Wykład VI

Przekształcenia całkowe. Szereg Fouriera.

6.1 Szereg Fouriera.

6.1.1 Wielomian trygonometryczny w postaci rzeczywistej.

Wielomianem trygonometrycznym n-tego stopnia nazywamy sumę:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\frac{\pi x}{l} + b_1 \frac{\pi x}{l} + \\ &+ a_2 \cos\frac{2\pi x}{l} + b_2 \sin\frac{2\pi x}{l} + \ldots\ldots + a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l} \end{aligned} \tag{6.1}$$

Funkcje trygonometryczne $\cos \omega x \quad i \quad \sin \omega x$ są funkcjami okresowymi o okresie

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Wobec czego funkcje $\cos\frac{k\pi x}{l}$ i $\sin\frac{k\pi x}{l}$ maja okres

$$T = \frac{2l}{k}$$

Wspólnym okresem funkcji trygonometrycznych tworzących wielomian (6.1) jest $T = 2l$, przeto powyższy wielomian f(x) jest funkcją okresową o okresie 2l dla każdego naturalnego n. Zapisujemy to równością

$$f(x+2l) = f(x) \quad \left(x \in (-\infty, \infty)\right) \tag{6.2}$$

Każdy składnik sumy $\sum_{k=1}^{n}$ w wielomianie (6.1) można przedstawić jako sinusoidę z odpowiednim przesunięciem fazy, a mianowicie:

$$a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l} = A_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l} + \varphi_k\right) \tag{6.3}$$

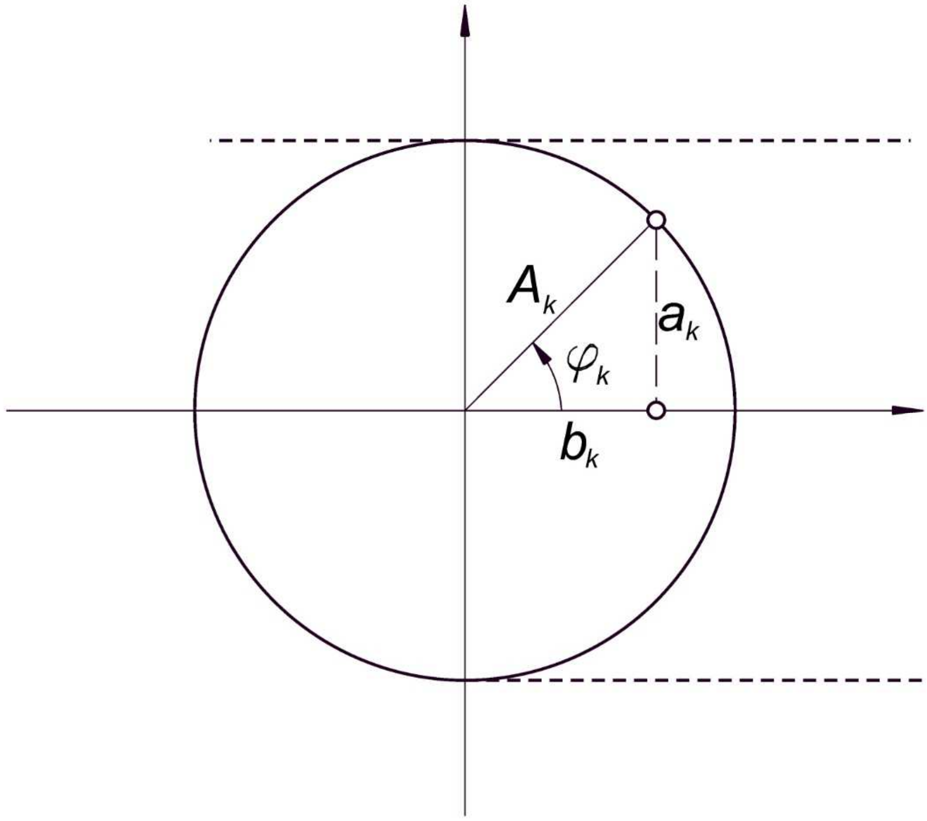
Związki zachodzące miedzy współczynnikami a_k, b_k oraz amplitudą A_k i przesunięciem fazy φ_k otrzymamy, korzystając ze znanego wzoru trygonometrycznego:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha * \cos\beta + \cos\alpha * \sin\beta \tag{6.4}$$

