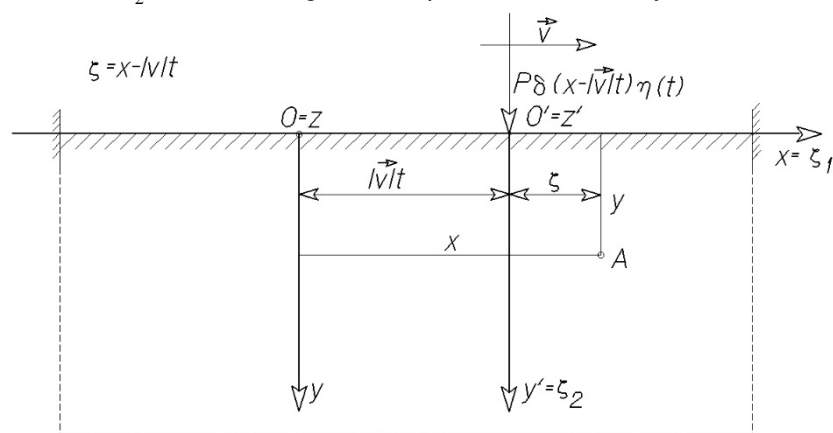


## Wykład X

### ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH Z WYKORZYSTANIEM TRANSFORMACJI LAPLACE' A I FOURIERA – CIĄG DALSZY

#### 10. Konsolidacja półprzestrzeni konsolidującej pod działaniem ruchomego obciążenia skupionego.

Rozważmy półprzestrzeń konsolidującą z powierzchnią brzegową przepuszczalną dla cieczy. Przyjmijmy, że w chwili  $t=0$  do powierzchni brzegowej półprzestrzeni zostało nagle przyłożone obciążenie skupione, rozłożone wzdłuż linii. Od momentu startu, obciążenie porusza się ze stałą prędkością  $v$  wzdłuż osi  $x_2$ . Schemat zagadnienia przedstawiono na rys. 10.1.



**Rys. 10.1. Schemat zagadnienia płaskiego.**

Zakładamy, że prędkość  $v$  jest mała i zagadnienie możemy traktować jako quasistatyczne.

Punktem wyjścia rozważań jest układ podstawowych równań porośredzistości Biota. Zagadnienie będzie traktowane jako płaskie w płaskim stanie odkształcenia. Równania równowagi wewnętrznej ośrodka dwufazowego, z pominięciem sił masowych, mają postać następującą:

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} + \sigma)_{,1} + \sigma_{12,1} &= 0, \\ \sigma_{21,2} + (\sigma_{22} + \sigma)_{,2} &= 0. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Przy czym  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12} = \sigma_{21}$  są współrzędnymi tensora naprężenia szkieletu, a  $\sigma = -pf$  jest naprężeniem przenoszonym przez ciecz, odniesionym do jednostki powierzchni całkowitej elementu;  $p$  oznacza ciśnienie hydrostatyczne, a  $f$  współczynnik porowatości objętościowej ośrodka. Związki geometryczne, w przypadku płaskiego stanu odkształcenia, mają postać:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = u_{,1}; \quad \varepsilon_{22} = w_{,2}; \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(u_{,2} + w_{,1}), \\ \varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}; \quad \theta = U_{,1} + W_{,2}, \end{aligned} \quad (10.2)$$

$\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$  oznaczają współrzędne tensora odkształcenia,  $u$  i  $w$  są współrzędnymi wektora przemieszczenia odpowiednio w kierunku osi  $x_1$  i  $x_2$ , a  $U$  i  $W$  są współrzędnymi wektora

przemieszczenia cząstek cieczy odpowiednio w kierunku osi  $x_1$  i  $x_2$ . Związki fizyczne dla rozważanego ośrodka przyjęto w postaci podanej przez [Biota, 1956]:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 2N\varepsilon_{11} + Q\theta + A\varepsilon, \\ \sigma_{22} &= 2N\varepsilon_{22} + Q\theta + A\varepsilon, \\ \sigma_{12} &= 2N\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{13} &= \sigma_{31} = 0, \\ \sigma_{33} &= A\varepsilon + Q\theta, \\ \sigma &= Q\varepsilon + R\theta,\end{aligned}\tag{10.3}$$

gdzie  $A, N, Q, R$  są stałymi Biota rozważanego ośrodka. Równania, (10.2) i (10.3) uzupełniają równanie przepływu przez ośrodek porowaty – równanie Biota Darcy’ego

$$\frac{k}{\rho g f^2} \nabla^2 \sigma = \frac{D\theta}{Dt} - \frac{D\varepsilon}{Dt},\tag{10.4}$$

przy czym  $k$  jest współczynnikiem przepuszczalności Darcy’ego,  $\rho g$  oznacza ciężar właściwy wody.

