

Wykład IV

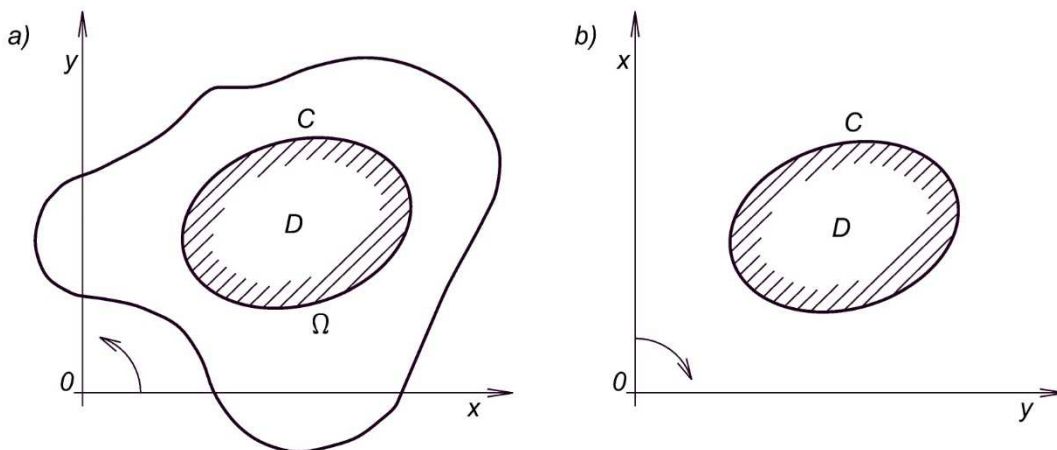
Twierdzenia całkowe

4.1 Twierdzenie Greena.

Płaszczyznę zorientowaną będziemy określać płaszczyznę z wyróżnionym na niej obrotem, zwanym obrotem dodatnim. Orientację płaszczyzny przeciwną względem danej orientacji otrzymujemy zmieniając w płaszczyźnie przyjęty dodatni obrót na przeciwny.

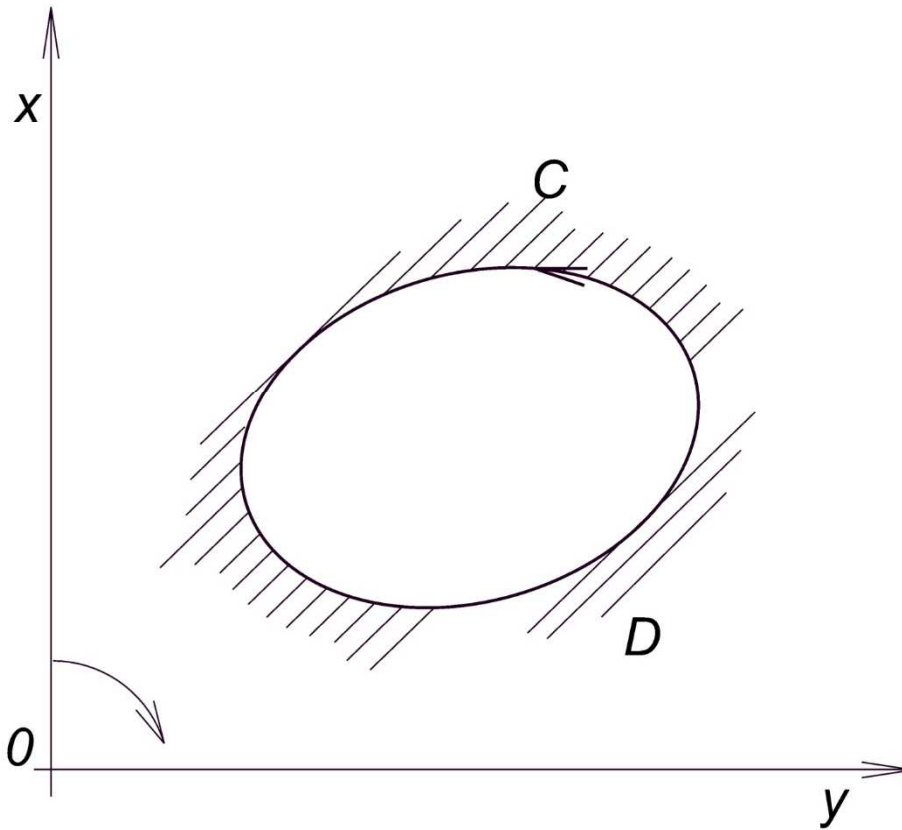
Płaszczyznę orientujemy na przykład wprowadzając ortokartezjański układ współrzędnych (prostokątny złożony z pary osi x, y). Wtedy przez dodatni obrót rozumiemy ten z obrotów, przy którym pierwsza oś pokryje się z drugą (co do kierunku i zwrotu) z drugą osią przy obrocie o kąt mniejszy spośród dwu możliwych.

Z punktu widzenia geometrii płaszczyzna przedstawiona na rys. 3.1a nazywa się płaszczyzną zorientowaną w prawo. Jeżeli zmienimy np. nazwę osi na rys. 3.1b tj. nazwiemy oś x osią y , zaś oś y osią x , to płaszczyzna miałaby orientację lewą.



Rys. 3.1 Orientacja układu współrzędnych i obszaru zamkniętego.

Linia zamknięta ograniczająca obszar jednopójny, zwany wnętrzem linii, leżąca na zorientowanej płaszczyźnie może mieć jedno z dwu skierowań. Dodatnim skierowaniem linii względem jej wnętrza (obszaru, którego jest ona brzegiem) na zorientowanej płaszczyźnie nazywamy skierowanie zgodne z orientacją płaszczyzny: gdy płaszczyzna ma prawą orientację (rys. 3.1.a) to człowiek idący w dodatnim kierunku wzdłuż linii (po brzegu C obszaru D) ma lewą rękę nad obszarem, gdy płaszczyzna ma lewą orientację (rys. 3.1.b) to prawą rękę. Na rys. 3.2 przedstawiono przypadek ujemnego skierowania linii względem jej wnętrza, a dodatniego względem obszaru będącego zewnątrz linii. Linie skierowaną dodatnio względem swego wnętrza nazywamy **konturem**.



Rys. 3.2 Orientacja dodatnia

Twierdzenie Greena.

