

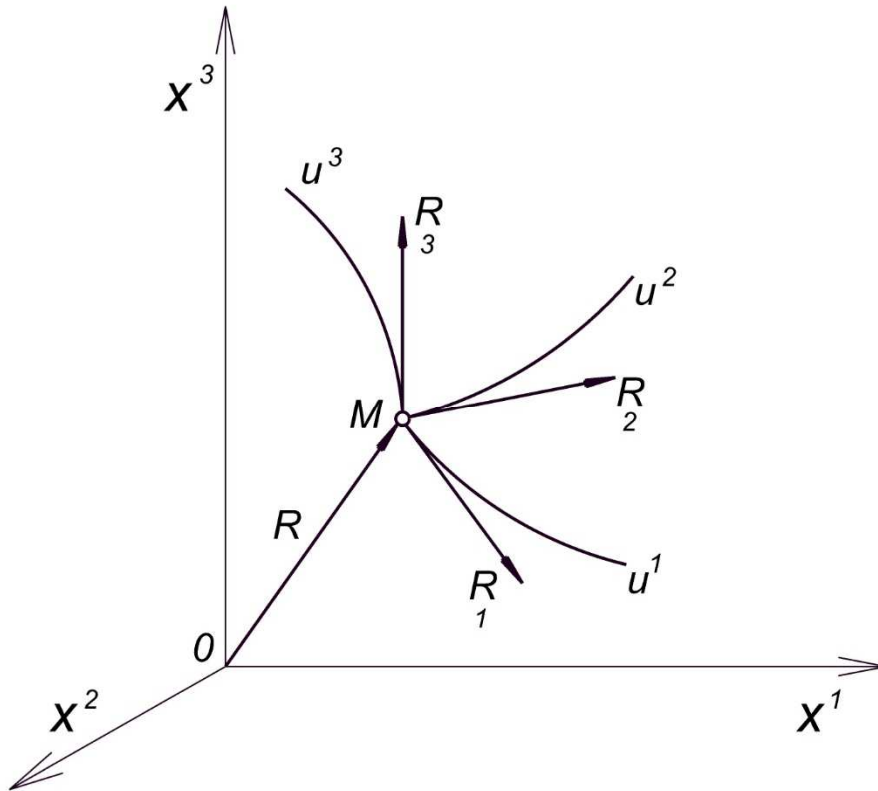
Wykład V

Podstawowe informacje o tensorach

5.1 Kontrawariantne i kowariantne współrzędne wektora

5.1.1 Współrzędne krzywoliniowe, baza.

Niech w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej, oznaczanej w dalszym ciągu przez  $R_3$  będzie dany prostokątny układ współrzędnych kartezjańskich  $x^1, x^2, x^3$  o początku w punkcie 0 rys. 5.1.



Rys. 5.1 Krzywoliniowy układ współrzędnych

Wektor wodzący punktu  $M(x^1, x^2, x^3)$  będziemy oznaczać przez  $\mathbf{R} = \vec{OM}$ . Jego współrzędnymi będą współrzędne punktu M. Niech wektor  $\mathbf{R}$  będzie wektorową funkcją trzech zmiennych  $u^1, u^2, u^3$  tzn. niech będzie

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(u^1, u^2, u^3) \tag{5.1}$$

Co jest równoważne zapisowi skalarowemu

$$x^i = x^i(u^1, u^2, u^3) \quad (i=1,2,3) \tag{5.2}$$

## WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Wiemy z geometrii, że gładka linia w przestrzeni trójwymiarowej, odniesionej do ortokartezjańskiego układu współrzędnych  $x^1, x^2, x^3$  może być zadana układem trzech równań:

$$x^1 = x^1(t), x^2 = x^2(t), x^3 = x^3(t) \quad (5.3)$$

Określających zależność punktu bieżącego od parametru  $t$ . Parametr  $t$  jest wtedy zmienny monotonicznie w pewnym przedziale, gdy odpowiadający mu punkt porusza się wzdłuż linii, funkcje (5.3) ciągłymi i różniczkowalnymi funkcjami parametru, zaś pochodne funkcji (5.3) nie znikają jednocześnie w żadnym punkcie. Zajmiemy się teraz interpretacją wektorową układu równań (5.3) i powyższych warunków na niego nakładanych. Wektor, którego początek znajduje się w punkcie 0 zaś koniec w dowolnym punkcie  $M = (x^1, x^2, x^3)$  będziemy nazywać promieniem wodzącym punktu  $M$  i oznaczać

$$\mathbf{r} = \vec{OM} = (x^1, x^2, x^3) \quad (5.4)$$

Lub

$$\mathbf{r} = \vec{OM} = x^1 \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j} + x^3 \mathbf{k} \quad (5.5)$$

Jeżeli założymy, że współrzędne końca wektora  $\mathbf{r}$  są funkcjami (5.3) parametru  $t$ , to zapisy (5.4) i (5.5) wektora  $\mathbf{r}$  przybiorą postać funkcji wektorowej argument skalarowego

$$\mathbf{r}(t) = x^1(t) \mathbf{i} + x^2(t) \mathbf{j} + x^3(t) \mathbf{k} = [x^1(t), x^2(t), x^3(t)] \quad (5.6)$$

Gdy  $t$  zmienia się, to koniec wektora  $\vec{OM} = \mathbf{r}$  zakreśla linię zwaną hodografem wektora.

Wiadomo z geometrii, że pochodna wektora wodzącego względem parametru jest wektorem stycznym do hodografu i mającym zwrot zgodny ze wzrostem parametru. Wobec tego zakładając ciągłą różniczkowalność pola wektorowego  $\mathbf{R}$ , tzn., że pole wektorowe  $\mathbf{R}$  jest klasy  $C_1$  i oznaczając

$$\mathbf{R}_i = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u^i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.7)$$

Otrzymamy w każdym punkcie przestrzeni trójkę wektorów (5.7) takich, że  $\mathbf{R}_i$  jest styczne do linii, wzdłuż której stałe są współrzędne z wyjątkiem  $u^i$ . np.:

$$\mathbf{R}_1 = \frac{\partial \mathbf{R} \begin{pmatrix} M & M & M \\ u^1 & u^2 & u^3 \end{pmatrix}}{\partial u^1} \quad (5.8)$$

Będzie wektorem stycznym w  $M$  do hodografu

$$\mathbf{R} \begin{pmatrix} M & M \\ u^1 & u^2 & u^3 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

## WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Gdzie  $\frac{M}{u^2}$  i  $\frac{M}{u^3}$  oznaczają wartości parametrów  $u^2$  i  $u^3$  punktu M, zaś  $u^1$  jest parametrem zmiennym, przybierającym w punkcie M wartość  $\frac{M}{u^1}$ .

Założmy, że związki (5.2) są w pewnym obszarze odwracalne. Wtedy w tym obszarze  $u^1, u^2, u^3$  będą współrzędnymi krzywoliniowymi punktu M, linie o stałych dwu współrzędnych – liniami współrzędnymi, powierzchnie o stałej jednej współrzędnej – powierzchniami współrzędnymi, zaś trzy wektory (5.7) jako niekomplanarne utworzą bazę, którą oznaczymy symbolem:

$$\left\{ \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3 \right\} \quad (5.10)$$

Niekomplanarność wektorów wynika z założenie odwracalności układu (5.2). Baza (5.10) zależy oczywiście od punktu M i jest na ogół inna w każdym punkcie.