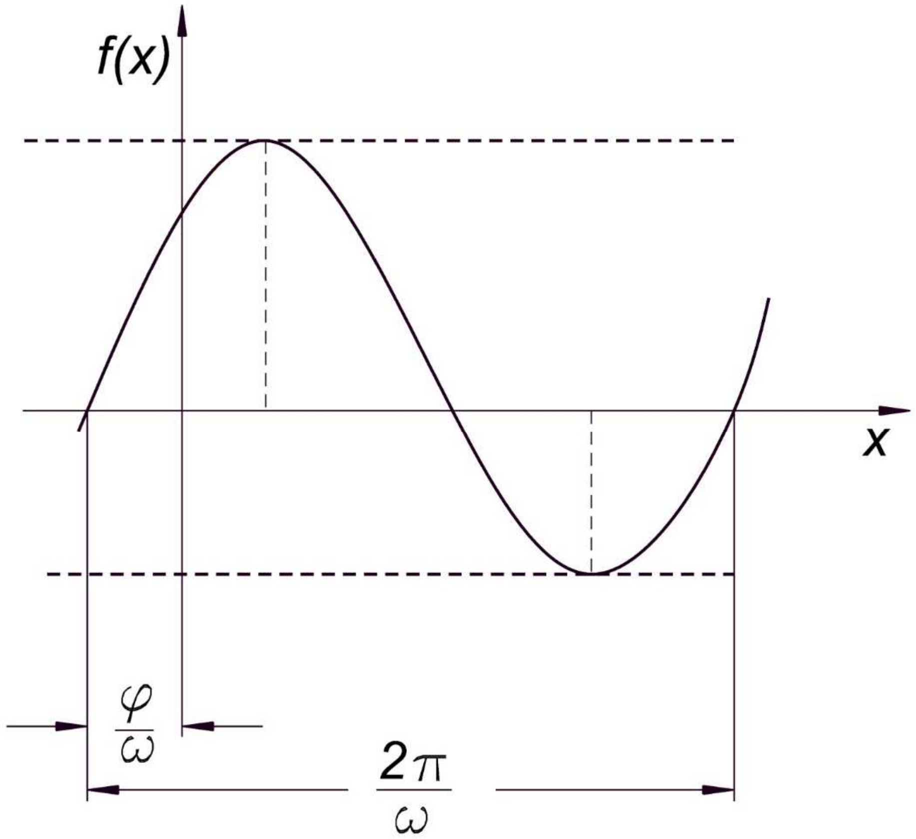
Jest wtedy

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad a_k = A_k \sin\varphi_k, \quad b_k = A_k \cos\varphi_k \tag{6.5}$$

Na rys. 6.1 przedstawiono związki miedzy współczynnikami wyrażenia trygonometrycznego (6.3) zaś na rys. 6.2 przestawiono wykres sinusoidy o pulsacji $\omega = k\pi / l$ i przesuniętej w fazie o φ / ω .



Rys. 6.1 Związki miedzy współczynnikami wyrażenia trygonometrycznego (6.3)



Rys. 6.2 Wykres sinusoidy o pulsacji $\omega = k\pi / l$ i przesuniętej w fazie o φ / ω

Dzięki związkowi (6.3) można wielomian (6.1) przedstawić w postaci:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l} + \varphi_k\right) \tag{6.6}$$

6.1.2. Wielomian trygonometryczny w postaci zespolonej

Znane z algebry liczb zespolonych wzory Eulera:

$$\begin{aligned} \cos(\omega x) &= \frac{1}{2}\left(e^{j\omega x} + e^{-j\omega x}\right) \\ \sin(\omega x) &= \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega x} - e^{-j\omega x}\right) \end{aligned} \tag{6.7}$$

Pozwalają wyrażeniu (6.3) nadać postać zespoloną:

$$a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) = c_k e^{j\frac{k\pi x}{l}} + \overline{c}_k e^{-j\frac{k\pi x}{l}} \tag{6.8}$$

gdzie przez c_k i $\overline{c}_k$ oznaczone zostały następujące współczynniki zespolone w przypadku k=1,2,…,n

$$c_k \overset{df}{=} \frac{1}{2}(a_k - jb_k), \quad \overline{c}_k \overset{df}{=} \frac{1}{2}(a_k + jb_k) \tag{6.9}$$

Oddzielnie przyjmijmy oznaczenie:

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0 \tag{6.10}$$

Jeżeli rozszerzyć zbiór wartości liczbowych przybieranych przez wskaźnik k na wszystkie liczby całkowite od –n do n, to wielomian (6.1) będzie można nadać postać zespoloną:

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{j\frac{k\pi x}{l}} \quad \left(c_{-k} = \overline{c}_k\right) \tag{6.11}$$

6.1.3 Szereg trygonometryczny w postaci rzeczywistej.

Szeregiem trygonometrycznym nazywamy wyrażenie:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{6.12}$$

Sumą szeregu (6.12) zgodnie z ogólną definicją sumy szeregu funkcyjnego, nazywamy granicę ciągu sum częściowych, będących wielomianami trygonometrycznymi:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + b_k \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \quad (n = 1, ...) \tag{6.13}$$

Jak wiemy, sumy częściowe są funkcjami okresowymi o wspólnym dla wszystkich n okresie równym 2l

$$S_n(x + 2l) = S_n(x) \tag{6.14}$$

Jeżeli ciąg $\{S_n(x)\}$ ma granicę, to oznaczamy ją symbolem $f(x)$ i piszemy

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{6.15}$$

Wspólny okres wszystkich wyrazów szeregu (6.15) powoduje, że suma szeregu jest funkcją o tym samym okresie jaki mają wyrazy szeregu. Zachodzi mianowicie równość:

$$f(x + 2l) = f(x) \tag{6.16}$$

Dla wszystkich x, dla których szereg (6.12) jest zbieżny.

6.1.4. Wzory Eulera Fouriera.

W celu znalezienia związku miedzy współczynnikami a_k i b_k szeregu (6.12)załóżmy, że jest on w przedziale $[-l, l]$ jednostajnie zbieżny do sumy $f(x)$. Wtedy funkcja (6.15) jest ciągła w tym przedziale , zaś szereg można w tym przedziale całkować wyraz po wyrazie.