Niech w jednospójnym obszarze Ω na zorientowanej płaszczyźnie (rys. 3.1.a)dana będzie gładka, zamknięta bez punktów wielokrotnych linia C, skierowana dodatnio względem swego wnętrza D oraz dwie funkcja $P(M)$ i $Q(M)$ ($M \in \Omega$) klasy C_1 . Wtedy:

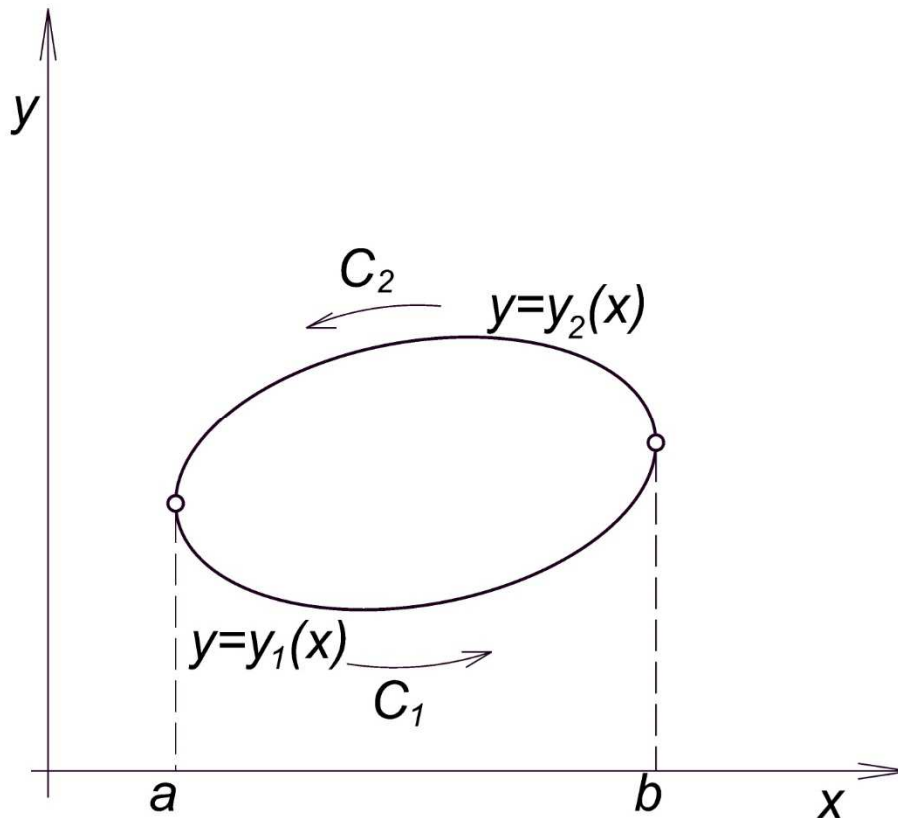
$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma \tag{4.1}$$

Dowód

Dla uproszczenia dowodu powyższego twierdzenia Greena założymy, że obszar D jest normalny względem obu osi układu. Obszarem normalnym względem osi układu nazywamy taki obszar, którego brzeg każda prosta równoległa do drugiej osi przecina w jednym punkcie lub w dwu punktach, lub w kontinuum punktów, lub wreszcie nie przecina wcale.

Równość Greena jest wynikiem dodawania stronami dwu niezależnych od siebie równości, w których występują jedna z funkcji P lub Q. Dowiedzimy najpierw, że

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma = -\oint_C Pdx \tag{4.2}$$



Rys. 3.3 Schemat obliczania

W tym celu zamieńmy całkę podwójną w równości na całkę iterowaną. Otrzymamy wtedy:

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy = \int_a^b P(x, y) \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx = \\ &= \int_a^b P(x, y_2(x)) dx - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx = - \int_{C_2} P(x, y) dx - \int_{C_1} P(x, y) dx = - \int_C P(x, y) dx \end{aligned}$$

Dowód drugiej równości twierdzenia Greena:

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} d\sigma = \int_C Q dy$$

można oprzeć na udowodnionej już poprzednio równości, zamieniając rolami zmienne \$x\$ i \$y\$ oraz funkcje \$P\$ i \$Q\$. Wtedy jednak, gdy zmienna \$y\$ uznana zostaje za pierwszą, zaś \$x\$ za drugą, płaszczyzna zmienia orientację. Linia \$C\$ nie jest wtedy dodatnio skierowana względem swego wnętrza, lecz przeciwnie, co powoduje, że po prawej stronie równości na występuje znak minus.

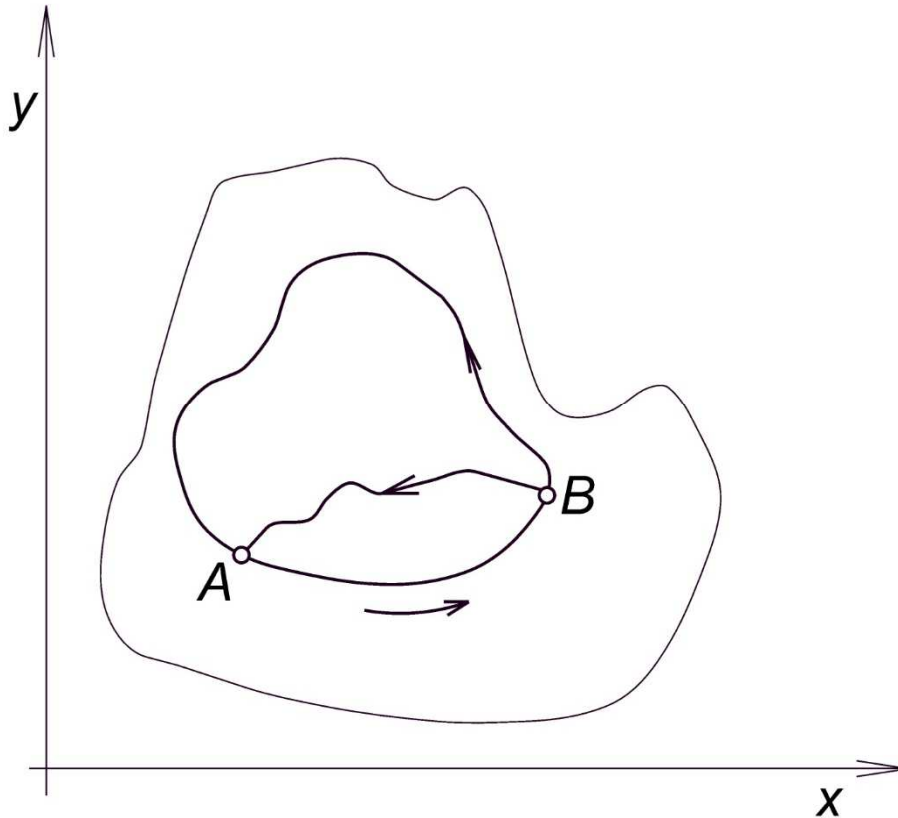
Cbdo.

