WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Wykład III

Pole skalarowe i pole wektorowe

3.1 Pole skalarowe

Niech w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej dany będzi eortokartezjański układ współrzędnych (O,x,y,z) o początku O i osiach x, y, z. Znaczy to, że ze każdemu punktowi M tej przestrzeni przyporządkujemy wzajemnie jednoznaczną trójkę liczb, będących jego współrzędnymi w rozpatrywanym układzie. Zapisujemy to w sposób następujący;

$$M = (x, y, z)$$

Niech V oznacza pewien obszar w rozpatrywanej przestrzeni.

Definicja

Jeżeli każdemu punktowi M tego obszaru przyporządkowana jest jakaś liczba, to mówimy, że w obszarze V zostało określone pole skalarowe.

Zapisujemy je w sposób następujący:

$$\phi = \phi(M)$$

Symbol $\phi(M)$ oznacza funkcję punktu, a więc funkcję niezależną od przyjętego układu współrzędnych. Ze względu jednak na to, że wszystkie dalsze rozważania będą przedstawione w układzie współrzędnych, w powyższym wzorze zastępujemy symbol M punktu jego ortokartezjańskimi współrzędnymi w rozpatrywanym układzie, co zapisujemy:

$$\phi = \phi(x, y, z)$$

Aby jednak funkcja $\phi(x, y, z)$ określała to samo pole skalarowe w każdym ortokartezjańskim układzie współrzędnych, przyjmujemy następującą umowę:

Jeżeli pewne przekształcenie, będące ruchem euklidesowym przeprowadza układ (0,x,y,z) w nowy układ:

$$x' = x'(x, y, z) \quad y' = y'(x, y, z) \quad z' = z'(x, y, z)$$

lub odwrotnie:

$$x = x(x', y', z') \quad y = y(x', y', z') \quad x = z(x', y', z')$$

to funkcja ϕ w nowym układzie wyraża się następująco:

$$\phi = \phi\left[x(x', y', z'), y(x', y', z'), z(x', y', z')\right]$$

Fakt ten zapisujemy tym samym symbolem:

$$\phi = \phi(x', y', z')$$

Dla pola skalarowego będziemy mówić o ciągłości pola w punkcie lub w obszarze oraz o jego różniczkowalności. Na przykład pole $\phi(M)$ nazywamy ciągłym, w punkcie $M = (x, y, z)$ jeżeli funkcja $\phi(x, y, z)$ jest w tym punkcie ciągła. Zmiana układu współrzędnych ortokartezjańskich nie może zmienić regularności funkcji ϕ , gdyż funkcje te są z założenia analityczne. Będziemy mówić, że pole skalarowe ϕ jest klacy C_1 w obszarze V, jeżeli funkcja ϕ w każdym układzie ortokartezjańskim ma w tym obszarze ciągłe pochodne cząstkowe. Jeżeli ponadto te pochodne cząstkowe w każdym punkcie obszaru V nie będą równe zeru, to będziemy regularność tego pola określać C_1^* .

3.2 Pole wektorowe

Oprócz pól skalarowych rozpatrujemy pola wektorowe, których definicja jest następująca:

Definicja

Jeżeli w każdym punkcie M pewnego obszaru V zadany jest jednoznacznie jakiś wektor, to mówimy, że w tym obszarze określone jest pole wektorowe.

Pole to zapisujemy w sposób następujący:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(M) \quad (M \in V)$$

Powyższa równość jest równoważna trzem równościom skalarowym w obszarze V:

$$\mathbf{R}(M) = R_x(M)\mathbf{i} + R_y(M)\mathbf{j} + R_z(M)\mathbf{k}$$

Przy czym współrzędne pola wektorowego **R** są funkcjami punktu M:

$$R_x = R_x(M), \quad R_y = R_y(M), \quad R_z = R_z(M)$$

Jeżeli zastąpimy punkt M jego trójką współrzędnych x, y, z to współrzędne pola wektorowego i samo pole stanie się funkcją trzech zmiennych:

$$R_x = R_x(x, y, z), \quad R_y = R_y(x, y, z), \quad R_z = R_z(x, y, z)$$

Przykładem pola wektorowego jest pole sił skierowanych do pewnego punktu 0 (rys. 3.1) zwanego środkiem pola, którego moduł jest proporcjonalny do odległości punktu zaczepienia wektora pola od środka pola.

