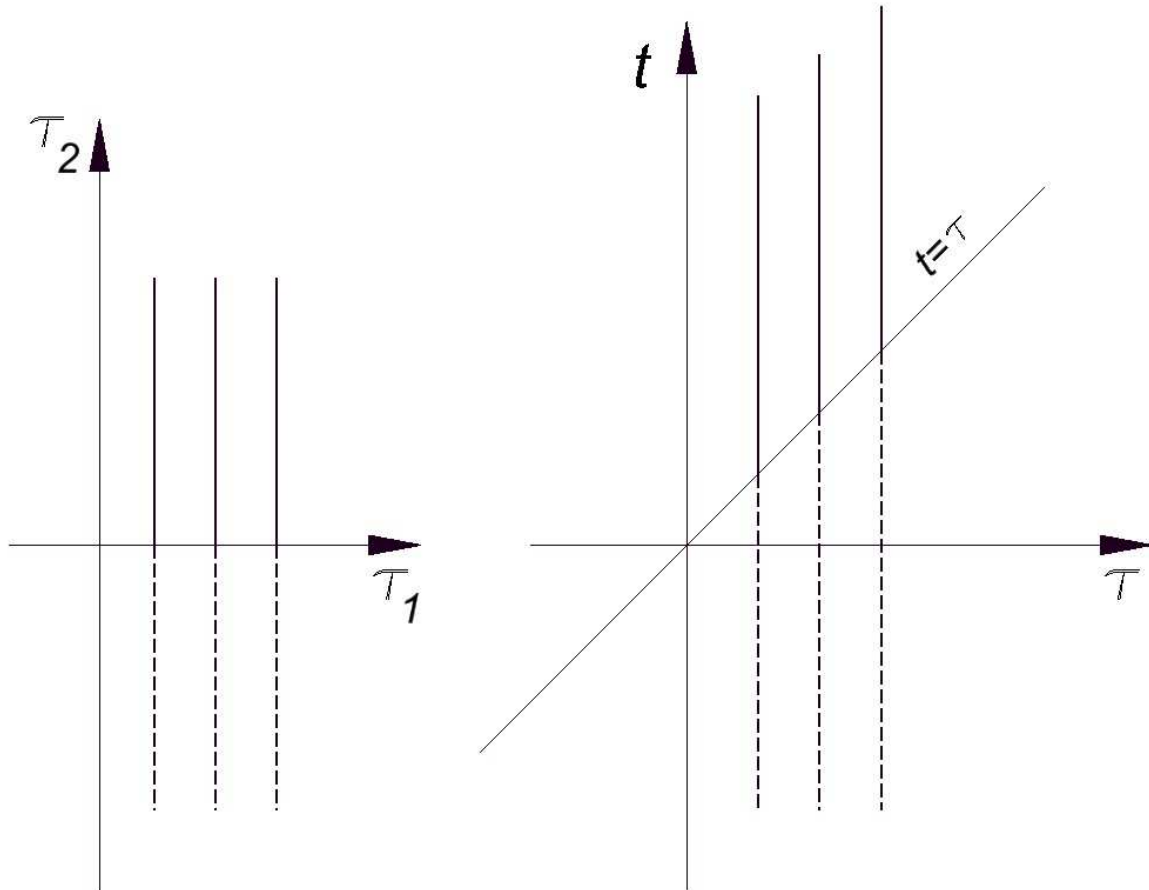
A następnie zastosujemy zamianę zmiennych τ_2 i τ_1 na zmienne t, τ .

$$\tau_1 + \tau_2 = t, \quad \tau_1 = \tau, \quad \text{czyli} \quad \tau_2 = t - \tau \quad (7.56)$$

Jakobian tej zmiany jest równy 1:

$$\frac{\partial(\tau_1, \tau_2)}{\partial(\tau, t)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Jest przekształcenie płaszczyzny τ_1, τ_2 w płaszczyznę t, τ .