4.2 Całka różniczki zupełnej na płaszczyźnie.

WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Jak wiemy, warunkiem koniecznym na to, by wyrażenie $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ było różniczką zupełną w obszarze, jest by w tym obszarze była spełniona równość pochodnych cząstkowych:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (4.3)$$



Rys. 4.4 Całka różniczki zupełnej

Jeżeli powyższa zależność jest spełniona to całka podwójna występująca w równaniu Greena (4.1) po dowolnym obszarze w nim zawartym jest równa zero. Wtedy i całka liniowa, występująca w tym równaniu (4.1) po dowolnej linii zamkniętej jest równa zero, więc całka

$$\int_{\hat{A}B} P dx + Q dy \quad (4.4)$$

Nie zależy od drogi całkowania, a zależy tylko od początku A i końca B. Warunek (4.3) jest nie tylko konieczny, ale i wystarczający by wyrażenie $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ było w obszarze jednopójnym różniczką zupełną.

4.3 Twierdzenie Gausa Ostrogradskiego w postaci analitycznej.

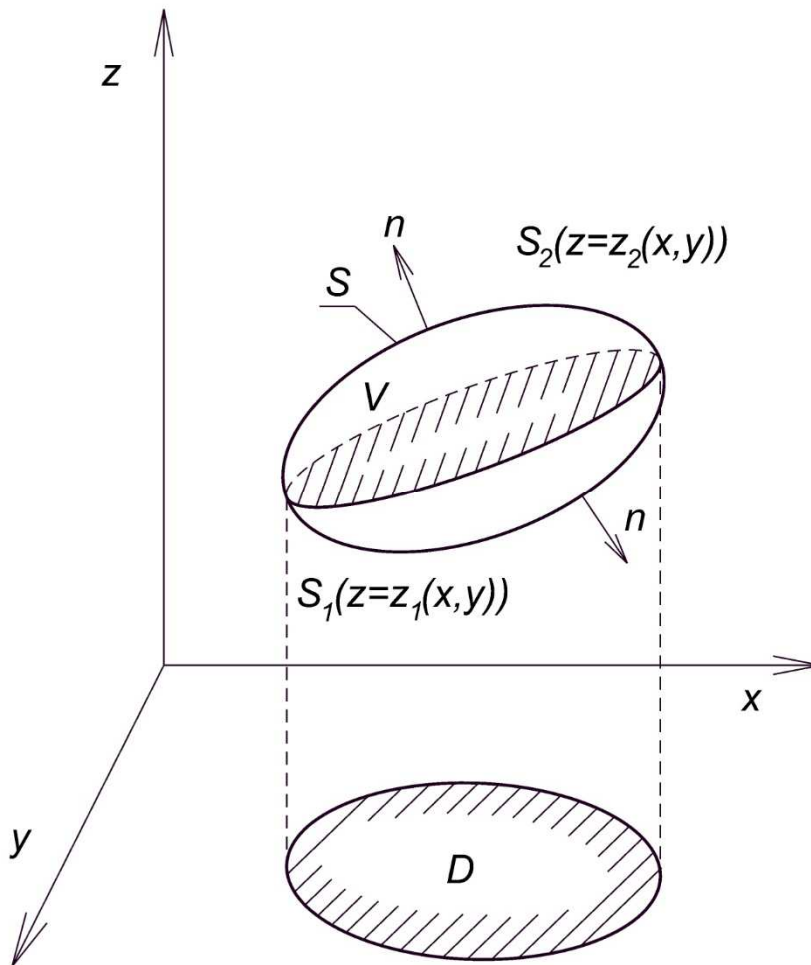
Twierdzenie.

WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Niech będzie dany obszar V (rys. 4.5) ograniczony zamkniętą gładką powierzchnią S , zorientowaną zewnątrz. Niech w obszarze domkniętym $V+S$ dane będą trzy funkcje $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ klasy C_1 . Wtedy zachodzi równość nosząca nazwę Gausa Ostrogradskiego:

$$\iint_S Pdx + Qdy + Rdz = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV \quad (4.5)$$

w której po lewej stronie znajduje się zorientowana całka powierzchniowa.



Rys. 45 Całka powierzchniowa na obszarze S

Dowód.

Dla uproszczenia dowodu założymy, że obszar V jest normalny względem każdej ze ścian ortokartezjańskiego układu współrzędnych. Następnie zauważymy, że równość (4.5) jest wynikiem dodawania stronami niezależnych od siebie równości. Jedną z nich np. to:

WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dV = \iiint_S R dx dy \quad (4.6)$$

W tym celu występująca w równości (4.6) całkę potrójną zamienimy na całkę powierzchniową (rys. 3.5):

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dV &= \iint_D d\sigma \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz = \iint_D R(x, y, z) \Big|_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} d\sigma = \\ &= \iint_D R(x, y, z_2(x, y)) d\sigma - \iint_D R(x, y, z_1(x, y)) d\sigma = \\ &= \iint_{S_2} R dx dy + \iint_{S_1} R dx dy = \iiint_S R dx dy \end{aligned}$$

Gdzie S_1 i S_2 oznaczone zostały odpowiednio dolna i górna część powierzchni S ; są to takie jej części, dla których normalna (zewnątrzna) tworzy w pierwszym przypadku kąt rozwarty z osią z , zaś w drugim przypadku kąt ostry. Właśnie dlatego znak minus stojący przed jedną z całek został zastąpiony znakiem plus, gdyż kąt jaki tworzy normalna n do powierzchni S , z osią z jest rozwarty.

Analogicznie dowodzimy równości:

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dV = \iiint_S P dy dz, \quad \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dV = \iiint_S Q dz dx$$

Dodając je stronami do równości (4.6) otrzymujemy tezę twierdzenia Gaussa Ostrogradskiego.

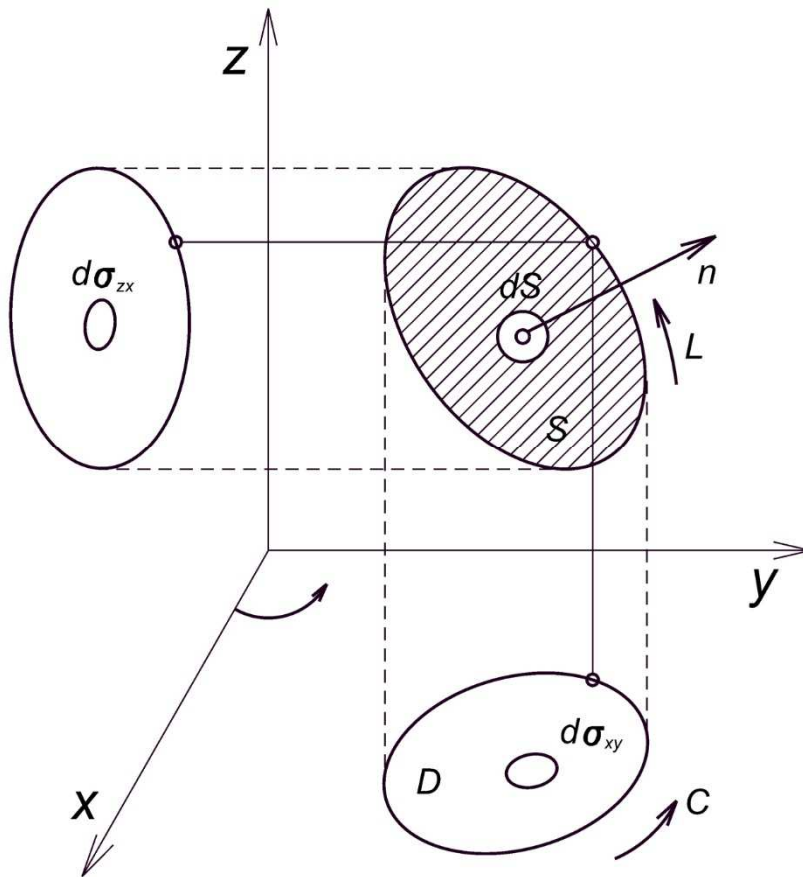
4.4 Twierdzenie Stokesa w postaci analitycznej.