Rys. 3.1 Przykład pola wektorowego

Niech środek tego pola znajduje się w początku układu współrzędnych, a odległość punktu M od początku układu współrzędnych niech wynosi $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ i niech współczynnikiem proporcjonalności między modułem wektora pola a dległością punktu będzie k. wtedy:

$$\mathbf{R}(M) = -k\mathbf{r}$$

Jeżeli przez **r** oznaczać będziemy wektor wodzący punktu M. W zapisie analitycznym pole to przedstawia się przy pomocy składowych :

$$R_x = -kx, \quad R_y = -ky, \quad R_z = -kz$$

Innym przykładem niech będzie także dośrodkowe pole sił rózniace się od poprzedniego tym, że moduł wektora będzie odwrotnie proporcjonalny do kwadratu odległości punktu od środka pola:

$$\mathbf{R}(M) = -k\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

Co w zapisie analitycznym daje:

$$R_x = -\frac{kx}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$
$$R_y = -\frac{ky}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$
$$R_z = -\frac{kz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

3.3 Gradient pola skalarowego

Niech w pewnym obszarze dane będzie różniczkowalne pole skalarowe $\phi(M)$. Obliczmy pochodne cząstkowe tego pola względem zmiennych x, y, z przyjętego układu współrzędnych i zapytajmy, czy w ten sposób otrzymana trójka funkcji (ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z) jest w rozpatrywanym układzie polem wektorowym.

Definicja

Pole wektorowe, którego współrzędne są pochodnymi cząstkowymi względem zmiennych układu współrzędnych ortokartezjańskich nazywamy gradientem pola skalarowego i oznaczamy:

$$grad\phi \overset{df}{=} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

Przykład obliczeniowy 1

Treść zadania

Dane jest pole skalarowe $\phi = z\left(y^2 - x^2\right) - xy^2$. Znaleźć jego gradient.

Rozwiązanie

Niech $\mathbf{R} = grad\phi$. Wtedy:

$$R_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = -2xz - y^2$$
$$R_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 2yz - 2xy$$
$$R_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = y^2 - x^2$$

3.4 Liniowość operacji grad.

Niech będzie dana funkcja f(M), określona w pewnym zbiorze, którego elementy oznaczaliśmy przez M. Nazywamy ją liniową w tym zbiorze, gdy jest ciągła, gdy dla dwu dowolnych elementów M_1 i M_2 zbioru zachodzi równość:

$$f(M_1) + f(M_2) = f(M_1 + M_2)$$

Gdzie przez sumę $M_1 + M_2$ rozumiemy nowy element M, którego współrzędne są odpowiednimi sumami współrzędnych elementów M_1 i M_2 gdy dla dowolnego elementu obszaru i dowolnej liczby k zachodzi równość:

$$kf(M) = f(kM)$$

Gdzie przez iloczyn elementu i liczby kM rozumiemy nowy element, którego współrzędne są odpowiednimi iloczynami liczby k i współrzędnej punktu. Obie powyższe równości można łącznie zapisać:

$$k_1 f(M_1) + k_2 f(M_2) = f(k_1 M_1 + k_2 M_2)$$

co sprowadza się do sformułowania:

Funkcja liniowa kombinacji liniowej argumentów jest równa takiej samej kombinacji liniowej funkcji tych argumentów.