Oznaczając  $C = \frac{k}{\rho g f^2}$ , równanie przepływu możemy zapisać w postaci:

$$C\nabla^2 \sigma = \frac{D\theta}{Dt} - \frac{D\varepsilon}{Dt}.\tag{10.5}$$

Należy tutaj podkreślić, że dylatacja występująca w powyższych wzorach jest dylatacją pozorną szkieletu, związaną z dylatacją rzeczywistą prostym związkiem:

$$\bar{\varepsilon} = (1 - f)\varepsilon.\tag{10.6}$$

W dalszych rozważaniach posłużymy się inną postacią równania przepływu. Wyeliminujemy z niego wielkość  $\theta$  za pomocą ostatniego ze związków fizycznych (10.3) i w wyniku otrzymamy:

$$C\nabla^2 \sigma = \frac{1}{R} \frac{D\sigma}{Dt} - \frac{H}{R} \frac{D\varepsilon}{Dt},\tag{10.7}$$

gdzie  $H = Q + R$ .

Zbiorcze równania teorii konsolidacji wyrazimy w przemieszczeniach. W tym celu w równania równowagi wewnętrznej (10.1) podstawimy związki fizyczne (10.3), wykorzystamy związki geometryczne (10.2) i po uporządkowaniu wraz równaniem przepływu (10.4) napiszemy:

$$\begin{aligned}N\nabla^2 u + (M + N)\varepsilon_{,1} &= -\frac{H}{R}\sigma_{,1}, \\ N\nabla^2 w + (M + N)\varepsilon_{,2} &= -\frac{H}{R}\sigma_{,2}, \\ C\nabla^2 \sigma &= \frac{1}{R} \frac{D\sigma}{Dt} - \frac{H}{R} \frac{D\varepsilon}{Dt}.\end{aligned}\tag{10.8}$$

Równania (10.8) stanowią sprzężony układ równań porosprężystości Biota w przypadku płaskiego stanu odkształcenia. Wyjściowy układ równań teorii konsolidacji M.A. Biota (10.8) zawiera pierwsze pochodne względem czasu, to należy podać wartości rozważanych funkcji w chwili  $t = 0$ . Warunki początkowe dla tego układu równań sprawiały wielu badaczom poważne problemy. Szereg autorów (np. [Biot, 1956b], [McNamee i Gibson, 1960a]) stosując do rozwiązania zagadnień transformację Laplace'a przyjmowali, że w chwili  $t = 0$  poszukiwane funkcje równają się zero w całym badanym obszarze. Otrzymane przez nich rozwiązania nie spełniają warunku początkowego. Podobnie postępowaliśmy w poprzednich rozwiązaniach zagadnień jednowymiarowych. Mówimy w takim przypadku, że mamy do czynienia z efektami natychmiastowymi. Temu zagadnieniu poświęcona jest praca [Derskiego, Kisiela, 1969]. Autorzy tej pracy przyjęli, że w przypadku zagadnień płaskich istnieją odkształcenia natychmiastowe i że wraz z nimi występuje natychmiastowe naprężenie cieczy  $\sigma$  różne od zera. Oznaczyli te funkcje wskaźnikiem górnym zero tzn.:

$$\begin{aligned} u^{(0)} &= u(x, y, t = 0), \\ w^{(0)} &= w(x, y, t = 0), \\ \sigma^{(0)} &= \sigma(x, y, t = 0), \end{aligned} \quad (10.9)$$