Twierdzenie.

Niech będzie dana w przestrzeni gładka powierzchnia S ograniczona gładką linią L (rys. 4.6), przy czym skierowanie linii L wraz z orientacją powierzchni muszą być zgodne z przyjętą orientacją przestrzeni.

Niech krzywa wraz z powierzchnią znajduje się w obszarze, w którym określone są funkcje klasy C_1 $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ punktu M . Wtedy zachodzi równość nosząca nazwę twierdzenia Stokesa:

$$\begin{aligned} \oint_L P dx + Q dy + R dz &= \\ &= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned} \quad (4.7)$$



Rys. 4.6 Schemat do twierdzenia Stokesa

Dowód.

Dla uproszczenia dowodu przyjmijmy, że linia L jest tak położona w przestrzeni, że jej rzuty na ściany xOy i zOx układu są gładkie i nie mają punktów wielokrotnych oraz, że powierzchnia S wyraża się jednoznacznie względem tych ścian. W szczególności niech jej równaniem będzie $z=z(x,y)$, $(x, y) \in D + C$ gdzie $D+C$ jest rzutem $S+L$ na ścianę xOy . Zauważymy, że równość (4.7) jest wynikiem zsumowania trzech niezależnych równości. Dowiedzimy najpierw jednej z nich:

$$\iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \iint_S \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_L P dx \quad (4.8)$$

W tym celu napiszemy związki między elementami dS (rys. 3.6) powierzchni S i elementami $d\sigma_{zx}$ oraz $d\sigma_{xy}$ rzutu ds na ściany zOx i xOy . Jeżeli oznaczmy $n = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, to:

$$d\sigma_{zx} = dS \cos \beta, \quad d\sigma_{xy} = dS \cos \gamma$$

wobec czego:

WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

$$d\sigma_{zx} = \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} d\sigma_{xy} \quad (4.9)$$

Wiemy, że wektorem normalnym do powierzchni w danym punkcie, a więc wektorem kolinearnym z \mathbf{n} w tym punkcie jest wektor:

$$\mathbf{N} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1 \right) = \text{grad} [z(x, y) - z]$$

Wobec czego między wektorami \mathbf{N} i \mathbf{n} zachodzi związek:

$$\frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y} : -1 = \cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma$$

Korzystając z niego możemy zależność (4.9) zapisać:

$$d\sigma_{zx} = -\frac{\partial z}{\partial y} d\sigma_{xy} \quad (4.10)$$

Element $d\sigma_{zx}$ występujący w pierwszej z całek (4.8) jest oznaczony $dz dx$, zaś $d\sigma_{xy}$, występujący w drugiej z całek przez $dx dy$, wobec czego lewa strona zależności (4.8) dzięki (4.10) przyjmie postać:

$$-\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx dy$$

W której funkcja podcałkowa jest pochodną funkcji złożonej:

$$P(x, y, z(x, y)) \stackrel{df}{=} P^*(x, y) \quad (4.11)$$

względem zmiennej y , a sama całka w której występuje zmienna z , jest całką podwójną w obszarze D , a więc jest równa:

$$-\iint_D \frac{\partial P^*(x, y)}{\partial y} dx dy \quad (4.12)$$

Przekształcając całkę (4.12) wg wzoru Greena (krzywa C , będąca rzutem L na xOy , jest skierowana dodatnio względem swego wnętrza), otrzymamy:

$$\oint_C P^*(x, y) dx$$

a wracając do poprzedniego oznaczenia wg definicji (4.11) i do linii L , której rzutem jest C , otrzymamy ostatecznie:

$$\oint_L P dx$$

Co kończy dowód równości (4.8).

Dowód pozostałych równości tj.:

WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

$$\iint_S \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \iint_S \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz = \int_L Q dy,$$

$$\iint_S \frac{\partial R}{\partial y} dy dz - \iint_S \frac{\partial R}{\partial x} dz dx = \int_L R dz$$

Można przeprowadzić stosując przemianę cykliczną do równości (4.8). Dodając wszystkie te trzy równości stronami otrzymujemy tezę twierdzenia Stokesa.

Cbdo.

Twierdzenie Stokesa można zapisać nieco inaczej korzystając z zależności:

$$d\sigma_{yz} = dS \cos \alpha, \quad d\sigma_{zx} = dS \cos \beta, \quad d\sigma_{xy} = dS \cos \gamma$$

wtedy równość (4.7) przybierze postać:

$$\begin{aligned} & \int_L P dx + Q dy + R dz = \\ & = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS \end{aligned} \quad (4.13)$$

Po lewej stronie tej równości znajduje się całka liniowo skierowana, zaś po prawej całka powierzchniowa zorientowana.

4.5 Całka różniczki zupełnej w przestrzeni.

W dalszym ciągu będziemy korzystać z własności całki krzywoliniowej w przestrzeni, gdy jej wyrażenie podcałkowe jest różniczką zupełną.

Twierdzenie.

Warunkiem koniecznym na to, żeby wyrażenie różniczkowe:

$$P dx + Q dy + R dz \quad (4.14)$$

Gdzie P, Q, R są funkcjami klasy C_1 zmiennych x, y, z było w pewnym obszarze różniczką zupełną, jest zachodzenie następujących trzech równości w tym obszarze:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad (4.15)$$

Dowód.

Dla udowodnienia załóżmy, że (4.14) jest różniczką zupełną funkcji $\phi(M) = \phi(x, y, z)$. Wobec tego:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz$$

I z wyrażenia (4.14) dla dowolnych różniczek dx, dy, dz wynika, że

WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

$$P = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (4.16)$$

Funkcja ϕ jest klasy C_2 . Tworząc wszystkie możliwe jej pochodne mieszane drugiego rzędu i korzystając z twierdzenia o kolejności różniczkowania, otrzymamy szukane warunki (4.15).

Cbdo.

Twierdzenie.

W obszarze jednorodnym (powierzchniowo) całka liniowa z różniczki zupełnej wzdłuż dowolnej gładkiej linii zamkniętej, leżącej w tym obszarze, jest równa zero.

Dowód.