Można wykazać, że gradient funkcji skalarowej ϕ jest względem tego argumentu

(ϕ)operacją liniowa, bowiem zachodzi:

$$grad\phi_1 + grad\phi_2 = grad(\phi_1 + \phi_2)$$
$$Cgrad\phi = grad(C\phi)$$

Dowód obu powyższych własności, mówiących o liniowości operacji gradient opiera się na dwu twierdzeniach z rachunku różniczkowego, tj., że:

$$f' + g' = (f+g)' \quad Cf' = (Cf)'$$

3.5 Pole wektorowe o potencjale skalarowym.

Wśród pól wektorowych wyróżniają się takie, które są gradientami funkcji skalarowej. Ta funkcja skalarowa nosi nazwę **potencjału skalarowego pola wektorowego**. Jeżeli potencjał oznaczymy przez ϕ , zaś odpowiadające mu pole wektorowe przez **R,** to między tymi tworami zachodzi następujący związek:

$$\mathbf{R} = grad\phi$$

Przykładem pola potencjalnego jest pole sił skierowanych ku swemu środkowi i odwrotnie proporcjonalnych do kwadratu odległości punktu od tego środka (pole grawitacyjne). Sprawdźmy, że potencjałem tego pola jest $\phi = k / r$, gdy $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. W tym celu wystarczy zróżniczkować funkcję ϕ cząstkowo po zmiennych x, y, z. Np. wiemy, że:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{r}\right) = k\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x} = k\left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{x}{r} = -\frac{kx}{r^3}$$

Analogicznie obliczamy pozostałe pochodne cząstkowe i stwierdzamy, że faktycznie omawiane pole jest potencjalne.

Powierzchnie $\phi(M) = C$, gdzie ϕ jest skalarowym potencjałem pola wektorowego, nazywamy powierzchniami równego potencjału, lub powierzchniami ekwipotencjalnymi. Wektor pola potencjalnego w danym punkcie jest ortogonalny do powierzchni stałego potencjału, przechodzącej przez ten punkt i jest zwrócony w stronę wzrostu potencjału.

3.6 Warunek konieczny potencjalności pola wektorowego.

Załóżmy, że pole wektorowe $\mathbf{R} = (R_x, R_y, R_z)$ jest potencjalne, zaś jego potencjał ϕ jest funkcją dwukrotnie w sposób ciągły różniczkowalną, tzn. że jest klasy C_2 . Wtedy zgodnie z definicją pola potencjalnego, spełniony jest układ równań:

$$R_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad R_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad R_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Zróżniczkujmy obie strony wszystkich trzech równości względem zmiennych, które nie zostały użyte przy różniczkowaniu po prawej stronie, a więc np. w przypadku pierwszej równości obliczamy pierwsze pochodne względem y oraz z. Dostajemy:

$$\frac{\partial R_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial R_y}{\partial z} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial R_z}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x},$$
$$\frac{\partial R_x}{\partial z} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial R_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial R_z}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y}$$

Zgodnie z założeniem występujące po prawej stronie powyższych równości drugie pochodne cząstkowe są ciągłe, wiec nie zależą od kolejności różniczkowania, wobec czego, przez ich przyrównanie do siebie, trzymujemy układ trzech równań:

$$\frac{\partial R_z}{\partial y} = \frac{\partial R_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial R_x}{\partial z} = \frac{\partial R_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial R_y}{\partial x} = \frac{\partial R_x}{\partial y}$$

Układ tych równań nosi nazwę **warunku koniecznego potencjalności pola wektorowego**.

3.7 Poszukiwanie potencjału skalarowego pola wektorowego.

Załóżmy, że pole wektorowe $\mathbf{R} = \left(R_x, R_y, R_z\right)$ jest w pewnym obszarze polem potencjalnym klasy C_1 i oznaczmy ten nieznany potencjał skalarowy literą ϕ .