Jeżeli każdy wyraz szeregu (6.15) pomnożymy przez funkcję ciągłą w przedziale $[-l, l]$ to otrzymany w ten sposób nowy szereg będzie nadal jednostajnie zbieżny w tym przedziale i będzie go można w tym przedziale całkować wyraz po wyrazie. W trakcie wykonywania rachunków pojawią się pewne całki, które łatwo jest obliczyć, posługując się znanymi wzorami trygonometrycznymi:

$$\begin{aligned}&\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha),\quad \sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)\\&\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]\\&\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]\\&\sin\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right]\end{aligned}\tag{6.17}$$

Dla naturalnych m i n zachodzą następujące równości:

$$\begin{aligned}&\int_{-l}^{l}1dx=2l,\quad \int_{-l}^{l}\cos^2\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx=\int_{-l}^{l}\sin^2\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx=l\\&\int_{-l}^{l}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx=\int_{-l}^{l}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx=0,\quad \int_{-l}^{l}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx=0,\\&\int_{-l}^{l}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx=\int_{-l}^{l}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx=0,\quad (n\neq m)\end{aligned}\tag{6.18}$$

W celu obliczenia a_0 scałkujemy szereg (6.15) w przedziale $[-l,l]$. Otrzymamy

$$\int_{-l}^{l}f(x)dx=\frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l}1dx+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{-l}^{l}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx+b_n\int_{-l}^{l}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx=a_0 l$$

Co wobec wzorów (6.18) daje

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)dx\tag{6.19}$$

Znaczenie geometryczne współczynnika $\frac{a_0}{2}$ jest następujące: jest to średnia wartość funkcji $f(x)$ w przedziale $[-l,l]$.

Aby obliczyć następnie współczynnik a_n dokonajmy najpierw zmiany wskaźnika sumacyjnego w granicy (6.15). Będzie wtedy

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)+b_m\cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\tag{6.20}$$

Następnie pomnóżmy obie strony równości (6.20) przez $\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ i scałkujmy w przedziale $[-l,l]$.

Po lewej stronie wystąpi całka:

$$\int_{-l}^{l}f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

Zaś po prawej stronie szereg utworzony z następujących całek:

$$\frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)=0$$

$$a_m\int_{-l}^{l}\cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx=\begin{cases}0\ gdy\ m\neq n\\ la_n\ gdy\ m=n\end{cases}$$

$$b_m\int_{-l}^{l}\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx=0$$

Wobec powyższego

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-1}^{1}f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\quad(n=1,2,......)\tag{6.21}$$

Analogicznie mnożąc równość (6.20) przez $\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ i całkując w przedziale $[-l,l]$ otrzymamy:

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-1}^{1}f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\quad(n=1,2,......)\tag{6.22}$$

Wzory (6.19), (6.21), (6.22) zwane wzorami Eulera-Fouriera zapiszemy łącznie:

$$\begin{matrix}a_n\\ b_n\end{matrix}=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}f(x)*\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\quad(n=0,1,2...)\tag{6.23}$$

6.1.5 Szereg trygonometryczny w postaci zespolonej.

Szereg trygonometryczny (6.12) można przedstawić w postaci zespolonej:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{j\frac{n\pi x}{l}}\quad\left(c_{-n}=\overline{c}_n\right)\tag{6.24}$$

Przypisując mu sumę $f(x)$ będącą granicą ciągu sum częściowych $\{S_n(x)\}$ o wyrazach:

$$S_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}c_k e^{j\frac{k\pi x}{l}}\tag{6.25}$$

Jeżeli, jak w poprzednim paragrafie, założymy jednostajną zbieżność szeregu (6.24) w przedziale , $[-l,l]$, to:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{j\frac{n\pi x}{l}}\tag{6.26}$$

Posługując się wzorami (6.9), (6.23) można będzie dla zespolonych współczynników c_n napisać analogiczne do (6.23) wzory Eulera-Fouriera:

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-j\frac{n\pi x}{l}} dx \quad (n = ...-2,-1,0,1,2,.......) \tag{6.27}$$

6.2 Funkcja całkowalna z kwadratem.

Jak wiemy funkcją całkowalną w przedziale $[a,b]$ nazywamy taką rzeczywistą funkcję $f(x)$, dla której istnieje całka (właściwa lub niewłaściwa) w tym przedziale, tzn., że

$$\int_a^b f(x) dx < \infty \tag{6.28}$$

Funkcją całkowalną z kwadratem w przedziale $[a,b]$ nazywamy taką funkcję $f(x)$, której kwadrat jest całkowalny w tym przedziale, mianowicie

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx < \infty \tag{6.29}$$

Definicja

Funkcja ciągła w przedziale domkniętym jest całkowalna z kwadratem w tym przedziale. Funkcja całkowalna i ograniczona też jest całkowalna z kwadratem.

Jeżeli funkcja jest całkowalna, ale nieograniczona (np. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ w przedziale $[0,1]$), to może nie być całkowalna z kwadratem. Natomiast funkcja całkowalna z kwadratem w przedziale jest w nim całkowalna.