Rys. 7.3 Przekształcenie płaszczyzny τ_1, τ_2 w płaszczyznę t, τ

Zauważymy, że przy tym przekształceniu pierwsza ćwiartka opisująca się nierównościami (rys. 7.3) :

$$\tau_1 > 0, \quad \tau_2 > 0$$

Zostaje odwzorowana na obszar opisujący się nierównościami

$$0 < \tau < t, \quad t > 0$$

Wyraźmy całkę, występującą w iloczynie obrazów (7.55), za pomocą całki iterowanej w nowym układzie współrzędnych. Będzie wtedy

$$F_z(\omega)G_z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \quad (7.57)$$

Całkę wewnętrzną w prawej stronie zależności (7.57) oznaczmy:

$$f_1 * f_2 \stackrel{df}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \quad (7.58)$$

I nazywamy splotem lub konwolicją funkcji $f_1(t)$ i $f_2(t)$.

Symbol „ * ” nazywamy symbolem splatania lub mnożenia splotowego.

Wobec definicji (7.58) możemy zależność (7.57) zapisać

WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

$$F_z(\omega)G_z(\omega) = \Phi_z(f * g) = \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)e^{-j\omega t} dt \quad (7.59)$$

Co jest treścią twierdzenia Borela:

Twierdzenie Borela

W zespolonym przekształceniu Fouriera mnożeniu obrazów odpowiada splatanie oryginałów.

Posługując się odwrotnym przekształceniem Fouriera możemy zależność (7.59) zapisać w postaci zwanej wzorem całkowym Fouriera dla splotu funkcji:

$$\Phi_z^{-1}[F_z G_z] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_z(\omega)G_z(\omega)e^{-j\omega t} d\omega = f * g \quad (7.60)$$

Podstawowymi własnościami splatania są:

przemienność

$$f_1 * f_2 = f_2 * f_1 \quad (7.61)$$

łączność

$$(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3) \quad (7.62)$$

Można wykazać, że jeżeli $f_1(t)$ i $f_2(t)$ są bezwzględnie całkowalne w przedziale $(-\infty, +\infty)$ oraz

a) co najmniej jedna z nich jest w przedziale $(-\infty, +\infty)$ ograniczona lub

b) obie funkcje są całkowalne z kwadratem w przedziale $(-\infty, +\infty)$, to splot tych funkcji jest w przedziale $(-\infty, +\infty)$ funkcją ciągłą.

W prawostronnym zespolonym przekształceniu Fouriera występuje funkcja zgaszona. Dla takiej funkcji definicja splotu podana wzorem (7.58) ma postać:

$$f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \quad (7.63)$$

Gdzie

$$f_1(\tau) \equiv \eta(\tau) f_1(\tau), \quad f_2(t-\tau) = \eta(t-\tau) f_2(t-\tau)$$

Oczywiście zachowują się poprzednio wykazane własności splotu, a mianowicie przemienność i łączność. Splot zapisany równością (7.63) nazywamy niekiedy prawostronnym splotem funkcji f_1 i f_2 .

Robiąc analogiczne założenia co do funkcji oraz tę samą zamianę zmiennych (7.56) i obliczając iloczyn prawostronnych zespolonych transformat otrzymujemy:

WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

$$\begin{aligned} F(\omega)G(\omega) &= \left[\int_0^{\infty} f(\tau_1) e^{-j\omega\tau_1} d\tau_1 \right] \left[\int_0^{\infty} g(\tau_2) e^{-j\omega\tau_2} d\tau_2 \right] = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\tau_1) g(\tau_2) e^{-j\omega(\tau_1 + \tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= \int_0^{\infty} \left[\int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt = \Phi(f * g) \end{aligned}$$

Z czego wynika, że twierdzenie Borela jest prawdziwe także w przypadku prawostronnego zespolonego przekształcenia Fouriera.