### 5.1.2 Kontrawariantne współrzędne wektora.

Niech w rozpatrywanym obszarze będzie zadane pole wektorowe  $\mathbf{a}(\mathbf{M})$  będące funkcją punktu M. W każdym punkcie można to przedstawić w postaci kombinacji liniowej (jednoznacznej) wektorów bazy

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{R}_1 + a^2 \mathbf{R}_2 + a^3 \mathbf{R}_3 = \sum_{i=1}^3 a^i \mathbf{R}_i \quad (5.11)$$

W dalszym ciągu skorzystamy z konwencji Einsteina, która mówi, że gdy wskaźnik sumacyjny występuje dwukrotnie – raz w górze i raz w dole – można opuścić znak sumy, np. sumę iloczynów

$$a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3 = \sum_{i=1}^3 a^i b_i$$

Zapisujemy

$$a^i b_i$$

Wobec tego (5.11) można zapisać krótko

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{R}_i \quad (5.12)$$

Współrzędnymi rozkładu  $a^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) będziemy nazywać kontrawariantowymi współrzędnymi wektora  $\mathbf{a}$  w bazie (5.10). Sam wektor  $\mathbf{a}$  w układzie współrzędnych (5.2) będziemy też zapisywać jego współrzędnymi krzywoliniowymi w okrągłych nawiasach:

$$\mathbf{a} = (a^1, a^2, a^3) \quad (5.13)$$

### 5.1.3 Transformacja układu współrzędnych.

Wprowadzimy teraz w rozpatrywanym obszarze nowy krzywoliniowy układ współrzędnych  $u^{1'}, u^{2'}, u^{3'}$  zadany związkami

$$u^{i'} = u^{i'}(u^1, u^2, u^3) \quad (i' = 1', 2', 3') \quad (5.14)$$

## WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Gdzie jacobian przekształcenia (5.14) :

$$\Delta = \frac{\partial(u^1, u^2, u^3)}{\partial(u^{1'}, u^{2'}, u^{3'})} = \det \left[ \frac{\partial u^{i'}}{\partial u_i} \right] \neq 0 \quad (5.15)$$

w każdym punkcie rozpatrywanego obszaru.

Dla uproszczenia zapisu wprowadzimy oznaczenie

$$A_i^{i'} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u_i} \quad (i' = 1', 2', 3', i = 1, 2, 3) \quad (5.16)$$

Ze znanej własności transformacji odwrotnej jest równy odwrotności jacobianu transformacji danej, tzn. że:

$$A_i^i = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \quad (i = 1, 2, 3, i' = 1', 2', 3') \quad (5.17)$$

Wynika, że jacobian transformacji odwrotnej jest równy odwrotności jacobianu transformacji danej, tzn. że:

$$\det [A_i^{i'}] = \Delta^{-1} \quad (5.18)$$

oraz że

$$A_i^{i'} A_j^{i'} = \delta_j^{i'} \quad (5.19)$$

Gdzie symbol  $\delta_j^{i'}$  oznacza symbol Kroneckera przybierający wartość 0 gdy wskaźniki są równe od siebie, zaś wartość 1, gdy wskaźniki są identyczne. Oczywiście analogicznie

$$A_i^i A_j^{i'} = \delta_j^i \quad (5.20)$$

### 5.1.4 Transformacja wektorów bazy.

Równość (5.1) zapiszemy teraz w postaci następującej:

$$\begin{aligned} R &= R \left[ u^1(u^1, u^2, u^3), u^2(u^1, u^2, u^3), u^3(u^1, u^2, u^3) \right] = \\ &= R \left[ u^1(u^{1'}, u^{2'}, u^{3'}), u^2(u^{1'}, u^{2'}, u^{3'}), u^3(u^{1'}, u^{2'}, u^{3'}) \right] \end{aligned} \quad (5.21)$$

W nowym układzie mamy nową bazę, której wektorami są:

$$\mathbf{R}_i = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u^{i'}} \quad (i' = 1', 2', 3') \quad (5.22)$$

A równość (5.12) przybierze postać:

$$\mathbf{a} = a^{i'} \mathbf{R}_i \quad (5.23)$$

Zauważmy, że ze wzorów (5.7), (5.16), (5.22) i (5.21) otrzymamy następującą regułę przekształcenia wektorów bazy

## WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

$$\mathbf{R}_{i'} = A_{i'}^i \mathbf{R}_i \quad (5.24)$$

Mnożąc równość (5.24) po rozpisaniu przez  $A_i^{i'}$ , a więc pierwszą przez  $A_j^{1'}$ , drugą przez  $A_j^{2'}$ , trzecią przez  $A_j^{3'}$ , sumując po  $i'=1',2',3'$  oraz korzystając z (5.19) otrzymamy trzy związki odwrotne, w których dla jedyności zapisu wskaźnik  $j$  zastępujemy przez  $i$

$$\mathbf{R}_i = A_i^{i'} \mathbf{R}_{i'} \quad (5.25)$$

Związki (5.25) można było również uzyskać tak, jak (5.22) różniczkując (5.21) względem  $\partial u^i$ . Wystawiając się precyzyjniej powiemy, że  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3$  nie są wektorami lecz funkcjami wektorowymi, zależnymi nie tylko od punktu, w którym są brane, lecz także od koordynacji przestrzeni (przez koordynację rozumiemy przyjęty układ współrzędnych krzywoliniowych).

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_i(M, U) \quad (5.26)$$

Gdzie symbolem  $U$  oznaczony został układ współrzędnych.

### 5.1.5 Transformacja współrzędnych kowariantnych wektora $\mathbf{a}$ .

Poszukajmy teraz reguły przekształcenia współrzędnych kontrawariantnych wektora  $\mathbf{a}$ . W tym celu łącząc równości (5.12) i (5.23) i korzystając ze wzoru (5.25) otrzymamy:

$$a^{i'} R_{i'} = a^i A_i^{i'} R_{i'}$$

Z jednoznaczności rozkładu wektora w bazie wynika, że

$$a^{i'} = A_i^{i'} a^i \quad (i' = 1', 2', 3') \quad (5.27)$$

Gdybyśmy zamiast związków (5.25) uwzględnili w (5.12) i (5.23) zależność (5.25) otrzymalibyśmy:

$$a^i = A_i^{i'} a^{i'} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.28)$$

### 5.1.6 Baza wzajemna.

Wróćmy do równości (5.12) i zajmijmy się obliczaniem  $a^i$ , uważając za dane wektor  $\mathbf{a}$  i bazę wektorów  $\mathbf{R}_i$ . Wiadomo, że w ortokartezjańskim układzie współrzędnych bazę tworzą wektory ortonormalne  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  zwane wersorami układu i ze z równości

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

Wynika np.

$$a_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}$$

W bazie przez nas rozpatrywanej tak na ogół nie jest, gdyż nie tworzą jej w ogólności wektory ortonormalne. Można wprowadzić **bazę wzajemną**

$$\left\{ \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_2^2, \mathbf{R}_3^3 \right\} \quad (5.29)$$

## WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Względem bazy (5.10) uzależnioną od bazy (5.10) w następujący sposób:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}_i^j = \delta_i^j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (5.30)$$

Baz wzajemna jest na ogół ortonormalna. Na to by była ortonormalna trzeba i wystarczy by baza (5.10) była ortonormalna.

### 5.1.7 Kowariantne współrzędne wektora.

W bazie wzajemnej można dokonać rozkładu analogicznego do rozkładu (5.12), a mianowicie:

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{R}^i \quad (5.31)$$

Współczynniki  $a_i$  rozkładu (5.31) wektora  $\mathbf{a}$  w bazie wzajemnej (5.29) noszą nazwę kowariantnych współrzędnych wektora.