Dla funkcji całkowalnych z kwadratem w przedziale $[a,b]$ zachodzi nierówność Schwarza:

$$\left(\int_a^b fg dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2 dx\right)\left(\int_a^b g^2 dx\right) \tag{6.30}$$

Wynikająca z następującej nierówności:

$$\int_a^b (f + \lambda g)^2 dx = \int_a^b f^2 dx + 2\lambda \int_a^b fg dx + \lambda^2 \int_a^b g^2 dx \ge 0 \tag{6.31}$$

Prawdziwej dla każdej rzeczywistej wartości parametru λ . Nierówność (6.30) jest równoważna stwierdzeniu, że wyróżnik trójmianu kwadratowego względem λ , występującego w nierówności (6.31) jest niedodatni.

W dalszym ciągu będziemy formułować niektóre definicje i twierdzenia dla funkcji całkowalnych z kwadratem.

6.3 Szereg Fouriera.

Definicja

Szeregiem Fouriera rzeczywistej funkcji $f(x)$ całkowalnej z kwadratem w przedziale $[-l,l]$ nazywamy szereg trygonometryczny o postaci (6.12), którego współczynniki są współczynnikami Eulera-Fouriera.

………..

To, że szereg (6.12) jest szeregiem Fouriera funkcji $f(x)$, zapisujemy kładąc miedzy symbolem funkcji a zapisem szeregu znak „~”, mianowicie:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{6.32}$$

Znak „odpowiedniości” miedzy funkcją a jej szeregiem Fouriera nie można zastąpić w ogólnym przypadku znakiem równości, gdyż szereg Fouriera danej funkcji może być w poszczególnych punktach w przedziale $[-l,l]$ rozbieżny, a jeżeli jest zbieżny wszędzie, to jego suma i tak może w pewnych punktach nie być identyczna z wartością funkcji $f(x)$.

Definicja

Jeżeli szereg funkcji $f(x)$ ma sumę w każdym punkcie przedziału $[-l,l]$ równą wartości funkcji rozwijanej $f(x)$ to mówimy, że funkcja $f(x)$ jest w przedziale $[-l,l]$ rozwijalna w szereg Fouriera.

………..

Piszemy wtedy:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{6.33}$$

Dowodzi się, że na to, by funkcja $f(x)$ była w przedziale $[-l,l]$ rozwijalna w szereg Fouriera wystarcza, by spełniała w tym przedziale warunki zwane warunkami Dirichleta.

Mówimy, że funkcja $f(x)$ spełnia w przedziale $[a,b]$ warunki Dirichleta, jeżeli:

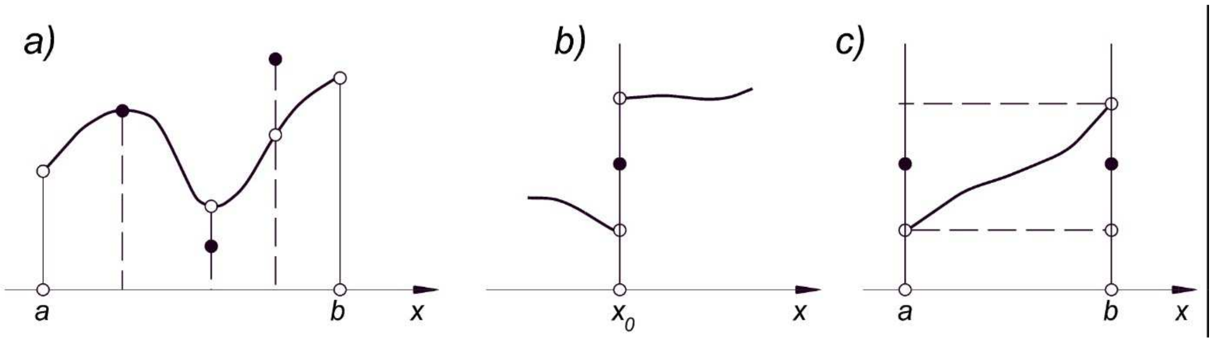
1) Przedział $[a,b]$ można podzielić na skończona ilość przedziałów otwartych, w których $f(x)$ jest monotoniczna,
2) W każdym punkcie przedziału $[a,b]$ zachodzi następująca równość

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[f(x-0) + f(x+0)\right] \tag{6.34}$$

3) W punktach brzegowych przedziału $[a,b]$ zachodzi równość

$$f(a) = \frac{1}{2}\left[f(a+0) + f[b-0]\right] \tag{6.35}$$

Pierwszy z warunków Dirichleta ilustruje rys. 6.2a, drugi rys. 6.2b, a trzeci rys. 6.2c.



Rys. 6.2 Zobrazowanie warunków Dirichleta.

Warunek drugi mówi o tym, że w każdym punkcie przedziału $[a,b]$ funkcja ma granice jednostronne oraz jej wartość jest równa średniej arytmetycznej tych granic.

Funkcję $f(x)$, która w każdym punkcie ma jednostronne skończone granice oraz jednostronne skończone granice swojej pochodnej, nazywamy funkcjami przedziałami regularną.

Ma ona wtedy najwyżej nieciągłości zwane nieciągłościami pierwszego rodzaju i zachodzi dla niej następująca równość:

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)+b_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{6.36}$$

Twierdzenie

Można dowieść, że funkcja ciągła i regularna w przedziale jest rozwijalna w szereg Fouriera bezwzględnie i szereg jest jednostajnie zbieżny.