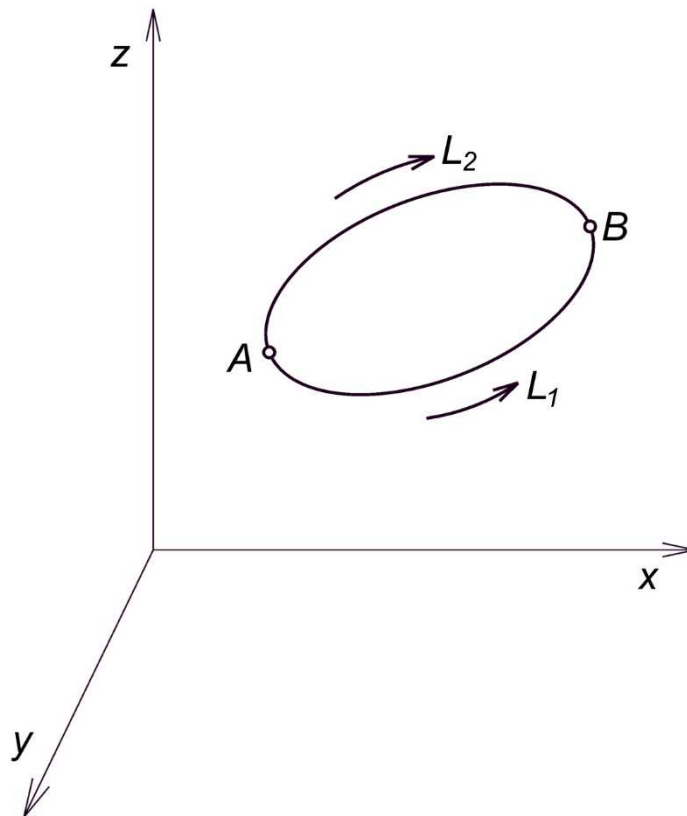
W dowodzie ograniczymy się jedynie do linii, przez które można przesunąć powierzchnię leżącą w tym obszarze. Wystarczy wtedy zastosować Stokesa, w którego zapisie (4.7) po prawej stronie pod całką powierzchniową znajduje się wyrażenie równe tożsamościowo zero. Wynika to ze spełnienia warunku koniecznego (4.15) różniczki zupełnej. Wobec tego po lewej stronie równości (4.7) znajduje się całka liniowa, która dla każdej linii jest równa zero.

Cbdo.

Twierdzenie.

W obszarze powierzchniowo jednorodnym całka liniowa z różniczki zupełnej nie zależy od drogi całkowania, lecz tylko od początku i końca drogi.

Dowód.



Rys. 4.7 Całka liniowa z różniczki zupełnej

Aby to wykazać, poprowadźmy przez dwa punkty A i B (rys. 4.7) w obszarze powierzchniowo jednospójnym gładką linię zamkniętą L, leżącą całkowicie w tym obszarze. Jej skierowane łuki o początku A i końcu B nazwijmy L_1 i L_2 . Wobec tego linia zamknięta L może być skierowana np. zgodnie z L_1 i wtedy $L = L_1 - L_2$. Z poprzednie go twierdzenia wynika, że

$$\oint_{L_1 - L_2} = \int_{L_1} + \int_{-L_2} = \int_{L_1} - \int_{L_2} = 0 \quad (4.17)$$

Cbdo.

Twierdzenie.

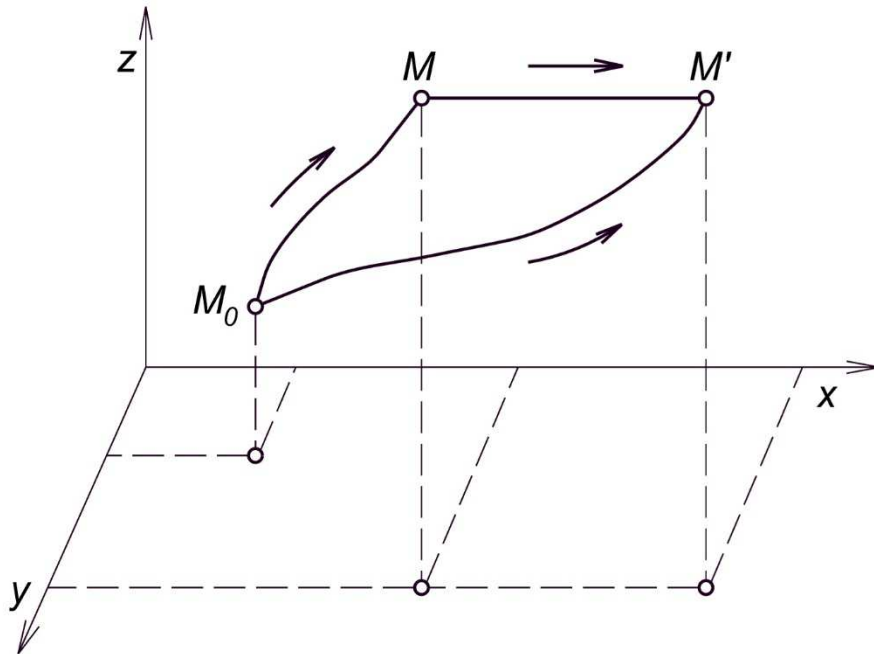
Jeżeli całka liniowa wzdłuż każdej drogi zależy tylko od jej początku i końca w obszarze jednospójnym, to to wyrażenie podcałkowe jest różniczką zupełną.

Dowód.

Dla udowodnienia przyjmijmy dowolny punkt M_0 (rys. 4.8) i połączmy go dwiema drogami z

dowolnym punktem $M=(x,y,z)$, przy czym wszystkie narysowane linie, tzn. $\widehat{M_0M}$, $\widehat{M_0M'}$ i

równoległy do osi x odcinek $\overline{MM'}$ leżą w całkowicie w rozpatrywanym obszarze. Punkt M' jest punktem bliskim punktu M i o tych samych współrzędnych y i z.



Rys. 4.8 Schemat do dowodu

Określmy funkcję $\phi(M)$ jako całkę wyrażenia $Pd\xi + Qd\eta + Rd\zeta$ wzdłuż dowolnej drogi łączącej ustalony punkt M_0 z punktem M tzn..

$$\phi(x, y, z) = \int_{M_0M} P(\xi, \eta, \zeta)d\xi + Q(\xi, \eta, \zeta)d\eta + R(\xi, \eta, \zeta)d\zeta \quad (4.18)$$

Gdzie funkcje P, Q i R są ciągłymi funkcjami w rozpatrywanym obszarze.