Łącząc zależności (5.12), (5.30), (5.31) otrzymamy

$$a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{R}_i \quad a^i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{R}^i \quad (5.32)$$

### 5.1.8 Transformacja wektorów bazy wzajemnej.

W nowym układzie (primowanym) istnieje oczywiście także baza wzajemna względem bazy (5.22):

$$\left\{ \mathbf{R}^{1'}, \mathbf{R}^{2'}, \mathbf{R}^{3'} \right\} \quad (5.33)$$

Określona zależnością definicyjną:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}_i^{j'} \stackrel{df}{=} \delta_i^{j'} \quad (i', j' = 1', 2', 3') \quad (5.34)$$

Aby znaleźć regułę przekształcenia wektorów bazy (5.29), wystarczy do definicji (5.34) wstawić wzór (5.24):

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}_i^{j'} A_i^i = \delta_i^{j'}$$

Co dzięki zależności (5.19) daje:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}_i^{j'} = A_i^{j'}$$

Po zmianie wskaźnika  $j'$  na  $i'$  otrzymujemy szukaną regułę:

$$\mathbf{R} = A_i^{i'} \mathbf{R}^i \quad (5.35)$$

Odwrócenie powyższej reguły można otrzymać przez pomnożenie zależności (5.35) stronami przez  $A_j^{i'}$ , przesunięcie względem  $i'$  oraz zastosowanie zależności (5.20). Mamy wtedy po zmianie wskaźnika  $j$  na  $i$ :

## WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

$$\mathbf{R}^i = A_i^i \mathbf{R}^i \quad (5.36)$$

### 5.1.8 Transformacja współrzędnych kowariantnych wektora.

Zapiszmy wektor  $\mathbf{a}$  w bazach wzajemnych w obu układach współrzędnych. Jest wtedy dzięki (5.31)

$$a_i \mathbf{R}^i = a_i^i \mathbf{R}^i$$

Wstawienie do powyższej równości prawej strony zależności (5.35) prowadzi następującej reguły:

$$a_i = A_i^i a_i^i \quad (5.37)$$

I analogicznie, gdy skorzystamy z zależności (5.36)

$$a_i = A_i^i a_i^i \quad (5.38)$$

### 5.1.9 Gra wskaźników współrzędnych wektora.

Zajmiemy się teraz poszukiwaniem związków między dwoma rodzajami współrzędnych wektora. W tym celu utworzymy wszystkie możliwe iloczyny skalarowe wektorów obu baz i wprowadzimy oznaczenia:

$$\mathbf{R}^i \cdot \mathbf{R}^j \stackrel{df}{=} g_{ij} = g_{ji}, \quad \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}^j \stackrel{df}{=} g_i^j, \quad \mathbf{R}^i \cdot \mathbf{R}_j \stackrel{df}{=} g^{ij} = g^{ji} \quad (5.39)$$

Nim zbadamy własności otrzymanych tworów zapiszmy wektor  $\mathbf{a}$  obu bazach:

$$a^i \mathbf{R}_i = a_i \mathbf{R}^i$$

I pomnóżmy skalarowo ten związek raz przez wektor  $\mathbf{R}^j$ , a drugi raz przez  $\mathbf{R}_j$ . Definicje (5.39) i zmiana litery j na i prowadzą do dwu nowych związków:

$$a^i = g^{ij} a_j, \quad a_i = g_{ij} a^j \quad (5.40)$$

Pierwszy z wzorów (5.40) mówi o tym, jak można podwyższyć wskaźnik, drugi – jak go obniżyć. Operacje te obejmowane są wspólną nazwą gry wskaźników.

Wstawianie prawej strony drugiej z równości (5.40) do pierwszej z nich:

$$a^i = g^{ij} g_{jk} a^k = \delta_k^i a^k$$

Daje związek

$$g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i \quad (5.41)$$

Zaś z definicji (5.30) bazy wzajemnej wynika, że

$$g_i^j = \delta_i^j \quad (5.42)$$

### 5.1.10 Gra wskaźników obu baz.

## WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Z połączenia wzorów (5.31) ze związkami (5.40) wynika:

$$a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{R}_i = g_{ij} a^j = g_{ij} \mathbf{a} \cdot \mathbf{R}^j$$

$$a^i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{R}^i = g^{ij} a_j = g^{ij} \mathbf{a} \cdot \mathbf{R}_j$$

Korzystając z dowolności wektora  $\mathbf{a}$  otrzymamy

$$\mathbf{R}_i = g_{ij} \mathbf{R}^j, \quad \mathbf{R}^i = g^{ij} \mathbf{R}_j \quad (5.43)$$

### 5.2 Obiekty geometryczne.

#### 5.2.1 Skalar.

Niech w euklidesowej przestrzeni  $R_3$  dany będzie zbiór, którego elementami są takie krzywoliniowe układy współrzędnych, że zbiór przekształceń przeprowadzających jeden układ w drugi tworzy grupę. Te układy współrzędnych będziemy nazywali układami dopuszczalnymi. Znaczy to, że złożenie dwu przekształceń należy do zbioru oraz, że w zbiorze tym istnieją przekształcenia tożsamościowe. Wynika stąd, że do każdego przekształcenia należącego do zbioru istnieje przekształcenie odwrotne też do tego zbioru należące. Jeżeli oznaczymy:

$$u^{i'} = u^{i'}(u^1, u^2, u^3) \quad (i' = 1', 2', 3') \quad (5.44)$$

$$A_i^{i'} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}, \quad A_{i'}^i = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \quad (5.45)$$

To

$$A_i^{i'} A_{j'}^i = \delta_{j'}^{i'}, \quad A_{i'}^i A_j^{i'} = \delta_j^i \quad (5.46)$$

A ponadto

$$\Delta = \det [A_i^{i'}] \neq 0, \quad \det [A_{i'}^i] = \Delta^{-1} \quad (5.47)$$

Oznaczmy przez  $M$  ustalony punkt przestrzeni  $R_3$  o krzywoliniowych współrzędnych  $u^i, u^{i'}$  itd. W odpowiednich układach współrzędnych.

#### Definicja.

Jeżeli w punkcie  $M \in R_3$  w każdym układzie współrzędnych zadana jest liczba  $\varphi \begin{pmatrix} M_i \\ u \end{pmatrix}$  i jeżeli przy przejściu od jednego układu do drugiego zachodzi

$$\varphi \begin{pmatrix} M \\ u^{i'} \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} M \\ u^i \end{pmatrix} \quad (5.48)$$



## WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Lub krótko  $\varphi = \varphi$  to  $\varphi$  nazywamy skalarem lub niezmiennikiem bezwzględnym w punkcie M.

### 5.2.2 Tensor.

#### Definicja.

Tensorom kontrawariantnym, mieszanym lub kowariantnym drugiego rzędu nazywamy ciąg lub tabele  $3^2$  liczb, transformujących się przy przejściu od jednego dopuszczalnego układu współrzędnych do innego dopuszczalnego układu współrzędnych zgodnie z regułą przekształcenia:

$$a^{i'j'} = A_{ij}^{i'j'} a^{ij}, \quad a_{i'j'} = A_{i'j'}^{ij} a_{ij} \quad (5.49)$$

Lub

$$a_{i'j'} = A_{i'j'}^{ij} a_{ij} \quad (5.50)$$

Same liczby  $a^{ij}$ ,  $a_j^i$ ,  $a_{ij}$  nazywamy odpowiednio współrzędnymi kontrawariantowego, mieszanego, kowariantnego tensora drugiego rzędu.