W celu znalezienia potencjału ϕ ustalmy dowolny punkt obszaru $M_0 = \left(x_0, y_0, z_0\right)$ i obliczmy potencjał posługując się pierwszą z wyżej podanych równości, całkując ją względem tej zmiennej, względem której zachodzi różniczkowanie:

$$\phi(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} R_x(u,y,z)\,du + f(y,z)$$

Występująca pod całką zmienna u jest zmienną całkowania zas y i z spełniają rolę parametrów. Funkcja $f(y,z)$ musi być tak dobranan, by potencjał ϕ spełniał pozostałe dwa równania. W tymj celu obliczmy jego pochodną względem zmiennej y. Posługujac się twierdzeniem Leibniza o różniczkowaniu całki względem parametru, otrzymamy:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial R_x(u,y,z)}{\partial y} du + \frac{\partial f(y,z)}{\partial y}$$

Korzystając z równości drugiej i trzeciej układu równań otrzymamy:

$$R_y(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial R_y(u,y,z)}{\partial u} du + \frac{\partial f(y,z)}{\partial y} = R_y(u,y,z)\Big|_{x_0}^{x} + \frac{\partial f(y,z)}{\partial y} =$$

$$= R_y(x,y,z) - R_y(x_0,y,z) + \frac{\partial f(y,z)}{\partial y}$$

Stąd

$$\frac{\partial f(y,z)}{\partial y} = R_y(x_0,y,z)$$

Całkując to równanie względem zmiennej y otrzymujemy:

$$f(y,z) = \int_{y_0}^{y} R_y(x_0,v,z)\,dv + g(z)$$

Co daje:

$$\phi(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} R_x(u,y,z)\,du + \int_{y_0}^{y} R_y(x_0,v,z)\,dv + g(z)$$

Zróżniczkujmy powyższą równość względem z:

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial R_x(u,y,z)}{\partial z}du+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial R_y(x_0,v,z)}{\partial z}dv+g'(z)$$

I korzystając z warunków koniecznych na istnienie potencjału możemy zapisać:

$$R_z(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial R_z(u,y,z)}{\partial u}du+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial R_z(x_0,v,z)}{\partial v}dv+g'(z)=$$
$$=R_z(u,y,z)\Big|_{x_0}^{x}+R_z(x_0,v,z)\Big|_{y_0}^{y}+g'(z)=$$
$$=R_z(x,y,z)-R_z(x_0,y,z)+R_z(x_0,y,z)-R_z(x_0,y_0,z)+g'(z)$$

stąd:

$$g'(z)=R_z(x_0,y_0,z)$$

a po scałkowaniu:

$$g(z)=\int_{z_0}^{z}R_z(x_0,y_0,w)\,dw+C$$

Ostatecznie dostajemy:

$$\phi(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}R_x(u,y,z)du+\int_{y_0}^{y}R_y(x_0,v,z)\,dv+\int_{z_0}^{z}R_z(x_0,y_0,w)\,dw+C$$

Pisząc na miejscy zmiennego punktu (x,y,z) punkt ustalony (x_0,y_0,z_0) zauważymy, że $C=\phi(x_0,y_0,z_0)$ tzn., że wyraz wolny jest wartością potencjału w punkcie przyjętym na początku układu współrzędnych. Ostatecznie zamiast zmiennych całkowania u,v,w piszemy niekiedy te zmienne, które występują w granicy górnej całek. Jest wtedy:

$$\phi(x,y,z)-\phi(x_0,y_0,z_0)=\int_{x_0}^{x}R_x(x,y,z)\,dx+\int_{y_0}^{y}R_y(x_0,y,z)+\int_{z_0}^{z}R_z(x_0,y_0,z)$$

Przykład

Rozważmy pole wektorowe $\mathbf{R}=-k\mathbf{r}$. Znajdźmy potencjał tego pola. Niech M_0 będzie początkiem układu współrzędnych. Wobec tego:

$$\phi(x,y,z)=c+\int_{0}^{x}(-kx)dx+\int_{0}^{y}(-ky)dy+\int_{0}^{z}(-kz)dz=C-\frac{1}{2}k\left(x^2+y^2+z^2\right)=C-\frac{1}{2}kr^2$$

