Wykład II

I. Algebra wektorów

2.1 Iloczyn wektorowy pary wektorów.

2.1.1 Orientacja przestrzeni

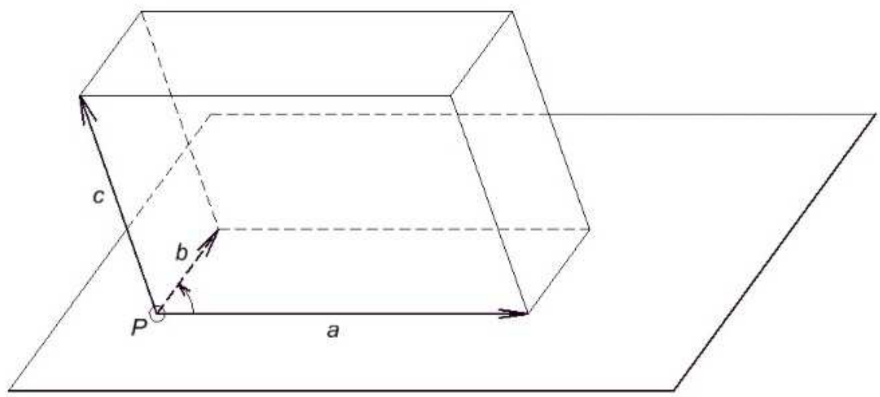
Załóżmy, że trójka wektorów a, b i c jest niekomplanarna. Wynika z tego, że żaden z tych wektorów nie jest zerowy, żadne dwa nie są kolinearne, a nawet, że w dowolnym układzie współrzędnych zachodzi nierówność:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \neq 0$$

Wprowadźmy geometryczną definicję orientacji trójki wektorów niekomplanarnych:

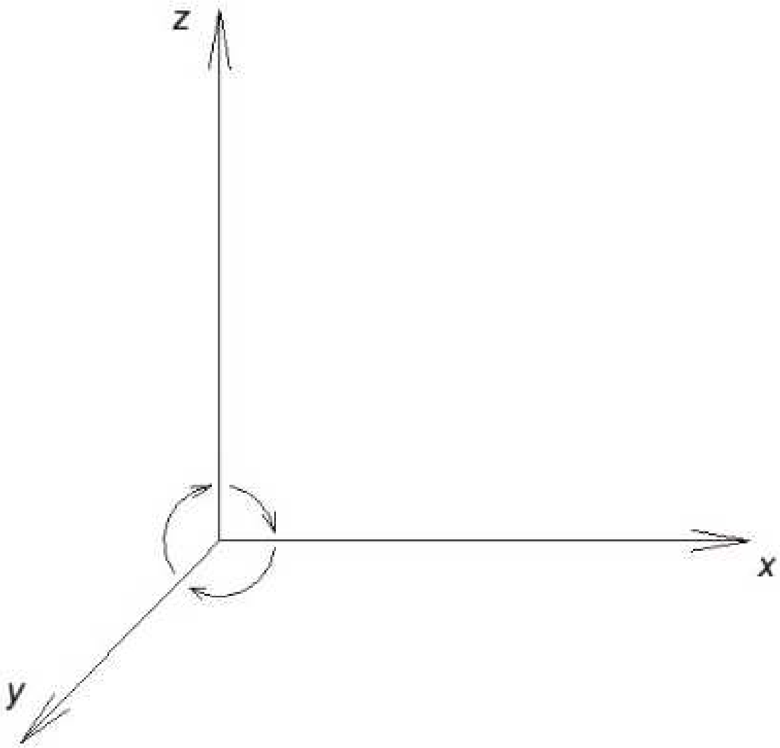
Definicja.

Gdy trzy niekomplanarne wektory są zaczepione w punkcie P i przez pierwszy i drugi z nich poprowadzimy płaszczyznę, w której dodatnim kierunkiem obrotu niech będzie ten, który w tej płaszczyźnie za pomocą obrotu o kąt mniejszy od kąta półpełnego skierowanie pierwszego z wektorów w skierowanie drugiego z nich, to gdy patrząc na tą płaszczyznę zgodnie ze zwrotem trzeciego wektora stwierdzimy, ze wektor pierwszy należy obrócić o kąt poprzedni zdefiniowany w prawo, trójka wektorów **a, b, c** ma orientację prawą; w przeciwnym wypadku trójka ma orientację lewą.