Symbole współrzędnych zostały tak zmodyfikowane, by wystąpiła kolejność pozycji wskaźników, niezależnie od tego czy wskaźnik jest na pozycji kontrawariantnej, czy kowariantnej.

Analogicznie określamy ciąg  $3^{p+q}$  liczb jako tensor p-krotnie kontrawariantny i q-krotnie kowariantny, jeżeli podlega on regule przekształcenia:

$$T_{j_1, j_2, \dots, j_p}^{i_1, i_2, \dots, i_p} = A_{i_1, i_2, \dots, i_p}^{i_1, i_2, \dots, i_p} A_{j_1, j_2, \dots, j_p}^{j_1, j_2, \dots, j_p} T_{j_1, j_2, \dots, j_p}^{i_1, i_2, \dots, i_p} \quad (5.51)$$

Parę liczb  $(p, q)$  nazywamy walencją tensora, zaś liczbę  $p+q$  rzędem tensora.

### 5.2.3 Działania na tensorach.

Poniżej zdefiniujemy działania na tensorach. Nie każde oczywiście dowolnie pomyślane działanie będzie sensowne. Za kryterium sensowności przyjmujemy jego geometryczność, tzn. niezależność od układu współrzędnych. W każdym dopuszczalnym układzie współrzędnych działanie na tych tensorach musi dać ten sam rezultat (zasada obiektywizmu w mechanice).

#### 5.3.2.3.1 Dodawanie tensorów.

Niech w punkcie M dane będą dwa tensory, o tej samej walencji, np.  $a_{.jk}^{i..}$ ,  $b_{.jk}^{i..}$ . Ich sumą nazywamy tensor  $c_{.jk}^{i..}$  o tej samej walencji, którego współrzędne wiążą się ze współrzędnymi tensorów a i b zależnością:

$$c_{.jk}^{i..} = a_{.jk}^{i..} + b_{.jk}^{i..} \quad (5.52)$$

Sensowność takiej definicji wykażemy dowodząc, że  $c_{.jk}^{i..}$  jest istotnie tensorem o walencji (1,2). Jest mianowicie:

## WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

$$c_{.j'k'}^{i..} = a_{.j'k'}^{i..} + b_{.j'k'}^{i..} = A_{.j'k'}^{i..jk} a_{.jk}^{i..} + A_{.j'k'}^{i..jk} b_{.jk}^{i..} = A_{.j'k'}^{i..jk} (a_{.jk}^{i..} + b_{.jk}^{i..}) = A_{.j'k'}^{i..jk} c_{.jk}^{i..}$$

Dodawanie jest przemienne i łączne. Zauważmy, że dodawanie w ten sposób tensorów nawet tego samego rzędu, ale różnej walencji na ogół nie jest sensowne.

Dodawanie tensorów może mieć sens w mechanice i fizyce w odniesieniu do tego samego rodzaju tensorów np. tensorów naprężenia, odkształcenia, sprężystości itp..

### 5.3.2.3.2 Mnożenie tensorów.

Iloczynem dwu tensorów dowolnych walencji nazywamy tensor o walencji równej sumie walencji czynników, a którego współrzędne wiążą się ze współrzędnymi czynników następująco:

$$c_{i.jkl}^{i...m} = a_{.j}^{i..} b_{.kl}^{..m} \tag{5.53}$$

Dowód sensowności takiej definicji polega na wykazaniu, że iloczyn tensorów jest tensorem.

Rzeczywiście:

$$c_{.j'k'l'}^{i'...m'} = a_{.j}^{i'.} b_{.k'l'}^{..m'} = (A_{.j'}^{i'.j} a_{.j}^{i'.}) (A_{.k'l'}^{..klm'} b_{.kl}^{..m'}) = A_{.j'k'l'm'}^{i'iklm'} (a_{.j}^{i'.} b_{.kl}^{..m'}) = A_{.j'k'l'm'}^{i'iklm'} c_{.jkl}^{i'...m'}$$

Zwróćmy uwagę na to, że każdy wskaźnik ma kolejny numer np. i na pierwszej pozycji, j na drugiej itd.. Jest to dlatego istotne, że iloczyn zależy od ich uporządkowania. Dla przykładu rozpatrzmy tensor kontrawariantny (zwany diadą) powstały z pomnożenia przez siebie dwu kontrawariantnych wektorów (tzn. tensorów o walencji (1,0)). Niech będzie

$$c^{ij} = a^i b^j$$

Gdy kolejność wskaźników nie odgrywa roli, to zmieniając po prawej stronie wskaźnik i na j i odwrotnie otrzymalibyśmy identyczny a poprzednim tensor

$$d^{ij} = b^i a^j$$

Błądność rozumowania można wykazać budując macierz ze współrzędnych każdego z tych iloczynów. Jest mianowicie:

$$c^{ij} = \begin{vmatrix} a^1 b^1 & a^1 b^2 & a^1 b^3 \\ a^2 b^1 & a^2 b^2 & a^2 b^3 \\ a^3 b^1 & a^3 b^2 & a^3 b^3 \end{vmatrix}, \quad d^{ij} = \begin{vmatrix} a^1 b^1 & a^2 b^1 & a^3 b^1 \\ a^1 b^2 & a^2 b^2 & a^3 b^2 \\ a^1 b^3 & a^2 b^3 & a^3 b^3 \end{vmatrix}$$

Macierze powyżej otrzymane nie są identyczne. Z ich niesymetryczności wynika, że iloczyn tensorów nie jest przemienne.

### 5.3.2.3.3 Zwężanie tensora.

Niech  $a^i$  będzie kontrawariantnym tensorem pierwszego rzędu zaś,  $b_j$  kowariantnym tensorem też rzędu pierwszego. Wtedy  $a^i b_j$  jako iloczyn tych tensorów, będzie mieszanym tensorem drugiego rzędu. Spośród 9 iloczynów  $a^i b_j$  wybierzmy te trzy, ktre mają identyczne wskaźniki przy obu czynnikach, a więc  $a^1 b_1, a^2 b_2, a^3 b_3$ , a następnie dodajmy je do siebie.

Otrzymamy

## WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

$$\varphi = a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3 = a^i b_i \quad (5.54)$$

Wykażemy, że  $\varphi$  jest skalarem. Istotnie tak jest, gdyż reguły przekształcenia dla tensorów

$$a^i = A_i^i a^i, \quad b_j = A_j^j b_j$$

Pociągają za sobą

$$\varphi = a^i b_i = A_i^i a^i A_j^j b_j = A_{ii}^i a^i b_j = A_i^j a^i b_j = \delta_i^j a^i b_j = a^i b_i = \varphi$$

To znaczy regułą transformacji dla skalara (która w obu układach przybiera tę samą wartość).

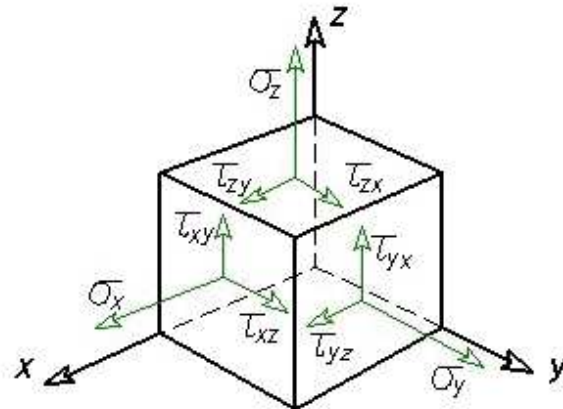
### 5.4 Tensory w mechanice.