3.8 Rotacja pola wektorowego

Niech pole wektorowe $\mathbf{R}=\left(R_x,R_y,R_z\right)$ będzie różniczkowalne w pewnym obszarze. Zwiążmy z tym polem w każdym punkcie obszaru trzy liczby równe różnicy pochodnych cząstkowych:

$$\frac{\partial}{\partial y}R_x - \frac{\partial}{\partial z}R_y$$
$$\frac{\partial}{\partial z}R_x - \frac{\partial}{\partial x}R_z$$
$$\frac{\partial}{\partial x}R_y - \frac{\partial}{\partial y}R_x$$

Można wykazać, że tak otrzymane pola liczb tworzą pole wektorowe, dla którego są kolejnymi współrzędnymi w ortokartezjańskim układzie współrzędnych. Pole to oznaczamy rot **R .** Wobec tego:

$$rot\ \mathbf{R} \stackrel{df}{=} \left(\frac{\partial R_x}{\partial y} - \frac{\partial R_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial R_x}{\partial z} - \frac{\partial R_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial R_y}{\partial x} - \frac{\partial R_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Pole powyżej zdefiniowane nazywamy rotacją pola **R i** oznaczamy rot **R.** Polskim odpowiednikiem nazwy rotacja jest wirowość. Powyższą definicję rotacji można przedstawić w postaci wyznacznika:

$$rot\ \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix}$$

Operacja rot jest liniowa, tzn., że zachodzi:

$$rot\ \mathbf{R}_1 + rot\ \mathbf{R}_2 = rot\left(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2\right)$$
$$Crot\ \mathbf{R} = rot\left(C\mathbf{R}\right)$$

gdzie $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3$ są to dowolne różniczkowalne we wspólnym obszarze pola wektorowe, zaś C jest dowolną stałą.

3.9 Interpretacja kinematyczna rotacji.

W rozdziale 1.4.2 podalismy nastepujacą interpretację kinematyczną iloczynu wektorowego:

Jeżeli ciało sztywne obraca się z prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}$ dookoła osi, przechodzącej przez punkt O, zaś wektror wodzący o początku w O punktu M tego ciała oznaczymy przez r, to prędkość liniowa punktu M wyrazi się wzorem:

$$\mathbf{v} = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}$$

Oczywiście **v** jest polem prędkości; zaznaczymy to pisząc **v**(M) **.** Obliczmy rotację pola **v**(M). Otóż jeżeli mamy:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$
$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$$

to

$$\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x & y & z\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\end{vmatrix}=\left(y\omega_z-z\omega_y\right)\mathbf{i}+\left(z\omega_x-x\omega_z\right)\mathbf{j}+\left(x\omega_y-y\omega_x\right)\mathbf{k}$$

zaś:

$$rot\ \mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y\omega_z-z\omega_x & z\omega_x-x\omega_z & x\omega_y-y\omega_x\end{vmatrix}=-2\boldsymbol{\omega}$$

wobec czego:

$$\boldsymbol{\omega}=-\frac{1}{2}rot\ \mathbf{v}$$

co odczytujemy:

prędkość kątowa punktu poruszające się ciała sztywnego jest równa wziętej z przeciwnym znakiem rotacji prędkości liniowej.

3.10 Pole wektorowe bezwirowe.

Mówimy, że pole wektorowe **R** nie ma w obszarze wirów czyli, że jest bezwirowe, gdy w tym obszarze zachodzi:

$$\text{rot } \mathbf{R}=\mathbf{0}$$

Twierdzenie.

Pole potencjalne klasy C_1 jest bezwirowe.

Dowód.

Istotnie, jeżeli $\mathbf{R}=grad\phi$, to

$$R_x=\frac{\partial\phi}{\partial x},\quad R_y=\frac{\partial\phi}{\partial y},\quad R_z=\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

i wtdy zgodnie z definicją rotacji:

$$rot\ grad\phi=\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\right]\mathbf{i}+\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\right]\mathbf{j}+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\right]\mathbf{k}$$

Potencjał pola jest klasy C_2, więc drugie pochodne mieszane wystepujace w powyższych nawiasach są sobie równe, a więc:

$$rot\ grad\phi=0$$

Przykład obliczeniowy

Treść zadania.