Rys. 2.1 Zobrazowanie orientacji trójki wektorów

W szczególności trójka wektorów **i, j k** ma swoją orientację, którą utożsamiamy z orientacją układu współrzędnych, a tę z kolei z orientacją przestrzeni. Układ współrzędnych lewoskrętny i prawoskrętny przedstawia rys. 2.1.

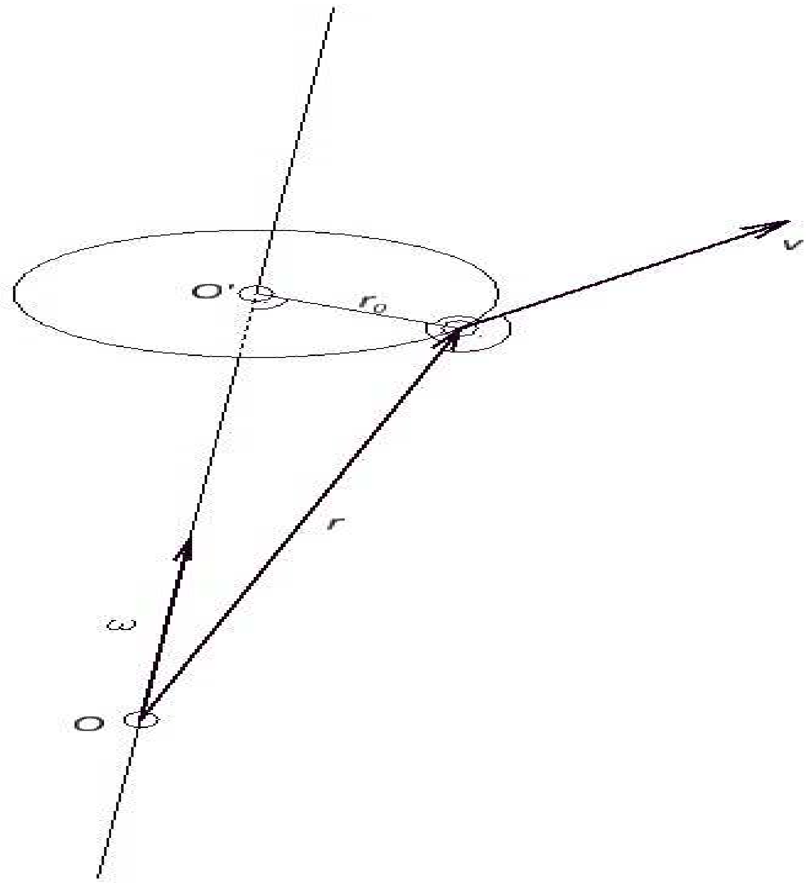


Rys. 2.2 Orientacja układu współrzędnych

Nie istnieje matematyczny sposób poznawania, czy dana trójka wektorów ma w sensie fizycznym orientację prawą czy lewą. Można natomiast poznać, że orientacja trójki wektorów a, b, c jest zgodna z orientacją przyjętego układ współrzędnych, czy też z nią niezgodna. Gdy orientacje wektorów i i układ współrzędnych są zgodne, to wyznacznik z wektorów jest dodatni.

2.2 Prędkość obrotowa punktów ciała sztywnego.

Niech prędkość kątowa ciała sztywnego, obracającego się dokoła osi przechodzącej przez punkt 0, będzie dana wektorem prędkości kątowej ω, który odkładamy na równoległej do niego osi obrotu.



Rys. 2.3 Położenie wektorów w ruchu obrotowym

Nich rozpatrywany punkt P będzie końcem wektora $\mathbf{r} = O\vec{P}$. Punkt P jest odległy od osi obrotu o:

$$r_0 = \mathbf{r}\sin(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$$

W celu obliczenia prędkości liniowej $\mathbf{v}$ punktu P przy ruchu obrotowym zauważymy, że długość tego wektora wynosi:

$$v = r_0\omega = rw\sin(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$$

A jego kierunek jest prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez punkt P i oś obrotu, a więc:

$$\mathbf{v} \perp \mathbf{r} \quad \mathbf{v} \perp \boldsymbol{\omega}$$

Dodatkowo obowiązuje umowa, że zwrot wektora $\boldsymbol{\omega}$ jest taki, by trójka wektorów $\mathbf{r}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}$ miała orientację taką, jak przyjęty układ współrzędnych.