Aby wykazać, że wyrażenie podcałkowe w równości (4.18) jest różniczką zupełną, wystarczy wykazać, że

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = P(x, y, z), \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = Q(x, y, z), \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = R(x, y, z) \quad (4.19)$$

Dowiedz pierwszej z równości (4.19). Z niezależności całki od drogi całkowania wynika, że

$$\int_{M_0M} + \int_{MM'} = \int_{M_0M'}$$

Lub w innym zapisie

$$\phi(x + \Delta x, y, z) - \phi(x, y, z) = \int_{MM'} Pd\xi = \int_x^{x+\Delta x} P(\xi, \eta, \zeta)d\xi \quad (4.20)$$

gdzie przez $(x + \Delta x, y, z)$ oznaczony został punkt M' .

Dzieląc obustronnie równość (4.20) przez Δx i przechodząc do granicy, gdy $\Delta x \rightarrow 0$, otrzymujemy pierwszą z równości (4.19). Analogicznie dowodzimy pozostałych równości.

WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

4.6 Postać wektorowa twierdzenia Gausa Ostrogradskiego.

Niech w pewnym obszarze Ω będzie pole wektorowe $\mathbf{R} = (R_x, R_y, R_z)$ oraz gładka powierzchnia S . Utwórzmy następującą całkę powierzchniową po zorientowanej powierzchni S :

$$\omega(\mathbf{R}, S) \stackrel{df}{=} \iint_S R_x dydz + R_y dzdx + R_z dxdy = \iint_S (R_x \cos \alpha + R_y \cos \beta + R_z \cos \gamma) dS$$

lub pamiętając, że $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ jest jednostkowym wektorem normalnym do powierzchni S , leżącym po jej stronie wyróżnionej (gdy początek leży na S).

$$\omega(\mathbf{R}, S) = \iint_S \mathbf{R} \cdot \mathbf{n} dS$$

Lub wreszcie, przyjmując oznaczenie $d\mathbf{S} = dS\mathbf{n}$:

$$\omega(\mathbf{R}, S) = \iint_S \mathbf{R} \cdot d\mathbf{S} \quad (4.21)$$

Definicja.

Całkę (4.21) nazywamy **strumieniem pola wektorowego \mathbf{R}** przez zorientowaną powierzchnię S .

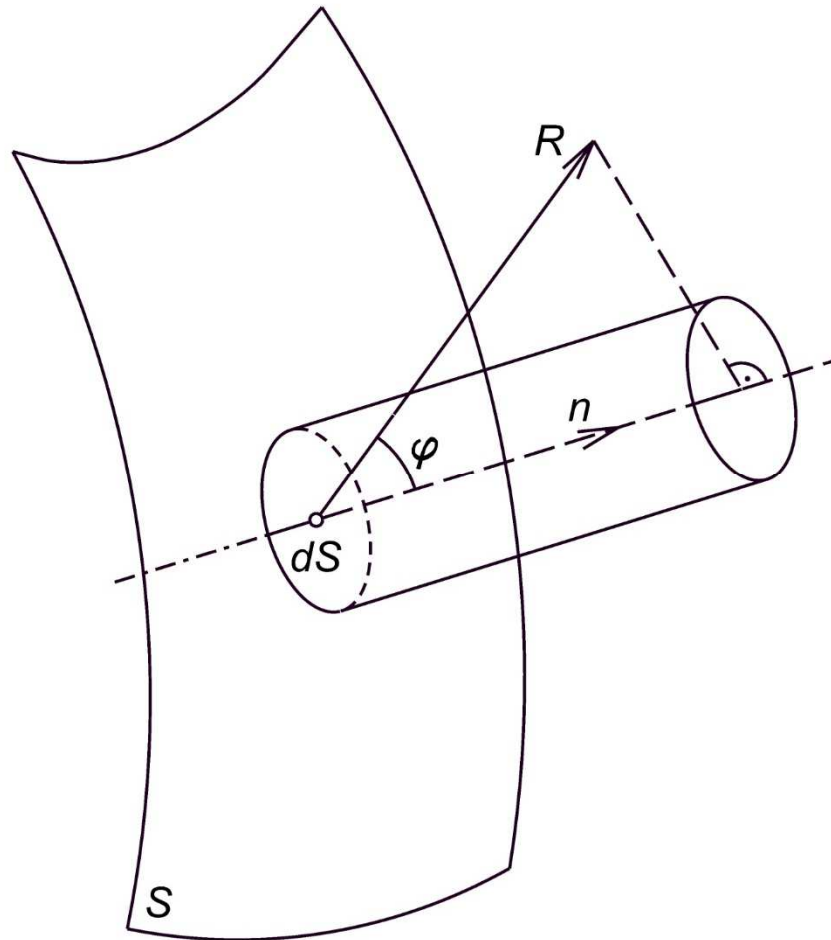
Strumień ma oczywiście następujące własności:

$$\omega(\mathbf{R}_1, S) + \omega(\mathbf{R}_2, S) = \omega(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2, S)$$

$$C\omega(\mathbf{R}, S) = \omega(C\mathbf{R}, S)$$

$$\omega(\mathbf{R}, S_1) + \omega(\mathbf{R}, S_2) = \omega(\mathbf{R}, S_1 + S_2)$$

Przy czym ta ostatnia równość zachodzi pod warunkiem, że obie powierzchnie S_1 i S_2 nie mają części wspólnych (z wyjątkiem być może brzegów).



Rys. 4.9 Hydromechaniczna interpretacja strumienia pola wektorowego

Hydromechaniczna interpretacja strumienia pola wektorowego jest następująca:

Jeżeli uważać \mathbf{R} za pole wektorowe prędkości cieczy przepływającej przez zorientowaną powierzchnię, to wyrażenie podcałkowe w (4.21) jest względną objętością cieczy, która przepływa w jednostce czasu przez element dS . (rys. 4.9), tzn. jest względną objętością walca o podstawie dS i wysokości równej współrzędnej (a więc dodatniej lub ujemnej) wektora \mathbf{R} względem osi normalnej do powierzchni, której wektorem jest \mathbf{n} :

$$\mathbf{R} \cdot d\mathbf{S} = R \cos(\mathbf{R}, \mathbf{n}) dS = R_n dS$$

Wobec tego strumień

$$\omega(\mathbf{R}, S) = \iint_S R_n dS$$

Jest w tej interpretacji względną objętością cieczy, która przepłynie w jednostce czasu przez zorientowaną powierzchnię S płynąc z prędkością \mathbf{R} .

WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Twierdzenie.

Strumień pola wektorowego przez zamkniętą i zorientowaną zewnątrz powierzchnię S jest równy całce objętościowej dywergencji tego pola, rozciągniętej na obszar, którego brzegiem jest ta powierzchnia.:

$$\iint_S \mathbf{R} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{R} dV \quad (4.22)$$

4.7 Geometryczna postać definicji dywergencji.

Wyobraźmy sobie, że gładka zamknięta powierzchnia S maleje w ten sposób, że jej średnica dąży do zera, a punkt M stale znajduje się w obszarze wypukłym V ograniczonym przez S .