#### 5.4.1 Stan naprężenia.

Stan naprężenia w dowolnym punkcie rozpatrywanej objętości ośrodka może być określony przez dziewięć składowych stanu naprężenia, co według zapisu wskaźnikowego można wyrazić w postaci tensora stanu naprężenia:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}, \quad (5.1)$$

przy czym przyjmujemy znaną w mechanice umowę, że  $\sigma_{ij}$  jest dodatnie, jeżeli mamy do czynienia z rozciąganiem, ujemne ze ściskaniem rys.4.1.



**Rys. 5.2 Składowe stanu naprężenia na ścianach elementarnego graniastosłupa.**

W szczególnych przypadkach będziemy stosować zapis klasyczny dla tensora naprężenia, którym naprężenia normalne będziemy wyrażać przy pomocy oznaczenia  $\sigma$ , a naprężenia styczne przy pomocy oznaczenia  $\tau$ , według zasady:

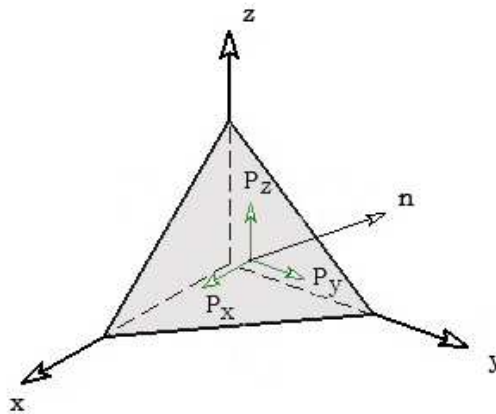
## WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

$$\sigma_{11} = \sigma_x, \sigma_{22} = \sigma_y, \sigma_{33} = \sigma_z$$

i (5.2)

$$\sigma_{12} = \tau_{xy}, \sigma_{13} = \tau_{xz}, \sigma_{21} = \tau_{yx}, \sigma_{23} = \tau_{yz}, \sigma_{31} = \tau_{zx}, \sigma_{32} = \tau_{zy}.$$

W każdym punkcie ośrodka możemy znaleźć trzy płaszczyzny ośrodka, na których działają tylko naprężenia normalne do tych płaszczyzn, ponieważ naprężenia styczne przyjmują na nich wartości zerowe. Płaszczyzny te nazywamy płaszczyznami głównymi, a działające na nich naprężenia oznaczane  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  naprężeniami głównymi. W celu znalezienia naprężeń głównych rozpatrzmy równowagę elementarnego czworościanu pokazanego na rys.4.2, którego trzy ściany tworzą płaszczyzny zawierające osie współrzędnych, a czwarta płaszczyzna A nachylona jest do układu współrzędnych, a jej nachylenie określa kierunek wektor  $n$  do niej prostopadłego.



**Rys. 4.2. Naprężenia na ścianie A elementarnego czworościanu.**

Oznaczmy przez  $a_i$  cosinusy kierunkowe normalnej do powierzchni A. Jeżeli przez  $p$  oznaczymy wypadkowe naprężenie działające na ścianę A, można rozłożyć go na trzy składowe  $p_j$  z warunków równowagi czworościanu:

$$p_j = \sigma_{ij} a_i. \quad (5.3)$$

Naprężenie  $p$  można rozłożyć na składową normalną  $p_n$  i styczną do powierzchni A  $p_t$ :

$$p_n = p_j a_j \quad (5.4)$$

i

## WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

$$p_i^2 = p^2 - p_n^2 \quad . \quad (5.5)$$

Na płaszczyźnie, na której działa naprężenie główne  $\sigma$ , wypadkowe naprężenie  $p$  musi być skierowane wzdłuż normalnej  $\vec{n}$  do tej powierzchni, ponieważ wówczas naprężenie styczne równa się zero. Daje to związki na składowe naprężenia  $p$ :

$$p_j = a_j \sigma, \quad (5.6)$$

po podstawieniu tych związków do równań (5.3) utrzymujemy układ trzech równań liniowych, gdzie niewiadomymi są kosinusy kierunkowe  $a_i$ :

$$\sigma_{ij} a_i - \sigma a_j = 0. \quad (5.7)$$

Układ ten będzie miał niezerowe rozwiązanie, gdy wyznacznik utworzony ze współczynników przy niewiadomych cosinusach kierunkowych kątów nachylenia do osi, wiersora  $\vec{n}$  równa się zero:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (5.8)$$

Wyznacznik ten sprowadza się do równania trzeciego stopnia względem poszukiwanego naprężenia głównego:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma + I_3 = 0, \quad (5.9)$$

gdzie współczynniki  $I_1, I_2, I_3$  są **niezmiennikami tensora naprężenia**, gdyż nie zależą od obrotu układu odniesienia i równają się:

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}, \quad (5.10)$$

$$(5.11) \quad I_2 = \sigma_{11} \sigma_{22} + \sigma_{22} \sigma_{33} + \sigma_{33} \sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2,$$

## WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}. \quad (5.12)$$

Jeżeli przyjmiemy, że osie współrzędnych pokrywają się z kierunkami głównymi w rozpatrywanym punkcie to niezmienniki można wyrazić za pomocą naprężeń głównych  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ :

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad (5.13)$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1, \quad (5.14)$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \quad (5.15)$$

Wielkość równą  $I_1/3$  nazywać będziemy **naprężeniem średnim**  $\sigma_m$ , więc:

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}\sigma_{kk}. \quad (5.16)$$

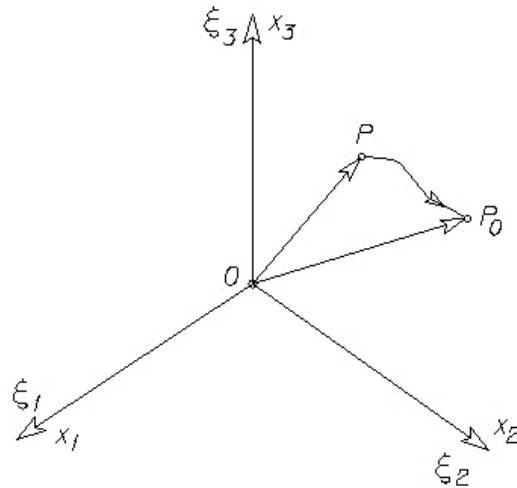
### 5.4.2 Stan odkształcenia.

W mechanice posługujemy się często uproszczonym modelem ciała nazywanego kontinuum materialnego. W strukturze takiej pomijamy budowę cząsteczkową ciała, z jaką mamy do czynienia w każdym znanym nam materiale opisywanym przy pomocy modelu dyskretnego. Z uproszczeniem tym spotykamy się w mechanice ośrodków ciągłych, choć wprowadzone definicje przemieszczenia, odkształcenia i prędkości można w pewnym zakresie przyjąć w modelach mechaniki gruntów, gdzie zdecydowanie nie mamy do czynienia z ośrodkiem ciągłym.

Będziemy zajmować się odkształcalnym ośrodkiem ciągłym określanym pojęciem ciała odkształcalnego. Konfiguracją kontinuum materialnego nazywamy regularne i wzajemne jednoznaczne odwzorowanie cząstek materialnych w punkty P pewnego obszaru C trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej wg [Derski, 1975]. Punkt P przestrzeni euklidesowej jest miejscem, w którym znajduje się cząstka w chwili czasu t.