……

Szereg Fouriera danej funkcji można zapisać w postaci zespolonej (6.24). Odnoszą się do niego wszystkie przedstawione powyżej rozważania.

6.3.1 Szereg Fouriera funkcji nieparzystej lub parzystej.

Twierdzenie

Jeżeli $f(x)$ jest w przedziale $[-l,l]$ funkcją nieparzystą, tzn. jeżeli $f(-x)=-f(x)$ w tym przedziale, to jej szereg Fouriera redukuje się do szeregu zbudowanego z samych sinusów, mianowicie:

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{6.37}$$

Dowód

Jest tak dlatego, że współczynniki a_n (n=0,1,2….) oblicza się całkując funkcje nieparzyste w przedziale symetrycznym względem początku układu współrzędnych. Współczynniki b_n (n=1,2,….) można wtedy obliczyć wzorem:

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx \tag{6.38}$$

Wynikającym ze wzorów (6.23), gdyż występujące w nich funkcje podcałkowe są parzyste (iloczyn funkcji nieparzystej i parzystej jest funkcją nieparzystą, zaś iloczyn dwu funkcji nieparzystych lub dwu funkcji parzystych jest funkcją parzystą).

Twierdzenie

Jeżeli $f(x)$ jest w przedziale $[-l,l]$ parzysta, to analogicznie do (6.37) i (6.38) otrzymamy:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{6.39}$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx \quad (n = 0,1,2,.......) \tag{6.40}$$

6.3.2 Szereg Fouriera według samych sinusów lub samych cosinusów.

Twierdzenie

Niech funkcja $f(x)$ określona w przedziale $(0,l)$ spełnia w nim pierwszy i drugi warunek Dirichleta. Wykażemy, że wtedy w tym przedziale można ją przedstawić za pomocą jej szeregu Fouriera, zbudowanego wyłącznie z samych cosinusów lub samych sinusów, w sposób następujący:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad \left(x \in (0,l)\right) \tag{6.41}$$

gdzie a_n i b_n oblicza się wzorami (6.40) i (6.38).

Dowód

Jeżeli chcemy przedstawić $f(x)$ za pomocą samych cosinusów, to przedłużamy $f(x)$ na przedział $[-l,l]$ tworząc pomocnicza funkcję $\varphi(x)$ określoną równościami:

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(l-0) & dla\ x = -l \\ f(-x) & dla\ -l < x < 0 \\ f(0+0) & dla\ x = 0 \\ f(x) & dla\ 0 < x < l \\ f(l-0) & dla\ x = l \end{cases} \tag{6.42}$$

Tak określona funkcja $\varphi(x)$ spełnia w $[-l,l]$ wszystkie warunki Dirichleta, wiec jest rozwijalna w szereg Fouriera i jest parzysta, zatem stosują się do rozważania dotyczące funkcji parzystych powyżej.

Jeżeli teraz ograniczymy się do przedziału $(0,l)$, w którym funkcje $f(x)$ i $\varphi(x)$ są identyczne to otrzymamy tezę dowodzonego twierdzenia.

Analogicznie, gdy funkcję $f(x)$ przedstawić za pomocą samych sinusów, budujemy funkcję pomocniczą:

$$\varphi(x)=\begin{cases} 0 \quad dla\ x=-l \\ -f(-x) \quad dla\ -l<x<0 \\ 0 \quad dla\ x=0 \\ f(x) \quad dla\ 0<x<l \\ 0 \quad dla\ x=l \end{cases} \tag{6.43}$$

Dalszy tok rozumowania jest identyczny jak w przypadku poprzednim. Będziemy mówić, że funkcja $\varphi(x)$ określona wzorami (6.42) jest parzystym przedłużeniem $f(x)$ zaś określona wzorami (6.43) nieparzystym jej przedłużeniem.

Przykład obliczeniowy

Treść zadania 1

Rozwinąć wg samych sinusów funkcję

$$f(x)=x(l-x)$$

Określoną w przedziale $(0,l)$.

Rozwiązanie

Jak wiadomo, funkcję tę można przedstawić w postaci

$$f(x)==\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (x\in(0,l))$$

Gdzie współczynniki b_n oblicza się wzorami Eulera-Fouriera:

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx \quad (n=1,2,.....)$$

Mamy więc:

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l x(l-x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx=\frac{2}{l}\left[-\frac{1}{n\pi}x(l-x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\Bigg|_0^l+\frac{l}{n\pi}\int_0^l(1-2x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\right]$$

Pierwszy wyraz w nawiasie kwadratowym jest zerem dla dolnej i górnej granicy całkowania, stąd

$$b_n=\frac{2}{n\pi}\int_0^l(l-2x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx=\frac{2}{n\pi}\left[\frac{l}{n\pi}(l-2x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\Bigg|_0^l+\frac{2l}{n\pi}\int_0^l\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\right]$$

Pierwszy wyraz w nawiasie kwadratowym jest zerem dla dolnej i górnej granicy, więc

$$b_n = \frac{4l}{(n\pi)^2}\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx = \frac{4l^2}{(n\pi)^3}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\Bigg|_0^l = \frac{4l^2}{(n\pi)^3}\left(1-(-1)^n\right)$$