2.3 Iloczyn wektorowy pary wektorów.

Niech w zorientowanej przestrzeni będą dwa niekolinearne wektory **a** i **b**.

Definicja.

Iloczynem wektorowym wektora **a** przez wektor **b** z nim nie kolinearny w zorientowanej przestrzeni nazywamy wektor:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

którego długość równa się polu równoległoboku rozpiętego na tych wektorach.

$$c = ab \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

a kierunek jest prostopadły do płaszczyzny rozpiętej na tych wektorach tj.:

$$\mathbf{c} \perp \mathbf{a} \quad \mathbf{c} \perp \mathbf{b}$$

Zaś zwrot jest taki, by trójka wektorów **a**, **b**, **c** miała orientację zgodną z przyjętą orientacją przestrzeni.

Iloczyn wektorowy wektora a i kolinearnego z nim wektora b definiujemy jako wektor zerowy.

Można zauważyć, że w przypadku gdy wektory **a** i **b** są kolinearne to kąt pomiędzy nimi jest równy 0 lub π lub nie jest określony, gdy co najmniej jeden z nich jest wektorem nieokreślonym (=0). Wtedy z równości na długość wektora **c** wynika, że jest ona równa zero.

Z powyższej definicji wynika, że:

$$\mathbf{v} = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}$$

2.4 Własności iloczynu wektorowego.

Własność I

Mnożenie wektorowe dwu wektorów jest przemienne.

Tę cechę mnożenia wektorowego, która zapisuje się równością:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$$

Nazywamy skośną symetrią lub antyprzemiennością.

Własność II

Mnożenie wektorowe jest łączne względem mnożenia przez liczbę, a mianowicie:

$$m(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (m\mathbf{a}) \times \mathbf{b}$$

Własność III

Mnożenie wektorowe jest rozdzielne względem dodawania, tzn., że

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$$

2.5 Iloczyn wektorowy przedstawiony za pomocą współrzędnych wektorów.

Zanim przystąpimy do przedstawienia iloczynu wektorowego za pomocą współrzędnych wektorów $\mathbf{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$ i $\mathbf{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$ w układzie ortokartezjańskim, obliczmy iloczyny wektorowe wersorów tego układu. Z definicji iloczynu wektorowego wynika, że iloczyn wektorowy wektorów kolinearnych jest równy zeru, więc:

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=0 \quad \mathbf{j}\times\mathbf{j}=0 \quad \mathbf{k}\times\mathbf{k}=0$$

Iloczyn różnych wersorów tego układu obliczamy posługując się definicją iloczynu wektorowego. Zróbmy to dla $\mathbf{i}\times\mathbf{j}$: $\left|\mathbf{i}\times\mathbf{j}\right|=1$, kierunek wektora $\mathbf{i}\times\mathbf{j}$ jest prostopadły do obu wektorów **i** oraz **j** wobec czego jest kolinearny z wektorem **k**, a jako jednostkowy jest równy **k** lub –**k.** Warunek zgodności orientacji trójki wektorów **i, j,** $\mathbf{i}\times\mathbf{j}$ z orientacją przestrzeni daje przy każdej orientacji przestrzeni:

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k} \quad \mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k}$$

Zastosowanie przemiany cyklicznej daje możność łatwego zapamiętania wzorów. Wartości iloczynów wektorowych wersorów układu współrzędnych zestawimy w skośnie symetrycznej tablicy:

Tablica 1

Iloczyny wektorowe wersorów układu

	i	**j**	**k**
i	**0**	**k**	**-j**
j	**-k**	**0**	**i**
k	**j**	**-i**	**0**

Teraz można przystąpić do efektywnego obliczania iloczynu wektorowego dwu wektorów za pomocą ich współrzędnych. A mianowicie:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\left(a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}\right)\times\left(b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}\right)=a_xb_x\mathbf{i}\times\mathbf{i}+a_xb_y\mathbf{i}\times\mathbf{j}+$$
$$+a_xb_z\mathbf{i}\times\mathbf{k}+a_yb_x\mathbf{j}\times\mathbf{i}+a_yb_y\mathbf{j}\times\mathbf{j}+a_yb_z\mathbf{j}\times\mathbf{k}+a_zb_x\mathbf{k}\times\mathbf{i}+$$
$$+a_zb_y\mathbf{k}\times\mathbf{j}+a_zb_z\mathbf{k}\times\mathbf{k}=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\mathbf{i}+\left(a_xb_z-a_zb_x\right)\mathbf{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\mathbf{k}=$$
$$=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\mathbf{i}+\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\mathbf{k}$$

Powyżej przedstawioną równość można zapisać wyznacznikiem, w którym jeden z jego wierszy utworzony jest z wersorów zamiast liczb, czyli:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_x & a_y & a_j\\ b_x & b_y & b_j\end{vmatrix}$$

Długość iloczynu wektorowego obliczamy posługując się wzorem:

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2}$$

2.6 Kolinearność wektorów.

Z definicji iloczynu wektorowego wynika, że dwa wektory są kolinearne wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn wektorowy jest równy zeru, tzn. gdy:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = 0$$

Jeżeli ponadto założymy, że wektory nie są zerowe, to warunek ten jest warunkiem równoległości wektorów. Warunek ten rozpisany we współrzędnych wektorów jest równoważny trzem niezależnym równościom:

$$\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = 0$$

lub też potrójnej proporcji:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

Lub wreszcie warunkowi, by

$$rząd \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = 1$$

Z iloczynu wektorowego wektorów niezerowych wynika sposób obliczania sinusa kąta między tymi wektorami:

$$\sin(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}{ab}$$

Powyższy wzór jest związany ze wzorem na cosinus kąta między wektorami tożsamością Lagrange'a, zachodząca pomiędzy wyrażeniami zbudowanymi z iloczynu wektorowego i skalarowego wektorów:

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2 = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - (ab)^2$$

Przykład obliczeniowy

Treść zadania

Obliczyć iloczyn wektorowy pary wektorów **a**=(3,-2,4) i **b**=(5,-1,2) i sprawdzić czy jest on ortogonalny względem obu wektorów.

Rozwiązanie

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 3 & -2 & 4\\ 5 & -1 & 2\end{vmatrix}=0\mathbf{i}+14\mathbf{j}+7\mathbf{k}$$

Ortogonalność wykażemy korzystając ze wzorów:

$$\mathbf{a}\bullet(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=3*0-2*14+4*7=0$$
$$\mathbf{b}\bullet(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=5*0-1*14+2*7=0$$

Cbdo.

Przykład obliczeniowy

Treść zadania.

Obliczyć sinus kąta miedzy wektorami:

$$\mathbf{a}=(3,-2,4) \quad \mathbf{b}=(5,-1,2)$$

Rozwiązanie.

Wektory są niezerowe, więc:

$$a=\sqrt{29} \quad b=\sqrt{30}$$

Ich iloczyn wektorowy:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(0,14,7)$$

wobec czego:

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=\sqrt{0^2+14^2+7^2}=7\sqrt{5}$$

Ostatecznie mamy:

$$\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})=\frac{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}{ab}=\frac{7}{\sqrt{174}}$$

Przykład obliczeniowy

Treść zadania.

Przedstawić wektor **a**=(1,3,2) jako iloczyn wektorowy dwu wektorów.

Rozwiązanie.

Oznaczmy szukane wektory przez **b** i **c.** Muszą one być prostopadłe do wektora **a.** jeden z dwuparametrowej rodziny wektorów **b** znajdziemy jako iloczyn wektorowy wektora **a** i dowolnego (byle niekolinearnego z **a**) wektora. Niech będzie nim wektor **d**=(0,0,1). Jest wtedy:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{d}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&3&2\\0&0&1\end{vmatrix}=\mathbf{3i}-\mathbf{j}=(3,-1,0)=\mathbf{b}$$