Wprowadźmy pojęcie konfiguracji początkowej rozpatrywanego kontinuum materialnego. Otóż przez taką konfigurację uważamy położenie punktów  $P_0$  obszaru  $C_0$  trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej w chwili  $t=t_0$ . Do opisu ruchu względem konfiguracji początkowej wprowadzamy współrzędne kartezjańskie względem ustalonego układu współrzędnych (rys.4.5)

## WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ



**Rys. 4.5. Ruch punktu kontinuum materialnego względem konfiguracji początkowej.**

Oznaczmy współrzędne kartezjańskie punktów  $P_0 \in C_0$  konfiguracji początkowej  $(x_1, x_2, x_3)$ . Współrzędne kartezjańskie punktów  $P \in C$  w dowolnej chwili  $t$  oznaczmy natomiast przez  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ . Opis ruchu względem konfiguracji początkowej można wówczas zapisać w sposób następujący:

$$\xi_i = f(x_1, x_2, x_3, t), \quad x_i = f_i^{-1}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) \quad (5.17)$$

Wzajemne związki odwrotne pomiędzy współzrędnymi wymagają odpowiedniej regularności funkcji. Funkcje te muszą być funkcjami ciągłymi wraz z pierwszymi pochodnymi, tzn. muszą być klasy  $C^1$ , a powyższe przekształcenia są nieosobliwe. Aby postulat ten był spełniony, Jakobian przekształcenia powinien być różny od zera, więc:

$$D = \left| \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right| \neq 0 \quad (5.18)$$

Wprowadzając wektor wodzący  $\vec{r}$  punktu  $P$  (rys. 4.5) można zapisać:

$$\vec{r} = \xi_i e_i, \quad \xi_i = f_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad x_j = f_j(x_1, x_2, x_3, t_0), \quad (5.19)$$

gdzie  $e_i$  są wersorami kartezjańskiego układu współrzędnych na rys 4.5

Rozpatrzmy kontinuum materialne w chwili  $t=0$  zajmujące obszar  $\Omega$ . Położenie poszczególnych punktów tego kontinuum określa wektor wodzący  $\vec{r} = \vec{r}(x_i)$  w kartezjańskim układzie

## WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

współrzędnych  $x_i$ . Wskutek działań zewnętrznych (np. przyłożone do ciała obciążenie, parcie cieczy, przyłożony gradient temperatury) nastąpi odkształcenie ciała i nasze kontinuum w chwili czasu  $t$  zajmie nowe położenie  $\Omega'$ . Punkt  $P$  obszaru  $\Omega$  na skutek ruchu przemieści się do punktu  $P'$  obszaru  $\Omega'$ . Położenie punktu  $P'$  w tym samym układzie współrzędnych opisuje wektor wodzący  $\vec{r}' = \vec{r}'(\xi_i)$ .

**Wektor przemieszczenia**  $\vec{u} = \vec{u}(u_i)$  który można zapisać:

$$\vec{u} = \vec{r}' - \vec{r} = PP' \quad (5.20)$$

Korzystając ze współrzędnych wektora przemieszczenia związek wektorowy przyjmuje postać skalarną:

$$u_i = \xi_i - x_i \quad (5.21)$$

Z powyższych związków (5.19) i (5.20) dostajemy:

$$\xi_i = x_i + u_i(x_j, t) \quad (5.22)$$

Powyższy zapis wprowadził **Lagrange** wg. [Derski, 1975]. W opisie tym posługujemy się współrzędnymi  $x_i$  jako zmiennymi niezależnymi. Obok opisu Lagrange'a istnieje druga możliwość, kiedy jako zmienne niezależne traktuje się współrzędne  $\xi_i$ . Jest to opis **Eulera** wyrażający się związkami:

$$x_i = \xi_i - u_i(x_j, t) \quad (5.23)$$

W wyniku przyjęcia jednego z wyżej wymienionych opisów uzyskujemy różne równania opisujących ruch, ponieważ inaczej będziemy określać pochodną funkcji  $F$  po czasie. W przypadku, gdy mamy do czynienia z opisem Lagrange'a funkcja  $F = F(x_i, t)$ . Współrzędne  $x_i$  są wielkościami stałymi względem położenia początkowego, więc pochodna po czasie funkcji  $F$  wynosi:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} \quad (5.24)$$



## WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Inaczej ma się sprawa w przypadku opisu Eulera. Wówczas funkcja  $F = F(\xi_j, t)$ . Ponieważ zgodnie ze wzorami (5.21)  $\xi_i$  zależy od współrzędnych  $x_i$  i czasu  $t$ , więc pochodna po czasie  $t$  funkcji  $F$  jest pochodną materialną równą:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \quad (5.25)$$

Pochodną cząstkową  $\partial F / \partial t$  nazywamy pochodną lokalną, natomiast drugi człon pochodnej materialnej  $(\partial F / \partial \xi_i) * (\partial \xi_i / \partial t)$  nazywać będziemy pochodną konwekcyjną funkcji  $F$ . Wprowadzając oznaczenia:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t} = \dot{\xi}_i = v_i, \quad \frac{\partial F}{\partial \xi_i} = F_{,i}, \quad (5.26)$$

pochodną materialną funkcji  $F$  można zapisać w postaci:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + v_i F_{,i}. \quad (5.27)$$

Gdy współrzędne punktu ośrodka w chwili  $t$  wyrażone są przy pomocy jego położenia w chwili początkowej (opis Lagrange'a) tzn.  $\xi_i = \xi_i(x_j, t)$  to jego prędkość wyraża się wzorem:

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad (5.28)$$

a przyspieszenie

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t}. \quad (5.29)$$

W przypadku opisu Eulera wykorzystując związek (5.27) prędkość punktu wyraża się wzorem:

$$v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_j u_{i,j} \quad (5.30)$$

i przyspieszenie:

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j v_{i,j}. \quad (5.31)$$

### 4.4.1 Tensor odkształcenia.

W przypadku gdy mamy do czynienia z ośrodkiem odkształcalnym, wzajemne odległości pomiędzy punktami ulegają zmianie w czasie i przestrzeni. Rozważmy dwa punkty znajdujące się w nieskończenie małej odległości względem siebie. W chwili początkowej  $t_0$  punkty te miały współrzędne  $x_i$  i  $x_i + dx_i$ . Po upływie czasu  $t$  współrzędne tych punktów będą wynosić odpowiednio:  $\xi_i$  i  $\xi_i + d\xi_i$ . Obliczmy kwadrat odległości pomiędzy tymi punktami w chwili początkowej  $t_0$ :

$$ds_0^2 = dx_i dx_i. \quad (5.32)$$

Kwadrat odległości punktów po upływie czasu  $t$  wynosi natomiast:

$$ds^2 = d\xi_i d\xi_i. \quad (5.33)$$

Gdy ciało jest nieodkształcalne  $ds = ds_0$ . W przeciwnym przypadku odległości pomiędzy punktami, a więc i ich kwadraty są różne i  $ds^2 \neq ds_0^2$ . Wzajemną relację pomiędzy współrzędnymi w chwili  $t$  i  $t_0$  określa zgodnie ze wzorem (5.21) relacja:

$$u_i = \xi_i - x_i. \quad (5.34)$$

Wyznamy różnicę kwadratów  $ds^2$  i  $ds_0^2$ :

$$ds^2 - ds_0^2 = \left[ \frac{\partial \xi_p}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_p}{\partial x_j} - \delta_{ij} \right] dx_i dx_j. \quad (5.35)$$

Podstawiając związek (5.34), do powyższej zależności dostajemy:

$$ds^2 - ds_0^2 = \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} (x_p + u_p) \frac{\partial}{\partial x_j} (x_p + u_p) - \delta_{ij} \right] dx_i dx_j, \quad (5.36)$$

## WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

gdzie  $\delta_{ij}$  oznacza deltę Kroneckera.