Stąd

$$b_n = \frac{8l^2}{(n\pi)^3}$$

gdy n=1,3,5,…,2k+1,…

$$b_n = 0$$

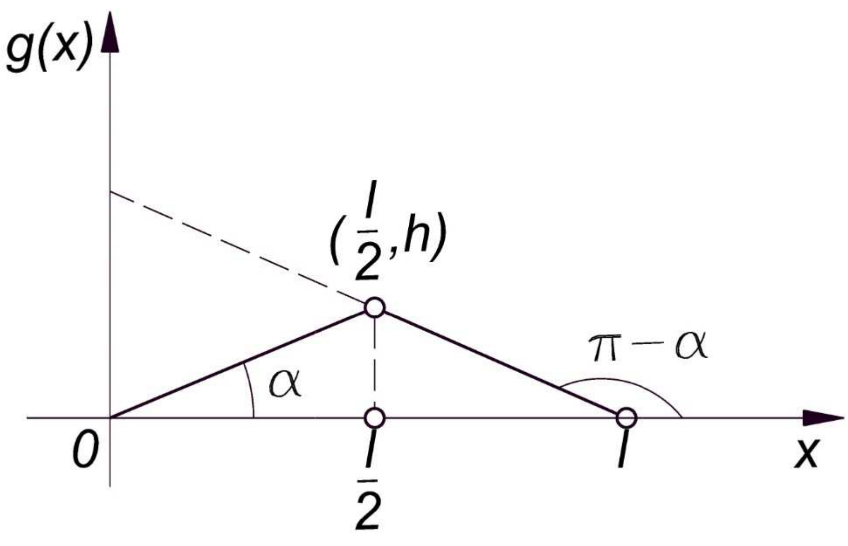
gdy n=2,4,6,…,2k,..

Rozwiązaniem zadania jest:

$$f(x) = x(l-x) = \frac{8l^2}{\pi^3}\left[\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \frac{1}{3^3}\sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right) + \frac{1}{5^3}\sin\left(\frac{5\pi x}{l}\right) + \dots\dots\dots\right] \quad \left(x \in (0,l)\right)$$

Treść zadania 2

Rozwinąć wg samych sinusów funkcję przedstawioną na rys. 6.3 w przedziale $[0,l]$.



Rys. 6.3 przebieg funkcji $f(x)$

Rozwiązanie

Funkcja ta jest w następujący sposób zadana analitycznie:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2hx}{l}, & gdy\ x\in\left[0,\dfrac{l}{2}\right] \\ 2h-\dfrac{2hx}{l}, & gdy\ x\in\left[\dfrac{l}{2},l\right] \end{cases}$$

Oznaczając

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Obliczamy współczynnik b_n za pomocą wzoru

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx \quad (n=1,2,.....)$$

Mamy więc:

$$b_n=\frac{2}{l}\left\{\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{2h}{l}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx+\int_{\frac{l}{2}}^{l}\left(2h-\frac{2hx}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\right\}=$$

$$=\frac{2}{l}\left\{-\frac{l}{n\pi}\frac{2h}{l}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\Bigg|_0^{\frac{l}{2}}+\frac{2h}{n\pi}\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx+\right.$$

$$\left.-\frac{2}{n\pi}\left(2h-\frac{2hx}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\Bigg|_{\frac{l}{2}}^{l}-\frac{2h}{n\pi}\int_{\frac{l}{2}}^{l}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\right\}$$

Wyrażenia, w których podstawiamy granice dają wartość zero, wiec:

$$b_n=\frac{4h}{n\pi l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx-\int_{\frac{l}{2}}^{l}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\right]=\frac{4h}{(n\pi)^2}\left[\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\Bigg|_0^{\frac{l}{2}}-\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\Bigg|_{\frac{l}{2}}^{l}\right]=\frac{8h}{(n\pi)^2}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

Stąd

$$b_n=\frac{8h}{(n\pi)^2}, \quad gdy\ n=1,5,.......,4k+1,..$$

$$b_n=-\frac{8h}{(n\pi)^2}, \quad gdy\ n=3,7,....,4k+3,...$$

$$b_n=0, \quad gdy\ n=2,4,6,...,2k,..$$

Rozwiązaniem zadania jest więc:

$$f(x)=\frac{8h}{\pi^2}\left[\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)-\frac{1}{3^2}\sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right)+\frac{1}{5^2}\sin\left(\frac{5\pi x}{l}\right)-\frac{1}{7^2}\sin\left(\frac{7\pi x}{l}\right)+........\right] \quad dla\ x\in[0,l]$$

7. Funkcje zespolone zmiennej zespolonej.

Nich będzie dany zbiór elementów z, będących liczbami zespolonymi. Jeżeli każdemu elementowi tego zbioru przyporządkowana jest liczba zespolona Z, to mówimy, ze w zbiorze D została określona funkcja zespolona zmiennej zespolonej. Oznaczymy ja np. symbolem f, pisząc Z=f(z) $(z\in D)$.

Zbiór D nazywamy dziedziną funkcji f, zaś zbiór D' – złożony z elementów, będących wartościami funkcji f, przeciwdziedziną tej funkcji.