Jeden z możliwych wektorów **c** niech będzie prostopadły nie tylko do **a** ale i do **b**. Będzie wtedy:

$$\mathbf{c}=\lambda\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\lambda\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&3&2\\3&-1&0\end{vmatrix}=2\lambda\mathbf{i}+6\lambda\mathbf{j}-10\lambda\mathbf{k}=(2\lambda,6\lambda,-10\lambda)$$

Współczynnik λ tak dobierzemy, by:

$$\mathbf{a}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}$$

Tzn. by:

$$\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\3&-1&0\\2\lambda&6\lambda&-10\lambda\end{vmatrix}=10\lambda\mathbf{i}+30\lambda\mathbf{j}+20\lambda\mathbf{k}$$

Jest równanie wektorowe o jednej niewiadomej skalarnej, czyli układ trzech równań liniowych z jedną niewiadomą (na ogół układ sprzeczny). Rozwiązaniem tego układu jest $\lambda=1/10$. Stąd:

$$\mathbf{b}=(3,-1,0),\quad \mathbf{c}=\left(\frac{1}{5},\frac{3}{5},-1\right)$$

Przykład obliczeniowy

Treść zadania.

Sprawdzić tożsamość Lagrange'a na przykładzie wektorów **a**=(3,4,5) i **b**=(-1,2,-3).

Rozwiązanie:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\3&4&5\\-1&2&-3\end{vmatrix}=-22\mathbf{i}+4\mathbf{j}+10\mathbf{k}$$

stąd

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2=(-22)^2+4^2+10^2=600$$

Po prawej stronie tożsamości Lagrange'a występują:

$$a^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 = 50 \quad b^2 = (-1)^2 + 2^2 + (-3)^2 = 14$$
$$a \bullet b = 3*(-1) + 4*2 + 5*(-3) = -10 \quad (a \bullet b)^2 = 100$$
$$L = 600 \qquad P = 50*14 - 100 = 600$$
$$L = P$$

2.7 Iloczyny wielokrotne wektorów

2.7.1 Iloczyn mieszany trójki wektorów.

Niech będzie dana trójka wektorów $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$. Utwórzmy ich iloczyn zwany iloczynem mieszanym:

$$\mathbf{abc} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \overset{df}{=} \mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

W iloczynie mieszanym należy najpierw pomnożyć wektorowo przez siebie wektory **b** i **c**, a następnie ich iloczyn wektorowy pomnożyć skalarowo przez wektor **a**.

Iloczyn mieszany można przedstawić w postaci wyznacznika, utworzonego ze współrzędnych ortokartezjańskich trzech wektorów:

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} b_z & b_x \\ c_z & c_x \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

Zaś z iloczynu skalarowego, że

$$\mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} a_x + \begin{vmatrix} b_z & b_x \\ c_z & c_x \end{vmatrix} a_y + \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} a_z$$

Co możemy przedstawić w postaci wzoru:

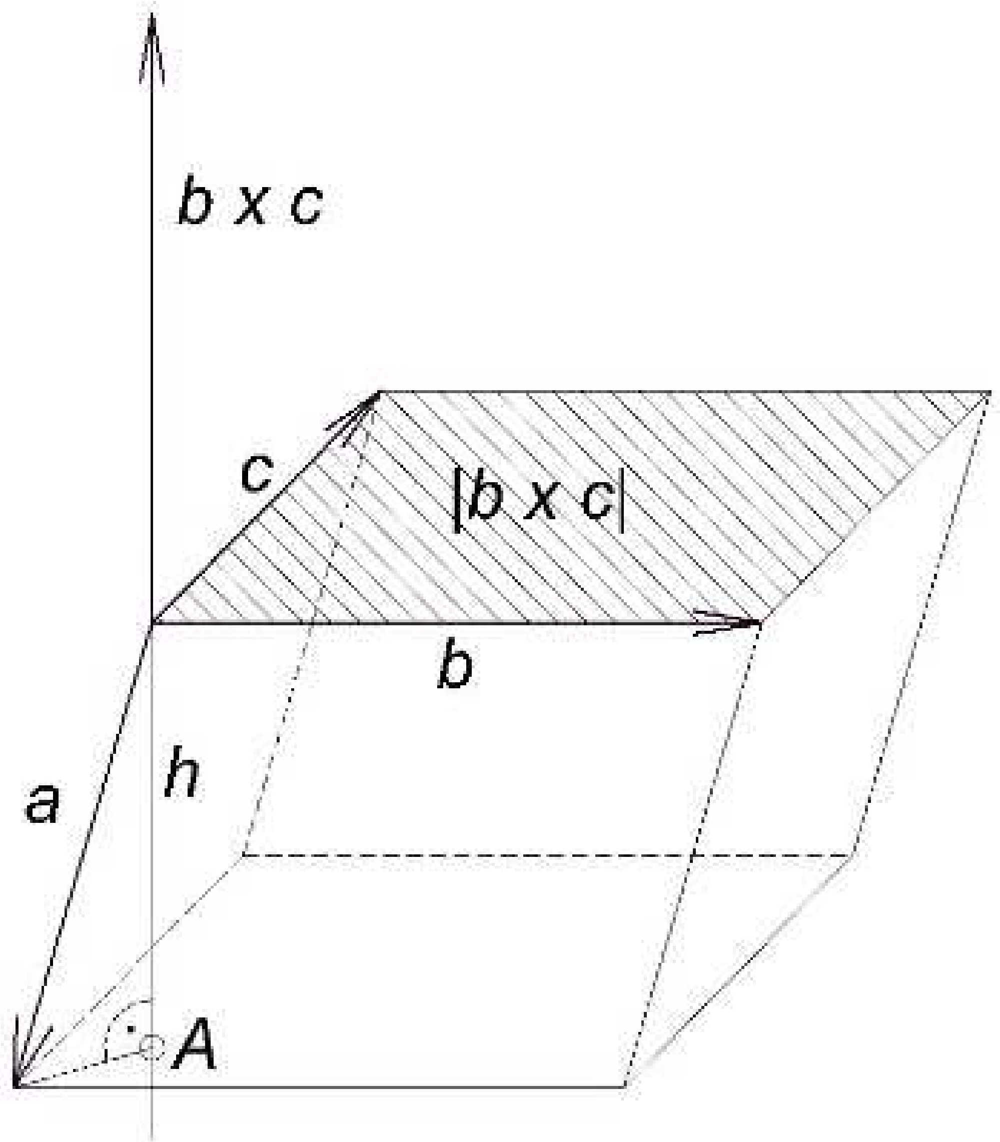
$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Z teorii wyznaczników wiadomo, że cykliczne przestawienie wierszy w macierzy wyznacznika stopnia trzeciego nie zmienia jego wartości. Pozwala to na stwierdzenie, że:

$$a \bullet (b \times c) = (a \times b) \bullet c = b \bullet (c \times a) = -b \bullet (a \times c) = -a \bullet (c \times b) = -c \bullet (b \times a)$$

2.7.2 Objętość równoległościanu.

Niech rozpatrywane poprzednio trzy wektory mają wspólny początek O – rys. 1….



Rys. 2.4. Równoległościan rozpięty na trzech wektorach.

Rozepnijmy na nich równoległościan i obliczmy jego objętość. Pole podstawy jest równe polu równoległoboku rozpiętego na wektorach b i c, więc jest równe $|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|$.

Wysokość h jest długością rzutu wektora a na kierunek prostopadły do podstawy, więc

$$h = a\left|\cos\left(\mathbf{a},\mathbf{b}\times\mathbf{c}\right)\right|$$

Wobec czego objętość V_{abc} jest równa iloczynowi:

$$\mathbf{a}\left|\mathbf{b}\times\mathbf{c}\right|\bullet\left|\cos\left(\mathbf{a},\mathbf{b}\times\mathbf{c}\right)\right|$$

Czyli w zapisie wektorowym:

$$V_{abc} = \left|[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]\right|$$

Udowodniliśmy, że objętość równoległościanu rozpiętego na trzech wektorach jest równa wartości bezwzględnej ich iloczynu mieszanego.

Twierdzenie

Warunek niekomplanarności trzech wektorów jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy objętość równoległościanu rozpiętego na tych trzech wektorach jest różna od zera.

Przykład obliczeniowy

Treść zadania.

Obliczyć iloczyn mieszany trójki wektorów **a**=(1,2,3), **b**=(4,5,6), **c**=(7,8,9).

Rozwiązanie.