Dane jest pole wektorowe:

$$\mathbf{R} = \left(-2xz - y^2, 2yz - 2xy, y^2 - x^2\right)$$

Sprawdzić, czy jest ono potencjalne i znaleźć potencjał skalarowy.

Rozwiązanie.

Oznaczmy

$$R_x = -2xz - y^2, \quad R_y = 2yz - 2xy, \quad R_z = y^2 - x^2$$

$$rot_x\mathbf{R} = \frac{\partial R_z}{\partial y} - \frac{\partial R_y}{\partial z} = 2y - 2y = 0$$
$$rot_y\mathbf{R} = \frac{\partial R_x}{\partial z} - \frac{\partial R_z}{\partial x} = -2x - (-2x) = 0$$
$$rot_z\mathbf{R} = \frac{\partial R_y}{\partial x} - \frac{\partial R_x}{\partial y} = -2y - (-2y) = 0$$

Rotacja : rot **R**=0 w całej przestrzeni, wiec $\mathbf{R} = grad\phi$, a

$$\phi = \int_{x_0}^{x} R_x(x, y, z)dx + \int_{y_0}^{y} R_y(x_0, y, z)\,dy + \int_{z_0}^{z} R_z(x_0, y_0, z)\,dz + C$$

Niech $M_0 = (0,0,0)$, wtedy:

$$\phi(x, y, z) = \int_0^x \left(-2xz - y^2\right)dx + \int_0^y 2yzdy + C = z\left(y^2 - x^2\right) - xy^2 + C$$

3.11 Dywergencja pola wektorowego.

Niech pole wektorowe **R** będzie różniczkowalne w pewnym obszarze. Wtedy można z nim związać pewne pole skalarowe, zwane dywergencją pola wektorowego R, określone w danym

$$div\,\mathbf{R} \overset{df}{=} \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z}$$

Operacja „div" jest liniowa, tzn., że zachodzi:

$$div\,\mathbf{R_1} + div\,\mathbf{R_2} = div\left(\mathbf{R_1} + \mathbf{R_2}\right)$$
$$Cdiv\,\mathbf{R} = div\left(C\mathbf{R}\right)$$

Gdzie R_1, R_2, R_3 są to dowolne różniczkowalne we wspólnym obszarze pola wektorowe, zaś C to dowolna stała.

Obliczmy dywergencję szczególnych rodzajów pół wektorowych: pola potencjalnego oraz pola rotacji dowolnego pola wektorowego. Wprowadzajac oznaczenie:

$$lap\ \phi(x, y, z) \overset{df}{=} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

W ltórym operator „lap” nazywa się operatorem Laplace’a lub laplasjanem otrzymujemy:

Twierdzenie

Dywergencja różniczkowalnego pola potencjalnego jest równa Laplasjanowi potencjału:

$$div\ grad\ \phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = lap\ \phi$$

Dowód.

Wobec założonej różniczkowalności pola jego potencjał jest dwukrotnie rózniczkowalny:

$$\mathbf{R} = grad\ \phi \quad czyli\ R_x = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad R_y = \frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad R_z = \frac{\partial\phi}{\partial z}$$

wobec czego:

$$div\ grad\ \phi = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

Cbdo.

Definicja.

Mówimy, że pole wektorowe R nie ma w obszarze źródeł, czyli jest bezźródłowe, gdy w tym obszarze zachodzi:

$$div\ \mathbf{R} = 0$$

Pole wektorowe bezźródłowe nazywamy także polem solenoidalnym..

Twierdzenie.

Pole rotacji dowolnego pola wektorowego klasy C_2 jest bezźródłowe.

$$div\ rot\ \mathbf{R} = 0$$

Dowód.