Jeżeli z=x+jy, zaś Z=X+jY, to wtedy

$$X+jY=f(x+jy) \tag{6.44}$$

Zależność tę można zapisać w postaci układu dwu funkcji rzeczywistych dwu zmiennych rzeczywistych:

$$X=X(x,y) \quad Y=Y(x,y) \tag{6.45}$$

Od układu funkcji (6.45) można przejść do funkcji zmiennej zespolonej Z=f(z). W tym celu w zależności

$$Z=X(x,y)+jY(x,y) \tag{6.46}$$

Wystarczy na miejsce x wstawić $re\ z=\frac{1}{2}(z+\overline{z})$ zaś na miejsce y $im\ z=\frac{1}{2j}(z-\overline{z})$ co zapisujemy

$$Z=\left[X(x,y)+Y(x,y)\right]\Big|_{x=\frac{1}{2}(z+\overline{z}),\ y=\frac{1}{2}(z-\overline{z})} \tag{6.47}$$

Wobec tego każda funkcja zespolona (6.44) zmiennej zespolonej jest równoważna pewnemu układowi (6.45) dwu funkcji rzeczywistych dwu zmiennych rzeczywistych.

Dla przykładu niech $Z=z^2$. Jest wtedy

$$X+jY=(x+jy)^2=(x^2-y^2)+j2xy$$

Wobec czego

$$X=x^2-y^2 \quad Y=2xy$$

Jeżeli zbiór D jest linią

$$z=z(t)$$

To wtedy funkcja zespolona zmiennej zespolonej staje się funkcją zespoloną zmiennej rzeczywistej

$$Z=A\left[z(t)\right]$$

7.1 Pochodna funkcji zmiennej zespolonej.

Niech będzie dana funkcja zespolona zmiennej zespolonej w otoczeniu z_0 . Przyrostem funkcji $f(z)$ nazwiemy różnicę miedzy jej wartością w punkcie z, a wartością w punkcie z_0 i oznaczymy symbolem

$$\Delta Z \overset{df}{=} f(z) - f(z_0)$$

Przyrost ten odpowiada przyrostowi argumentu

$$\Delta z = z - z_0$$

Przyjęcie następujących oznaczeń:

$$\Delta x = x - x_0 \quad \Delta y = y - y_0$$
$$\Delta z = (x - x_0) + j(y - y_0) = \Delta x + j\Delta y$$
$$\Delta Z = \left[X(x,y) - X(x_0,y_0)\right] + j\left[Y(x,y) - Y(x_0,y_0)\right] = \Delta X + j\Delta Y$$

Pozwala iloraz różnicowy, czyli stosunek przyrostu funkcji do przyrostu zmiennej niezależnej, wyrazić za pomocą przyrostów funkcji rzeczywistych

$$\frac{\Delta Z}{\Delta z} = \frac{\Delta X + j\Delta Y}{\Delta x + j\Delta y} \tag{6.48}$$

Definicja

Pochodną funkcji $Z = f(z)$ w punkcie z_0 nazywamy granicę ilorazu różnicowego (6.48) tej funkcji w punkcie z_0 :

$$f'(z_0) \overset{df}{=} \lim_{\Delta z \to z_0} \frac{\Delta Z}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{6.49}$$

……

Posługując się definicją funkcji piszemy

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z) \right| < \varepsilon \quad gdy \quad |z - z_0| < \eta(\varepsilon)$$

Analogicznie jak w dziedzinie rzeczywistej dowodzi się, że funkcja mająca pochodną w punkcie z_0 , czyli różniczkowalna w tym punkcie jest w tym punkcie ciągła.

Załóżmy, że pochodna funkcji $Z = f(z)$ w punkcie z istnieje, tzn.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{6.50}$$

I obliczmy ją wybierając konkretne sposoby dążenia Δz do zera.

W pierwszym przypadku ustalamy drogę poziomą, tzn. dopuszczamy tylko takie punkty sąsiednie względem z_0 , które dadzą się zapisać w postaci $z_0 + \Delta x$, czyli $\Delta z = \Delta x$. Wtedy

$$f'(z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta X+j\Delta Y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta X}{\Delta x}+j\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta Y}{\Delta x}$$

Z istnienia granicy zespolonej, jak wiemy, wynika istnienie granic części rzeczywistej i części urojonej. Oznaczając:

$$X_x=\frac{\partial X(x,y)}{\partial x}\qquad Y_x=\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x}$$

Pochodne cząstkowe rzeczywistych funkcji dwu zmiennych, otrzymamy

$$f'(z)=X_x+jY_x \tag{6.51}$$

W drugim przypadku ustalamy drogę pionową tzn. dopuszczamy tylko takie punkty sąsiednie względem z, które dadzą się zapisać w postaci $z_0+j\Delta y$ czyli $\Delta z=j\Delta y$. Mamy wtedy

$$f'(z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta X+j\Delta Y}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta Y}{\Delta y}-j\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta X}{\Delta y}$$

Oznaczając

$$X_y=\frac{\partial X(x,y)}{\partial y}\qquad Y_y=\frac{\partial Y(x,y)}{\partial y}$$

Otrzymujemy pochodną:

$$f'(z)=Y_y-jX_y \tag{6.52}$$

Lewe strony równości (6.51) i (6.52) istnieją z założenia i są sobie równe, wobec czego warunek konieczny istnienia pochodnej $f'(z)$ otrzymamy w postaci:

$$X_x+jY_x=Y_y-jX_y$$

Twierdzenie

Warunkiem koniecznym istnienia pochodnej funkcji zespolonej $Z=f(z)=X+jY$ zmiennej zespolonej $z=x+jy$ jest spełnienie przez część rzeczywistą $X(x,y)$ i część urojoną $Y(x,y)$ tej funkcji układu równań różniczkowych:

$$X_x=Y_y\qquad X_y=-Y_x \tag{6.53}$$

…….