Jeżeli pole \mathbf{R} jest klasy C_1 , to jego dywergencja jest ciągła i wobec tego ma własność Darboux, istnieje wtedy taki punkt M^* , w którym dywergencja jest równa średnie wartości całki występującej po prawej stronie wzoru (4.22). Możemy do zapisać następująco:

$$\operatorname{div} \mathbf{R}(M^*) = \frac{1}{V} \iint_S \mathbf{R} \cdot d\mathbf{S}$$

Oczywiście gdy objętość V dąży do zera, to $M^* \rightarrow M$, wobec czego;

$$\operatorname{div} \mathbf{R}(M) = \lim_{V \rightarrow M} \frac{\iint_S \mathbf{R} \cdot d\mathbf{S}}{V} \quad (4.23)$$

Co możemy sformułować:

Dywergencja pola wektorowego w danym punkcie jest granicą ilorazu strumienia tego pola przez zamkniętą, zewnątrz zorientowaną powierzchnię i objętości obszaru przez tę powierzchnię ograniczonego, gdy średnica obszaru dąży do zera, przy czym punkt, w którym definiujemy dywergencję stale znajduje się w tym obszarze.

Dywergencja jest więc w obszarze polem skalarowym, tzn. nie zależy od układu współrzędnych.

Przykład obliczeniowy

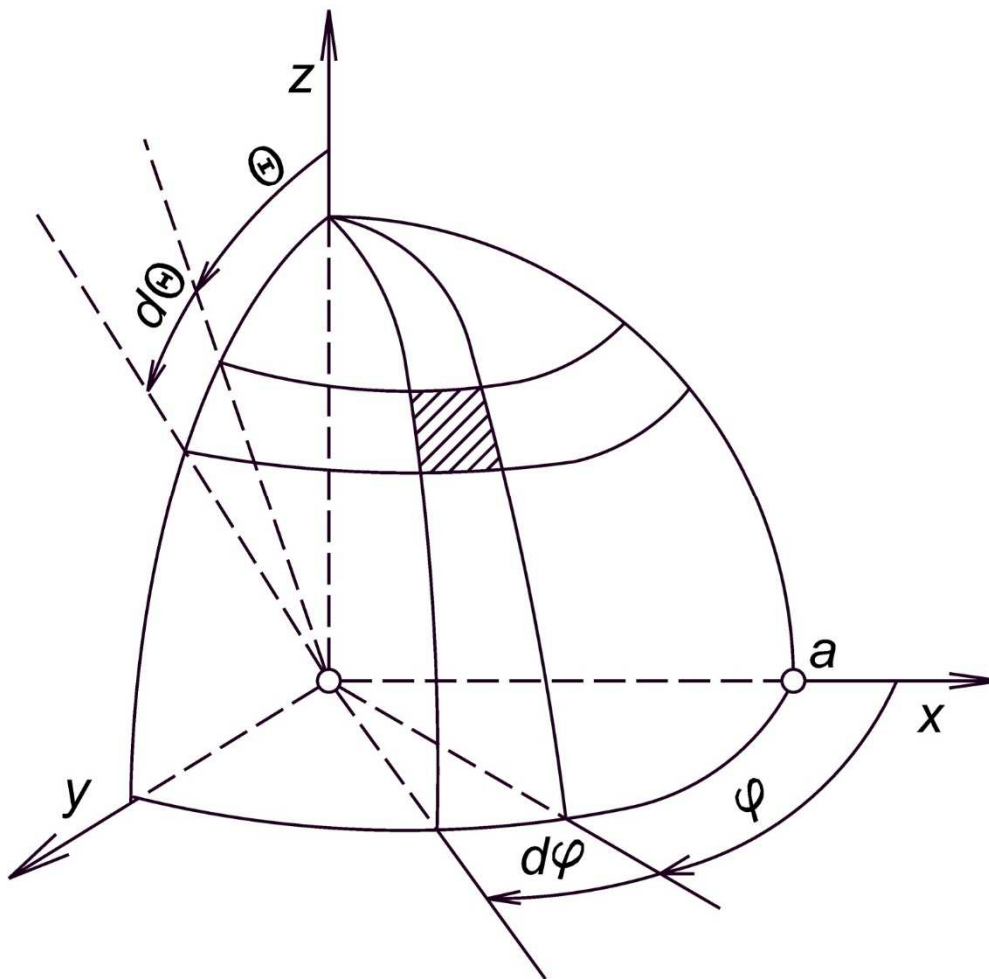
Treść zadania.

Obliczyć strumień pola wektorowego $\mathbf{R} = (x, y, z)$ przez zewnątrz zorientowaną sferę o środku w początku układu i promieniu równym a (rys.4.10). Sprawdzić wynik za pomocą twierdzenia Gausa Ostrogradskiego.

Rozwiązanie.

Strumień pola wektorowego obliczamy:

$$\iint_S \mathbf{R} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (R_x \cos \alpha + R_y \cos \beta + R_z \cos \gamma) dS$$



Rys. 4.10 Schemat obliczeniowy

Zw względu na to, że przemiana cykliczna nie zmienia wartości całek występujących po prawej stronie powyższego wzoru, więc:

$$\iint_S \mathbf{R} \cdot d\mathbf{S} = 3 \iint_S R_z \cos \gamma dS$$

We współrzędnych sferycznych:

$$dS = a^2 \sin \theta d\phi d\theta$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{a} = \cos \theta$$

Stąd

$$\iint_S \mathbf{R} \cdot d\mathbf{S} = 3a^3 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = 4a^3 \pi$$

II metoda:

WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{R} dV = 3 \iiint_V dV = 4a^3 \pi$$

4.8 Pole wektorowe bezźródłowe.

Równością $\operatorname{div} \mathbf{R} = 0$ zdefiniowaliśmy wektorowe pole bezźródłowe. Posługując się twierdzeniem Gaussa – Ostrogradskiego, w postaci wektorowej (4.22) możemy wysłowić równoważne tej definicji sformułowanie:

Definicja

Pole wektorowe jest w pewnym obszarze bezźródłowe, jeżeli strumień tego pola przez każdą powierzchnię zamkniętą, leżącą w tym obszarze, jest równy zeru.

Można wykazać, że jeżeli o obszarze jednorodnym pewne pole wektorowe \mathbf{R} jest bezźródłowe, to istnieje takie pole wektorowe Φ w tym obszarze, którego rotacja jest identyczna z danym polem wektorowym \mathbf{R} .

$$[\operatorname{div} \mathbf{R} = 0] \equiv [\mathbf{R} = \operatorname{rot} \Phi] \quad (4.24)$$

Pole wektorowe Φ występujące w tożsamości (4.24) nazywamy **potencjałem wektorowym bezźródłowego pola wektorowego \mathbf{R}** .

Wykażemy teraz, że dodanie do potencjału wektorowego pola solenoidalnego dowolnego pola potencjalnego (tzn. pola wektorowego mającego potencjał skalarowy) nie zmienia samego pola solenoidalnego.