Po przekształceniach uzyskujemy:

$$ds^2 - ds_0^2 = \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \frac{\partial u_p}{\partial x_j} \right] dx_i dx_j. \quad (5.37)$$

Green i Saint –Venant wprowadzili pojęcie **tensora odkształcenia**  $\varepsilon_{ij}$  stosując zapis:

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\varepsilon_{ij} dx_i dx_j, \quad (5.38)$$

gdzie tensor  $\varepsilon_{ij}$  nosi często w literaturze nazwę **tensora odkształcenia Greena** i wyraża się zgodnie z zależnością (5.37) wzorem:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \frac{\partial u_p}{\partial x_j} \right). \quad (5.39)$$

Tensor odkształcenia Greena  $\varepsilon_{ij}$  w przypadku, gdy przemieszczenia i ich przyrosty przemieszczeń są bardzo małe można uprościć do postaci liniowej:

$$\varepsilon_{ij} \cong \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (5.40)$$

gdyż iloczyny pochodnych przemieszczenia są znacznie mniejszego rzędu niż ich wartości.

Ponieważ tensor  $\varepsilon_{ij}$  został określony w układzie odniesienia **Lagrange'a**, więc jego pochodna po czasie jest równa pochodnej cząstkowej:

$$\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} \quad (5.41)$$

W układzie odniesienia Eulera tensor odkształcenia został wprowadzony przez **Almansięgo**, zdefiniowany w sposób następujący:

## WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\eta_{ij}dx_idx_j, \quad (5.42)$$

przy czym, **tensor odkształcenia Almansiego** wyraża się wzorem:

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} - \frac{\partial u_p}{\partial \xi_i} \frac{\partial u_p}{\partial \xi_j} \right). \quad (5.43)$$

Dla małych pochodnych przemieszczenia tensor odkształcenia został przez **Cauchy'ego** przedstawiony w postaci:

$$\eta_{ij} \cong \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} \right). \quad (5.44)$$

Liniowa postać tensora odkształcenia  $\eta_{ij}$  nosi nazwę **tensora odkształcenia Cauchy'ego**. Pochodna po czasie tensora odkształcenia w układzie odniesienia Eulera jest pochodną masową i wyraża się wzorem:

$$\frac{d\eta_{ij}}{dt} = \frac{\partial \eta_{ij}}{\partial t} + \eta_{ij,k} v_k. \quad (5.45)$$

Często kiedy idzie się jeszcze dalej z uproszczeniami, dla bardzo małych przemieszczeń zapisuje się związek:

$$\varepsilon_{ij} \cong \eta_{ij} \quad (5.46)$$

i w przypadku pochodnej po czasie tensora Cauchy'ego pomija się człon konwekcyjny i zapisuje się:

$$\frac{d\eta_{ij}}{dt} \cong \frac{\partial \eta_{ij}}{\partial t}. \quad (5.47)$$

W klasycznej teorii sprężystości ciała stałego stosuje się praktycznie tylko opis Lagrange'a w teorii małych odkształceń.

### 4.4.2. Tensor obrotów.

## WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Obok tensora odkształcenia istotnym jest tensor obrotów zdefiniowany dla małych przemieszczeń wzorem:

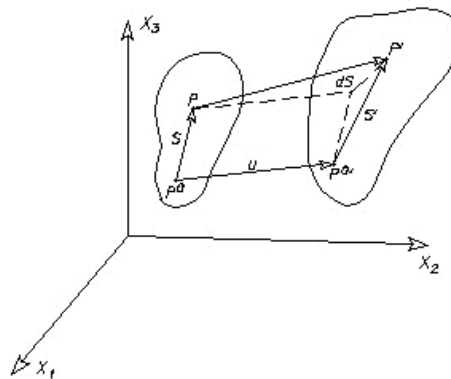
$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}). \quad (5.48)$$

Widzimy więc, że tensor obrotów i tensor odkształcenia stanowią dekompozycję tensora  $u_{i,j}$  na część skośnie symetryczną i część symetryczną:

$$u_{i,j} = (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}). \quad (5.49)$$

Aby wyjaśnić sens geometryczny tych wielkości wybierzmy w rozważanym ośrodku dwa bardzo blisko położone punkty  $P$  i  $P^0$ . Połączmy te dwa punkty wektorem  $\vec{S}$ , którego początkiem jest punkt  $P^0$ , a końcem punkt  $P$  (rys. 4.6). Po odkształceniu ciała punkt  $P$  przechodzi w położenie  $P_1$ , a punkt  $P^0$  w położenie  $P_1^0$ . Łącząc odpowiednio punkty  $P_1$  i  $P_1^0$  dostajemy wektor  $\vec{S}_1$ , którego początkiem jest punkt  $P_1^0$ . Z rys.4.6 widać, że wystąpił po odkształceniu przyrost wektora  $\vec{S}$  równy  $d\vec{S}$ . Współrzędne przyrostu wektora  $d\vec{S}$  można wyrazić wzorem:

$$dS_i = u_i(x_j^0 + S_j) - u_i(x_j^0). \quad (5.50)$$



**Rys. 4.6. Schemat obrazujący odkształcenie ciała.**

Dokonując rozwinięcia współrzędnych przyrostu wektora w szereg Taylora w otoczeniu punktu  $P^0$  i przy założeniu, że otoczenie to jest wystarczająco małe, co umożliwia pominięcie wyższych potęg rozwinięcia Taylora, możemy z dokładnością do pierwszych pochodnych współrzędnych przemieszczenia  $\vec{u}$  napisać:

## WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

$$dS_i \cong u_{i,j} S_j. \quad (5.51)$$

Uwzględniając wzór (5.50) możemy powyższy związek zapisać w formie:

$$dS_i = (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) S_j. \quad (5.52)$$

Określmy wydłużenie (lub skrócenie) odcinka  $PP^0$  liczone na jednostkę na jednostkę jego długości:

$$\varepsilon = \frac{|d\vec{S}|}{|\vec{S}|}. \quad (5.53)$$

Obliczmy iloczyn skalarny wektorów  $\vec{S}$  i  $d\vec{S}$ :

$$\vec{S} \cdot d\vec{S} = |\vec{S}| |d\vec{S}| \cos \alpha = S_i dS_i. \quad (5.54)$$

ograniczając nasze rozważania do małych odkształceń ciał można przyjąć, że kąt  $\alpha$  jest bardzo mały i  $\cos \alpha \cong 1$ . Korzystając z równania (5.52) i (5.54) można zapisać:

$$\vec{S} \cdot d\vec{S} = |\vec{S}| |d\vec{S}| = (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) S_i S_j. \quad (5.55)$$

Można jednakże wykazać że:  $\omega_{ij} S_i S_j \cong 0$ , a więc:

$$\varepsilon = \frac{|d\vec{S}|}{|\vec{S}|} = \varepsilon_{ij} \frac{S_i S_j}{|\vec{S}|^2}. \quad (5.56)$$

Wprowadzając cosinusy kątów, jakie tworzy wektor  $\vec{S}$  z osiami współrzędnych  $x_i$ :

## WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

$$n_i = \frac{S_i}{|\vec{S}|}, \quad (5.57)$$

wydłużenie względne można zapisać w postaci:

$$\varepsilon = \varepsilon_{ij} n_i n_j. \quad (5.58)$$

z czego wynika, że wydłużenie lub skrócenie względne w dowolnym kierunku jest w każdym punkcie ośrodka określone przez 6 składowych tensora stanu odkształcenia.