Warunki te, jako funkcje miejsca, muszą wg cytowanej pracy [Derskiego, Kisiela, 1969] spełniać układ równań niezależny od czasu:

$$\begin{aligned} N\nabla^2 u^{(0)} + (M + N)\varepsilon^{(0)}_{,1} &= -\frac{H}{R}\sigma^{(0)}_{,1}, \\ N\nabla^2 w^{(0)} + (M + N)\varepsilon^{(0)}_{,2} &= -\frac{H}{R}\sigma^{(0)}_{,2}, \\ C\nabla^2 \sigma^{(0)} &= 0 \end{aligned} \quad (10.10)$$

oraz warunki brzegowe. Dalej autorzy tej pracy stwierdzają, że istnienie tych funkcji można formalnie uwzględnić przy stosowaniu na układzie równań transformacji Laplace'a określonej wzorem:

$$(\tilde{u}, \tilde{w}, \tilde{\sigma}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} (u, w, \sigma) e^{-st} dt. \quad (10.11)$$

Zagadnieniem niezgodności przyjętych warunków początkowych z otrzymanymi wartościami poszukiwanych funkcji w zerze w układach równań różniczkowych zajmował się [Doetsch, 1964]. Według Doetscha, wartości początkowe wynikają z przeszłości układu fizycznego, opisanego przez równania różniczkowe. Są to wartości, z którymi układ przechodząc od ujemnych  $t$  osiąga chwilę  $t = 0$ , Są to więc wartości:

$$F_1(-0), F_2(-0), F_3(-0), F_4(-0), \dots$$

Wyjaśnienie, że wartości te nie zawsze są równe wartościom początkowym:

$$F_1(+0), F_2(+0), F_3(+0), F_4(+0), \dots,$$

to znaczy, że przejście od przeszłości do przyszłości w chwili  $t = 0$  może nie być ciągłe, jest według Doetscha następujące:

**„Przyczyna nie leży w wartościach początkowych, które wynikają z układu i działającego w przeszłości wzbudzenia, lecz na wzbudzeniu działającym w czasie  $t = 0$ , które w procesie włączenia wybieramy bez wzięcia pod uwagę układu. Gdy nowe funkcje wzbudzające dla  $t \geq 0$  nie odpowiadają funkcjom wzbudzającym z przeszłości układu dla  $t < 0$ , to znaczy, gdy w chwili**

$t = 0$  występują skoki, nie można się dziwić, że również wartości  $F_1, F_2, F_3, F_4, \dots$  zmieniają się skokowo, ...”.

Doetsch stwierdza również, że można udowodnić fizyczną poprawność otrzymanych wartości w czasie  $t = +0$ , jeżeli stosujemy na układzie transformację Laplace’a. Opisane niezgodności nie mogą występować w dowolnym układzie równań i stosując kryterium Doetscha można określić, kiedy otrzymane rozwiązania na pewno posiadają przyjęte wartości początkowe.

I tak:

**„Wartości początkowe  $F_1(+0), F_2(+0), F_3(+0), F_4(+0), \dots$  mogą być zadane dowolnie wtedy, gdy wyznacznik ze współczynników przy najwyższych pochodnych po czasie jest różny od zera. Gdy warunek ten jest spełniony, rozwiązania na pewno przyjmują zadane wartości początkowe.”**

Za pomocą tego kryterium łatwo stwierdzimy, że w przypadku układu równań (10.10) kryterium to nie jest spełnione, gdyż pochodne po czasie występują tylko w trzecim równaniu. Skokowo przyłożone obciążenie do powierzchni brzegowej (funkcja Heaviseid’a) wyjaśnia, dlaczego w rozwiązaniach przedstawionych w pracach [Kończaka, 1969, 1971, 1972, 1973], [Sobczyńskiej, 1966, 1967, 1969] i wielu innych badaczy istnieją osiadania różne od zera wbrew przyjętym początkowo wartościom.