Obliczamy:

$$V_{abc} = \left\| \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix} \right\| = 0$$

Okazuje się, że wektory a, b, c tworzą równoległościan o objętości równej zeru, bowiem są komplanarne.

2.7.4 Własności iloczynu mieszanego.

Własność I

Przestawienie w iloczynie mieszanym dwu kolejnych wektorów zmienia znak tego iloczynu na przeciwny, np.:

$$[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}] = -[\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c}]$$

Własność II

Pomnożenie iloczynu mieszanego przez liczbę jest równoważne pomnożeniu przez tą liczbę dowolnego z trzech mnożonych wektorów, np.:

$$m[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}] = [m\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]$$

Własność III

Jeżeli jeden z wektorów jest sumą dwu wektorów, to iloczyn mieszany można przedstawić w postaci sumy dwu iloczynów, np.:

$$[\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2,\mathbf{b},\mathbf{c}] = [\mathbf{a}_1,\mathbf{b},\mathbf{c}] + [\mathbf{a}_2,\mathbf{b},\mathbf{c}]$$

Własność IV

Jeżeli jeden z wektorów jest kombinacją liniową pozostałych wektorów, to iloczyn mieszany jest równy zeru, np.:

$$\left[\mathbf{a},\mathbf{b},\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}\right]=0$$

Własność V

Jeżeli iloczyn mieszany jest zerem, to co najmniej jeden (ale być może nie każdy) z wektorów jest kombinacja liniową dwu pozostałych, np. jeżeli $\left[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\right]=0$ to $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}=\mathbf{0}$ przy czym $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2>0$.

Własność VI

Jeżeli do jednego z wektorów dodać kombinację liniową wektorów pozostałych, to iloczyn mieszany nie ulegnie zmianie, np.:

$$\left[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\right]=\left[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}+\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}\right]$$

Przykład obliczeniowy

Treść zadania.

Niech a=(1,0,0), b=(0,1,0), c=(0,0,1). Oblicz iloczyn mieszany $\left[2\mathbf{a}-3\mathbf{b}+\mathbf{c},\mathbf{a}\text{ - }\mathbf{b},\mathbf{a}\right]$.

Rozwiązanie.

Możemy powyższy iloczyn mieszany przedstawić w postaci sumy 6 iloczynów mieszanych, z których 5 jest równych zeru na mocy własności IV:

$$\left[2\mathbf{a}-3\mathbf{b}+\mathbf{c},\mathbf{a}-\mathbf{b},\mathbf{a}\right]=\left[2\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{a}\right]+\left[2\mathbf{a},\text{-}\mathbf{b},\mathbf{a}\right]+\left[-3\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{a}\right]+\left[-3\mathbf{b},\text{-}\mathbf{b},\mathbf{a}\right]+$$

$$+\left[\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{a}\right]+\left[\mathbf{c}\text{ - -}\mathbf{b},\mathbf{a}\right]=\left[\mathbf{c},\text{-}\mathbf{b},\mathbf{a}\right]=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=1$$

2.7.5 Wyznacznik Grama.

Obliczmy iloczyn dwu iloczynów mieszanych utworzonych z wektorów a, b, c oraz d, e, f. W tym celu skorzystajmy z definicji mnożenia macierzy i twierdzenia Cauchy'ego o wyznaczniku iloczynu macierzy. Otrzymamy:

$$\left[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\right]\left[\mathbf{d},\mathbf{e},\mathbf{f}\right]=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}\begin{vmatrix}d_x & d_y & d_z\\ e_x & e_y & e_z\\ f_x & f_y & f_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}\bullet\mathbf{d} & \mathbf{a}\bullet\mathbf{e} & \mathbf{a}\bullet\mathbf{f}\\ \mathbf{b}\bullet\mathbf{d} & \mathbf{b}\bullet\mathbf{e} & \mathbf{b}\bullet\mathbf{f}\\ \mathbf{c}\bullet\mathbf{d} & \mathbf{c}\bullet\mathbf{e} & \mathbf{c}\bullet\mathbf{f}\end{vmatrix}$$

Szczególnym przypadkiem iloczynów mieszanych jest kwadrat iloczynu mieszanego:

$$[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}\bullet\mathbf{a} & \mathbf{a}\bullet\mathbf{b} & \mathbf{a}\bullet\mathbf{c} \\ \mathbf{b}\bullet\mathbf{a} & \mathbf{b}\bullet\mathbf{b} & \mathbf{b}\bullet\mathbf{c} \\ \mathbf{c}\bullet\mathbf{a} & \mathbf{c}\bullet\mathbf{b} & \mathbf{c}\bullet\mathbf{c} \end{vmatrix}$$

Wyznacznik po prawej stronie równości nosi nazwę **wyznacznika Grama**.