### 4.4.2. Tensor obrotów.

Korzystając z własności symetrycznego tensora odkształcenia, można przewidzieć, że w każdym punkcie obszaru posiada on wartości główne i towarzyszące im kierunki główne odkształcenia. Rozpatrzmy dwa punkty ośrodka położone względem siebie bardzo blisko, ale wybrane w taki sposób, że łączący je wektor  $\vec{S}$  nie zmienił w trakcie odkształcenia ciała swojego kierunku. Wówczas wektor  $\vec{S}$  i jego przyrost  $d\vec{S}$  będą posiadały ten sam kierunek, a ich współrzędne będą wzajemnie proporcjonalne, co można wyrazić wzorem na współrzędne wektorów  $\vec{S}$  i  $d\vec{S}$ :

$$dS_i = \varepsilon S_i. \quad (5.59)$$

Jak wiadomo,  $\varepsilon$  jest miarą wydłużenia każdej współrzędnej wektora  $\vec{S}$ , a wobec tego jest miarą również wydłużenia (lub skrócenia) całego wektora  $\vec{S}$ , co możemy zapisać związkiem:

$$\varepsilon = \frac{|d\vec{S}|}{|\vec{S}|}. \quad (5.60)$$

Taki związek może występować tylko w przypadku, gdy wektor  $\vec{S}$  nie doznaje obrotu w trakcie odkształcenia, więc  $\omega_{ij} S_j = 0$ . Na podstawie tych stwierdzeń możemy zapisać:

$$dS_i = \varepsilon S_i = \varepsilon_{ij} S_j. \quad (5.61)$$

Powyższy związek prowadzi do równania:

## WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

$$(\varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}) A_j = 0. \quad (5.62)$$

Jeżeli podzielimy obie strony równania (5.62) przez długość wektora  $\vec{S}$ , to w miejsce współrzędnych wektora możemy wprowadzić wersor  $\vec{n}$  o współrzędnych  $n_i$ :

$$(\varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}) n_j = 0. \quad (5.63)$$

Powyższy układ równań wraz ze związkami:

$$n_i n_i = 1 \quad (5.64)$$

określa jednoznacznie wersor  $\vec{n}$  i odpowiadające jego kierunkowi odkształcenie  $\varepsilon$ .

Układ równań (5.63) jest układem trzech równań algebraicznych jednorodnych pierwszego stopnia. Układ ten ma rozwiązania niezerowe wtedy i tylko wtedy, gdy jego wyznacznik charakterystyczny równa się zeru:

$$\|\varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}\| = 0. \quad (5.65)$$

Obliczając wyznacznik (5.65), uzyskujemy równanie trzeciego stopnia względem  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon^3 - J_1(\varepsilon_{ij})\varepsilon^2 + J_2(\varepsilon_{ij})\varepsilon - J_3(\varepsilon_{ij}) = 0 \quad (5.66)$$

gdzie  $J_1, J_2, J_3$  są parametrami równania (5.66) i nie zależą od układu odniesienia. Są, więc **niezmiennikami stanu odkształcenia** wyrażonymi związkami:

$$J_1 = \varepsilon_{ii}, \quad J_2 = \frac{\partial |\varepsilon_{ij}|}{\partial \varepsilon_{kk}}, \quad J_3 = \|\varepsilon_{ij}\|. \quad (5.67)$$

Równanie (5.66) posiada zawsze trzy pierwiastki rzeczywiste nazywane wartościami głównymi tensora odkształcenia  $\varepsilon_{ij}$ . Zazwyczaj porządkujemy je według malejących wartości:



## WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3.$$

Aby określić kierunki odkształceń głównych wystarczy rozwiązać układ równań (5.63). Kierunki te uzyskamy za pomocą wektora  $\vec{n}$ . Można wykazać, że są one wzajemnie prostopadłe.

Jeżeli w badanym punkcie przyjmimy układ odniesienia, którego współrzędne pokrywają się z kierunkami głównymi stanu odkształcenia, to stan odkształcenia w tym punkcie opisują trzy odkształcenia główne  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ . Niezmienniki stanu odkształcenia wyrażą się wówczas tylko przy pomocy odkształceń głównych i mają postać:

$$\begin{aligned} J_1 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ J_2 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1, \\ J_3 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3. \end{aligned} \tag{5.68}$$

Tensor odkształcenia podobnie jak tensor naprężenia można rozłożyć na dwie części; część kulistą stanu odkształcenia i dewiatorową. **Tensor kulisty stanu odkształcenia** wyraża się wzorem:

$$\varepsilon_{ij}^k = \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} = \varepsilon_{sr} \delta_{ij} = \frac{1}{3} J_1 \delta_{ij}. \tag{5.69}$$

Tensor kulisty odpowiada równomiernemu rozszerzeniu lub ściśnięciu ośrodka w otoczeniu określonego punktu ośrodka. Pozostała część tensora stanu odkształcenia określana jest różnicą:

$$\varepsilon_{ij}^d = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^k, \tag{5.70}$$

co prowadzi do następującej definicji **dewiatora stanu odkształcenia**:

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij}^d = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{sr} \delta_{ij}. \tag{5.71}$$

**Zachodzi pytanie, czy składowe stanu odkształcenia mogą być funkcjami przyjmowanymi całkowicie dowolnie.**

Wystarczy wyobrazić sobie podział obszaru w stanie naturalnym (przed odkształceniem) na prostopadłościany wzajemnie do siebie przylegające. Gdyby nie było dodatkowych warunków i każdy z tych prostopadłościanów uległby odkształceniu według przyjętych funkcji składowych odkształcenia to ponowne złożenie odkształconych elementów mogłoby okazać się niemożliwe. Wynika z tego wniosek, że odkształcenia muszą spełniać określone warunki, które noszą nazwę warunków ciągłości

## WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

odkształceń. Jeżeli ośrodek zajmuje obszar jednorodny i chcemy wyznaczyć składowe stanu przemieszczenia  $u_i$ , gdy dane są składowe stanu odkształcenia  $\varepsilon_{ij}$ , to zadanie to jest rozwiązywalne jednoznacznie wtedy i tylko wtedy, gdy składowe stanu odkształcenia spełniają związki:

$$e_{ijk}e_{lmn}\varepsilon_{jm,nk} = 0. \quad (5.72)$$

które nazywamy **warunkami nierozdzielności odkształceń**. Przez  $e_{ijk}$  oznaczamy symbol Levi-Civita. W formie przedstawionej równaniami (5.72) wyprowadził je **Somigliana**. Wcześniej uzyskał je Saint-Venant w 1860 r.. Warunki nierozdzielności można przedstawić w postaci rozwiniętej:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} &= 2\varepsilon_{12,12}, \\ \varepsilon_{22,33} + \varepsilon_{33,22} &= 2\varepsilon_{23,23}, \\ \varepsilon_{33,11} + \varepsilon_{11,33} &= 2\varepsilon_{13,13}, \\ (\varepsilon_{12,3} + \varepsilon_{31,2} - \varepsilon_{23,1})_{,1} &= \varepsilon_{11,23}, \\ (\varepsilon_{23,1} + \varepsilon_{12,3} - \varepsilon_{31,2})_{,1} &= \varepsilon_{22,31}, \\ (\varepsilon_{31,2} + \varepsilon_{23,1} - \varepsilon_{12,3})_{,1} &= \varepsilon_{33,12}. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Powyższe równania i związki będą przez nas często wykorzystywane do tworzenia modeli ośrodka porowatego traktowanego jako ośrodek jednorodny.