Niech pole solenoidalne \mathbf{R} ma potencjał wektorowy Φ_1 tzn. że:

$$\mathbf{R} = \operatorname{rot} \Phi_1$$

Weźmy dowolne pole potencjalne Ω tzn. takie, że:

$$\operatorname{rot} \Omega = 0$$

kładąc

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \Omega$$

Mamy dzięki liniowości operacji „rot”

$$\operatorname{rot} \Phi_2 = \operatorname{rot} (\Phi_1 + \Omega) = \operatorname{rot} \Phi_1 + \operatorname{rot} \Omega = \operatorname{rot} \Phi_1$$

4.9. Poszukiwanie potencjału wektorowego.

Niech w obszarze jednorodnym dane będzie pole wektorowe $\mathbf{R} = (R_x, R_y, R_z)$ bezźródłowe, tzn. spełniając wektorowe równanie różniczkowe:

$$\operatorname{div} \mathbf{R} = \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z} = 0 \quad (4.25)$$

Szukamy takiego pola wektorowego Φ , które związane jest z danym polem wektorowym równością

WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

$$\mathbf{R} = \text{rot}\Phi \quad (4.26)$$

Jak wiemy pole Φ może być znalezione z dokładnością do dowolnego pola potencjalnego, które można dodać do szczególnego rozwiązania równania (4.26). To pozwala narzucić pewne warunki na poszukiwaną całkę szczególną równania (4.25).

Założmy, że poszukiwane pole Φ ma współrzędną względem osi z tożsamościowo równą zeru, tzn., że $\Phi_z \equiv 0$. Wtedy równość (4.26) da się rozpisać analitycznie:

$$R_x = -\frac{\partial\Phi_y}{\partial z}, \quad R_y = \frac{\partial\Phi_x}{\partial z}, \quad R_z = \frac{\partial\Phi_y}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_x}{\partial y} \quad (4.27)$$

Całki dwu pierwszych równań (4.27) przy oznaczeniu $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ dowolnie ustalonego punktu obszaru, przyjmują postać:

$$\Phi_y = -\int_{z_0}^z R_x(x, y, z) dz + f(x, y), \quad \Phi_x = \int_{z_0}^z R_y(x, y, z) dz + g(x, y) \quad (4.28)$$

Gdzie f i g są do czasu wzięcia pod uwagę trzeciego równania (4.27) dowolnymi funkcjami zmiennych x i y . Żeby je wyznaczyć, znajdziemy związek między nimi, wstawiając prawe strony równości (4.28) do ostatniej z równości (4.27). Będzie wtedy:

$$R_z(x, y, z) = \int_{z_0}^z \frac{\partial R_z}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = R_z|_{z_0} + \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}$$

I wreszcie

$$R_z(x, y, z_0) = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}$$

Przyjmijmy $g(x, y) \equiv 0$. Wtedy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = R_z(x, y, z_0)$$

a następnie

$$f(x, y) = \int_{x_0}^x R_z(x, y, z_0) dx + h(y)$$

Gdzie $h(y)$ jest funkcją dowolną. W celu znalezienia rozwiązania szczególnego uczynimy $h(y) \equiv 0$.

Otrzymaliśmy więc rozwiązanie szczególne zagadnienia:

WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

$$\begin{aligned}\Phi_x &= \int_{z_0}^z R_y(x, y, z) dz \\ \Phi_y &= \int_{x_0}^x R_z(x, y, z_0) dx - \int_{z_0}^z R_x(x, y, z) dz \\ \Phi_z &= 0\end{aligned}\tag{4.29}$$

Inne szczególne rozwiązania otrzymamy dokonując dwukrotnie przemiany cyklicznej we wzorach (4.29) i dodając do siebie otrzymane pola wektorowe. Dostajemy ostatecznie:

$$\begin{aligned}\Phi_x &= \frac{1}{3} \int_{z_0}^z [R_y(x, y, z) + R_y(x, y_0, z)] dz - \frac{1}{3} \int_{y_0}^y R_z(x, y, z) dy \\ \Phi_y &= \frac{1}{3} \int_{x_0}^x [R_z(x, y, z) + R_z(x, y, z_0)] dx - \frac{1}{3} \int_{z_0}^z R_x(x, y, z) dz \\ \Phi_z &= \frac{1}{3} \int_{y_0}^y [R_x(x, y, z) + R_x(x_0, y, z)] dy - \frac{1}{3} \int_{y_0}^y R_y(x, y, z) dx\end{aligned}\tag{4.30}$$

Przykład obliczeniowy

Treść zadania.

Dane jest pole wektorowe $\mathbf{R} = [2(y+z), 2(z+x), 2(x+y)]$. Sprawdzić, czy jest ono solenoidalne i znaleźć jego potencjał wektorowy.

Rozwiązanie.

Oznaczmy:

$$R_x = 2(y+z), \quad R_y = 2(z+x), \quad R_z = 2(x+y)$$

Obliczmy dywergencję pola \mathbf{R}

$$\operatorname{div} \mathbf{R} = \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z} = 0$$

Więc pole \mathbf{R} jest bezźródłowe w całej przestrzeni, tzn. jest solenoidalne, więc $\mathbf{R} = \operatorname{rot} \Phi$. Oznaczając $\Phi = (\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z)$ posłużymy się wzorami (4.29). Niech $M_0 = (0, 0, 0)$. Wtedy

$$\begin{aligned}\Phi_x &= \int_0^z 2(z+x) dz = z^2 + 2zx \\ \Phi_y &= \int_0^x 2(x+y) dx - \int_0^z 2(y+z) dz = x^2 + 2xy - 2yz - z^2 \\ \Phi_z &= 0\end{aligned}$$

Ogólnym rozwiązaniem zadania jest potencjał wektorowy

WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

$$\Phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + z^2 + 2zx, \frac{\partial \phi}{\partial y} + x^2 + 2xy - 2yz - z^2, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$

gdzie $\phi(x, y, z)$ jest dowolną funkcją skalarową klasy C_2 . Niech:

$$\phi = z(y^2 - x^2) - xy^2$$

Wtedy:

$$\Phi = (z^2 - y^2, x^2 - z^2, y^2 - x^2)$$

4.10 Twierdzenie Gaussa Ostrogradskiego dla pola potencjalnego.

Niech pole wektorowe, występujące w twierdzeniu Gaussa – Ostrogradskiego (4.22) będzie potencjalne, więc niech

$$\mathbf{R} = \text{grad } \phi$$

Wtedy

$$\mathbf{R} \cdot d\mathbf{S} = R_n dS = \frac{\partial \phi}{\partial n} dS, \quad \text{div } \mathbf{R} = \text{div grad } \phi = \nabla^2 \phi$$

wobec czego:

$$\iint_S \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = \iiint_V \nabla^2 \phi dV \quad (4.31)$$