Istotnie, jeżeli pole R jest klasy C_2, to jego rotacja jest klasy C_1, zaś dywergencja tego pola rotacji jest ciągła. Obliczmy ją:

$$div\ rot\ \mathbf{R} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R_z}{\partial y} - \frac{\partial R_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial R_x}{\partial z} - \frac{\partial R_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial R_y}{\partial x} - \frac{\partial R_x}{\partial y}\right)$$

Zastosowanie twierdzenia o kolejności różniczkowania cząstkowego do prawej strony równości daje tezę.

cbdo.

3.12 Operator Hamiltona.

Dla ujednolicenia teorii różniczkowych operacji pierwszego rzędu nad polami skalarowymi i wektorowymi, tj. grad, div, rot, Hamilton wprowadził pojęcie operatora, którego działania algebraivzne, zwykła mnożenie oraz mnożenie wektorowe i skalarowe sa identyczne z trzema powyższymi operacjami różniczkowymi. Operator ten zany operatorem Hamiltona lub nabla definiuje się w ortokartecjański układzie współrzędnych następująco:

$$\nabla \overset{df}{=} \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Łatowo zauważyć, pamiętając o umowie zapisanej równością, że

$$\nabla\phi = grad\ \phi, \quad \nabla \bullet \mathbf{R} = div\ \mathbf{R}, \quad \nabla \times \mathbf{R} = rot\ \mathbf{R}$$

Wynika to z następujące zapisu:

$$\nabla\phi = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi = \mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$\nabla \bullet \mathbf{R} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \bullet \left(R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k}\right) = \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix}$$

Operator nabla można zpisać inaczej:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Poniżej zapiszemy wykorzystując operator Hamiltona operacje:

$$\nabla \times (\nabla\phi) = (\nabla \times \nabla)\phi = \mathbf{0}$$

$$\nabla \bullet (\nabla\phi) = (\nabla \bullet \nabla)\phi = \nabla^2\phi$$

$$\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{R}) = [\nabla, \nabla, \mathbf{R}] = 0$$

W pierwszej z powyższych równości skorzystaliśmy z twierdzenia, że iloczyn wektorowy wektorów kolinearnych jest równy zeru, w drugiej równości, że iloczyn skalarowy wektora przez siebie jest równy kwadratowi długości wektora, przy czym:

$$\nabla^2 \stackrel{df}{=} \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \right) \bullet \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Jest operatorem Laplace'a , zaś w trzeciej równości skorzystaliśmy z twierdzenia, że iloczyn mieszany trzech wektorów komplanarnych jest równy zeru.

3.13 Operacje wektorowe złożone

W dalszym ciągu będziemy pola skalarowe oznaczą u(M), v(M), pola wektorowe zaś jak dotychczas $\mathbf{R}_1(M), \mathbf{R}_2(M), \mathbf{R}_3(M)$. Obliczmy:

$$grad\,(uv) = grad\,(u)\,v + u grad\,(v)$$
$$\nabla(uv) = (\nabla u)\,v + u\nabla v$$

następnie:

$$div(u\mathbf{R}) = grad\,(u) \bullet \mathbf{R} + u div\,\mathbf{R}$$
$$\nabla(u\mathbf{R}) = \nabla u \bullet \mathbf{R} + u\nabla \bullet \mathbf{R}$$

dalej:

$$rot\,(u\mathbf{R}) = (grad\,(u)) \times \mathbf{R} + u rot\,\mathbf{R}$$
$$\nabla \times (u\mathbf{R}) = (\nabla u) \times \mathbf{R} + u(\nabla \times \mathbf{R})$$

Można wykazać ponadto, że:

$$\mathbf{R} \bullet rot\,(u\mathbf{R}) = u\mathbf{R} \bullet rot\,\mathbf{R}$$
$$R \bullet \left[\nabla \times (uR)\right] = R \bullet \left[(\nabla u) \times R + u(\nabla \times R)\right] = uR \bullet (\nabla \times R)$$

W powyższym równaniu pierwszy wyraz po prawej stronie równości staje się równy zeru, bo jest to iloczyn mieszany, w którym występuje ten sam wektor.