Równania te nazywamy równaniami Cauchy'ego – Riemanna, lub krótko C-R. Warunek ten nie jest dostateczny dla istnienia pochodnej. Można jednak udowodnić następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Gdy funkcja $f(z)$ jest ciągła to warunki C-R są warunkami wystarczającymi istnienia pochodnej $f'(z)$.

……….

Definicja

Funkcję, mająca pochodną w otoczeniu danego punktu, nazywamy funkcją holomorficzną w tym punkcie; jeżeli zaś jest ona holomorficzna w każdym punkcie obszaru, to nazywamy ja funkcją holomorficzną w obszarze.

……..

Niech będzie funkcja

$$f(z) = X + jY = z^2 = \left(x^2 - y^2\right) + j2xy$$

W każdym punkcie płaszczyzny jest ona ciągła, bo funkcje rzeczywiste

$$X = x^2 - y^2, \quad Y = 2xy$$

Są wszędzie ciągłe. Jednocześnie stwierdzamy, że spełnione są wszędzie równania C-R, tj.:

$$X_x = Y_y = 2x, \quad X_y = -Y_x = -2y$$

Wobec czego funkcja $Z = z^2$ jest holomorficzna w całej płaszczyźnie zmiennej zespolonej. Je j pochodną obliczamy wzorem (6.50) lub (6.52):

$$\left(z^2\right)' = 2x + j2y = 2\left(x + jy\right) = 2z \tag{6.54}$$

Definicja pochodnej w dziedzinie zespolonej jest formalnie taka sama jak w dziedzinie rzeczywistej, wobec czego wzory na różniczkowanie poznane w rachunku różniczkowym zmiennej rzeczywistej są słuszne i w dziedzinie zmiennej zespolonej. Dla przykładu:

$$\left(z^n\right)' = nz^{n-1} \tag{6.55}$$

7.2 Szeregi potęgowe.

Szeregiem potęgowym nazywamy szereg funkcyjny o postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z - z_0\right)^n = a_0 + a_1\left(z - z_0\right) + \ldots\ldots + a_n\left(z - z_0\right)^n + \ldots.. \tag{6.56}$$

Przy czym z_0 nazywa się środkiem szeregu (6.56). Szereg potęgowy jest oczywiście zbieżny w swoim środku i jego suma jest wtedy równa a_0 .

Przykładem szeregów potęgowych są szeregi Taylora i Laurenta.

7.2.1 Funkcja wykładnicza.

WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Jednym ze sposobów określania funkcji zmiennej zespolonej jest ich definiowanie przez analogię do rozwinięć funkcji zmiennej rzeczywistej na szeregi potęgowe. Wiemy na przykład, że funkcja wykładnicza w dziedzinie rzeczywistej e^x daje się przedstawić za pomocą szeregu potęgowego:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + .. = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{6.57}$$

Wszędzie zbieżnego. Funkcję wykładniczą e^z w dziedzinie zespolonej tak zdefiniujemy, by dla z=x była identyczna z funkcją e^x . Będzie tak, gdy przyjmiemy

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + ... + \frac{z^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{6.58}$$

Opierając się na tej zasadzie określimy funkcje trygonometryczne:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + ... \tag{6.59}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + ... \tag{6.60}$$

Stosując kryterium d'Alemberta stwierdzamy, że szeregi (6.58), (6.59) i (6.60) są zbieżne dla każdego z w płaszczyźnie zmiennej zespolonej.

Obliczmy teraz e^{jz} . Posługując się definicją (6.58) możemy zapisać:

$$\begin{gathered} e^{jz} = 1 + jz + \frac{(jz)^2}{2!} + \frac{(jz)^3}{3!} + \frac{(jz)^4}{4!} + ... = \\ \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + ...\right) + j\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + ...\right) \end{gathered} \tag{6.61}$$

Określenia (6.59) i (6.60) pozwalają przedstawić e^{jz} za pomocą funkcji $\sin z \; i \cos z$:

$$e^{jz} = \cos z + j \sin z \tag{6.62}$$

Wzór (6.62) nazywamy wzorem Eulera. Jego szczególnym i często używanym przypadkioem jest wzór, w którym zmienna zespolona z przybiera wartości rzeczywiste x. Jest wtedy

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x \tag{6.63}$$

Z czego wynika, że

$$re\, e^{jx} = \cos x, \quad im\, e^{jx} = \sin x$$

Jest także

$$\left|e^{jx}\right| = 1, \quad Arg\; e^{jx} = x + 2\pi k$$

Wprowadź my postać wykładniczą liczby zespolonej. Mianowicie, gdy

$$z = r\left(\cos\varphi + j\sin\varphi\right) \tag{6.64}$$

Jest postacią trygonometryczną liczby, to

$$z = re^{j\varphi} \tag{6.65}$$

Jest jej postacią wykładniczą.