2.7.6 Dwukrotny iloczyn wektorowy.

Obliczmy iloczyn $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ poszukując jego współrzędnych. Mianowicie:

$$[\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})] = (a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k})\times\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} =$$

$$= (a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k})\times\left(\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}\mathbf{i}+\begin{vmatrix} b_z & b_x \\ c_z & c_x \end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}\mathbf{k}\right)$$

Stąd po wykonaniu mnożenia wektorowego otrzymujemy sumę iloczynów współrzędnych wektora przez odpowiednie wersory:

$$[\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]_x = b_x(\mathbf{a}\bullet\mathbf{c})-c_x(\mathbf{a}\bullet\mathbf{b})$$
$$[\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]_y = b_y(\mathbf{a}\bullet\mathbf{c})-c_y(\mathbf{a}\bullet\mathbf{b})$$
$$[\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]_z = b_z(\mathbf{a}\bullet\mathbf{c})-c_z(\mathbf{a}\bullet\mathbf{b})$$

Po zsumowaniu współrzędnych wektora otrzymujemy tożsamość:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\bullet\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\bullet\mathbf{b})$$

2.7.7 Tożsamość Laplace'a.

Powyższa tożsamość pozwala wyrazić prosto następujacy iloczyn czterech wektorów:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\bullet(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = [\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}] = [\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{a}\times\mathbf{b}] = \mathbf{c}\bullet\{a(\mathbf{d}\bullet\mathbf{b})-b(\mathbf{d}\bullet\mathbf{a})\}$$

Co można zapisać posługując się wyznacznikiem:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\bullet(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}\bullet\mathbf{c} & \mathbf{a}\bullet\mathbf{d} \\ \mathbf{b}\bullet\mathbf{c} & \mathbf{b}\bullet\mathbf{d} \end{vmatrix}$$

Równość ta nosi nazwę tożsamości Laplace'a. Jej szczególnym przypadkiem jest znana już tożsamość Lagrange'a:

Przykład obliczeniowy

Treść zadania.

Sprawdzić tożsamość Laplace'a dla wektorów:

$$\mathbf{a}=(1,0,0)=\mathbf{i} \quad \mathbf{b}=(0,1,0)=\mathbf{j} \quad \mathbf{c}=(0,0,1)=\mathbf{k}$$
$$\mathbf{d}=(1,1,1)=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

Rozwiązanie.

Po lewej stronie tożsamości Laplace,a znajduje się iloczyn skalarowy dwu iloczynów wektorowych:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k} \quad \mathbf{c}\times\mathbf{d}=\mathbf{k}\times(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})=-\mathbf{i}+\mathbf{j}$$

Więc wartość iloczynu skalarowego wynosi:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\bullet(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\mathbf{k}\bullet(\mathbf{-i}+\mathbf{j})=0$$

Po prawej stronie występuje wyznacznik, którego elementami są iloczyny skalarowe:

$$\mathbf{a}\bullet\mathbf{c}=\mathbf{i}\bullet\mathbf{k}=0 \quad \mathbf{a}\bullet\mathbf{d}=\mathbf{i}\bullet(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})=1$$
$$\mathbf{b}\bullet\mathbf{c}=\mathbf{j}\bullet\mathbf{k}=0 \quad \mathbf{b}\bullet\mathbf{d}=\mathbf{j}\bullet(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})=1$$

Wartość wyznacznika wynosi:

$$\begin{vmatrix}\mathbf{a}\bullet\mathbf{c} & \mathbf{a}\bullet\mathbf{d}\\ \mathbf{b}\bullet\mathbf{c} & \mathbf{b}\bullet\mathbf{d}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=0$$

cbdo.