Przyjmując za autorem pracy [Strzelecki, 1973], że w chwili  $t = +0$  istnieją osiadania natychmiastowe i funkcja naprężenia hydrostatycznego cieczy, różna od zera, oznaczmy te funkcje również wskaźnikiem górnym zero. Według mnie funkcje  $u^{(0)}, w^{(0)}, \sigma^{(0)}$  powinny spełniać następujący układ równań, niezależny od czasu:

$$\begin{aligned} N\nabla^2 u^{(0)} + (M + N)\varepsilon^{(0)}_{,1} &= -\frac{H}{R}\sigma^{(0)}_{,1}, \\ N\nabla^2 w^{(0)} + (M + N)\varepsilon^{(0)}_{,2} &= -\frac{H}{R}\sigma^{(0)}_{,2}, \\ \sigma^{(0)}_{,2} &= H\varepsilon^{(0)}_{,2}. \end{aligned} \quad (10.12)$$

Porównując powyższy układ równań z układem równań (10.10) zauważymy, że układ równań (10.12) różni się od układu równań wyprowadzonego przez autorów pracy [Derski, Kisiel, 1969] równaniem przepływu.

Zajmijmy się bliżej tym równaniem. W postaci zależnej od czasu równanie to ma postać:

$$C\nabla^2 \sigma = \frac{1}{R} \frac{D\sigma}{Dt} - \frac{H}{R} \frac{D\varepsilon}{Dt}, \quad (10.13)$$

przy czym  $\frac{D(\bullet)}{Dt}$  oznacza pochodną masową względem czasu. W ogólnym przypadku funkcje  $\sigma$  i  $\varepsilon$

są zależne od prędkości przyłożenia obciążenia do półprzestrzeni konsolidującej  $\vec{v}$ . Więc:

$$\begin{aligned} \frac{D\sigma}{Dt} &= \sigma_{,t} + v_{x1}\sigma_{,x} + v_{y1}\sigma_{,y} + v_{z1}\sigma_{,z}, \\ \frac{D\varepsilon}{Dt} &= \varepsilon_{,t} + v_{x2}\varepsilon_{,x} + v_{y2}\varepsilon_{,y} + v_{z2}\varepsilon_{,z}, \end{aligned} \quad (10.14)$$

przy czym  $\vec{v}_1 = (v_{x1}, v_{y1}, v_{z1})$  oraz  $\vec{v}_2 = (v_{x2}, v_{y2}, v_{z2})$  są wektorami prędkości zmiany naprężenia hydrostatycznego  $\sigma$  - dylatacji pozornej szkieletu  $\varepsilon$ . Prędkości  $\vec{v}_1$  i  $\vec{v}_2$  są zależne od prędkości  $\vec{v}$  zmiany obciążenia na powierzchni półprzestrzeni konsolidującej. Gdy prędkość ruchu obciążenia jest mała (zagadnienie quasi-statyczne i statyczne) uważamy, że iloczyny:

$$v_{x1}\sigma_{,x}; v_{y1}\sigma_{,y}; v_{z1}\sigma_{,z}; v_{x1}\varepsilon_{,x}; v_{y1}\varepsilon_{,y}; v_{z1}\varepsilon_{,z}$$

są małe i przyjmujemy równe zero. W naszym rozpatrywanym przypadku prędkość  $\vec{v}$  z jaką przykładamy obciążenie do powierzchni brzegowej w chwili  $t = +0$  jest nieskończenie duża. Uwzględniając pionowy kierunek wektora prędkości  $\vec{v}$  możemy napisać:

$$v_{x1} = v_{x2} = 0; \quad v_{y1} = v_{y2} = \infty; \quad v_{z1} = v_{z2} = 0.$$

Równanie (10.13) sprowadza się więc w chwili  $t = +0$  do postaci:

$$C\nabla^2 \sigma^{(0)} = \frac{v_{y1}}{R} \sigma_{,y}^{(0)} - \frac{v_{y2}H}{R} \varepsilon_{,y}^{(0)}, \quad (10.15)$$

gdź  $\sigma^{(0)}$  i  $\varepsilon^{(0)}$  nie zależą od czasu więc  $\sigma_{,t}^{(0)} = \varepsilon_{,t}^{(0)} = 0$ . Podzielmy obie strony równania (10.15) przez  $v_{y1} = v_{y2}$  i obliczmy granicę uzyskanego wyrażenia z  $v_{y1}$  dążącym do nieskończoności:

$$\lim_{v_{y1} \rightarrow \infty} \frac{C}{v_{y1}} \nabla^2 \sigma = \lim_{v_{y1} \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sigma_{,y}^{(0)}}{R} - \frac{H}{R} \varepsilon_{,y}^{(0)} \right], \quad (10.16)$$

stąd równanie filtracji sprowadza się w chwili  $t = +0$  do postaci:

$$\sigma_{,y}^{(0)} - H\varepsilon_{,y}^{(0)} = 0 \quad (10.17)$$

Układ równań (10.8) w interesującym nas przypadku musi spełniać następujące **warunki graniczne**:

#### Warunki brzegowe

1. naprężenia pionowe w szkielecie pod poruszającą się siłą skupioną wynoszą:

$$\sigma_{22} \Big|_{x_2=0} - P\delta(x-vt)\eta(t); \quad (10.18)$$

gdzie  $\delta(\bullet)$  oznacza deltę Diraca, a  $\eta(\bullet)$  funkcję Heaviseide'a.

2. Naprężenia styczne na powierzchni ograniczającej półprzestrzeń konsolidującą są równe zero:

$$\sigma_{12} \Big|_{x_2=0} = 0; \quad (10.19)$$

3. Naprężenia w cieczy na powierzchni ograniczającej półprzestrzeń konsolidującą są równe zero:

$$\sigma \Big|_{x_2=0} = 0; \quad (10.20)$$

4. Przemieszczenie  $u$  w nieskończonej odległości od siły skupionej  $P$  jest równe zero:

$$u \Big|_{\substack{x_2 \rightarrow \infty \\ |x_1 - \vec{v}|t \rightarrow \infty}} = 0; \quad (10.21)$$

5. Przemieszczenie  $u$  w nieskończonej odległości od siły skupionej  $P$  jest równe zero:

$$w \Big|_{\substack{x_2 \rightarrow \infty \\ x_1 - |\vec{v}|t \rightarrow \infty}} = 0; \quad (10.22)$$

6. Funkcja naprężenia w cieczy  $\sigma$  w nieskończonej odległości od siły skupionej P jest równe zeru:

$$\sigma \Big|_{\substack{x_2 \rightarrow \infty \\ x_1 - |\vec{v}|t \rightarrow \infty}} = 0. \quad (10.23)$$

**Warunki początkowe.**

Opierając się na kryterium Doetscha [] przyjmujemy warunki początkowe w postaci:

$$\sigma^{(0)} - H\varepsilon^{(0)} = 0. \quad (10.24)$$

Rozważane przez nas zagadnienie brzegowe wygodnie rozwiązać jest w ruchomym układzie odniesienia:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 - |\vec{v}|t, \\ \xi_2 &= x_2, \\ \xi_3 &= x_3. \end{aligned} \quad (10.25)$$

Stosując w dalszym ciągu w opisie procesu pełzania zapis Einsteina będziemy jednakże pamiętać, że układ równań przyjęty jest określony równaniami (10.8). Układ równań w ruchomym układzie odniesienia sprowadza się do postaci:

$$\begin{aligned} N\nabla^2 u + (M + N)\varepsilon_{,1} &= -\frac{H}{R}\sigma_{,1}, \\ N\nabla^2 w + (M + N)\varepsilon_{,2} &= -\frac{H}{R}\sigma_{,2}, \\ C\nabla^2 \sigma &= \frac{1}{R}\dot{\sigma} - \frac{\nu}{R}\sigma_{,1} - \frac{H}{R}\dot{\varepsilon} + \frac{H\nu}{R}\varepsilon_{,1}. \end{aligned} \quad (10.26)$$

Warunki graniczne natomiast mają postać:

$$\begin{aligned} \sigma_{22} \Big|_{\xi_2=0} &= -P\delta(\xi_1)\eta(t), \\ \sigma_{12} \Big|_{\xi_2=0} &= 0, \\ \sigma \Big|_{\xi_2=0} &= 0, \\ u \Big|_{\substack{\xi_1 \rightarrow \infty \\ \xi_2 \rightarrow \infty}} &= 0, \quad w \Big|_{\substack{\xi_1 \rightarrow \infty \\ \xi_2 \rightarrow \infty}} = 0, \quad \sigma \Big|_{\substack{\xi_1 \rightarrow \infty \\ \xi_2 \rightarrow \infty}} = 0, \\ \sigma^{(0)} - H\varepsilon^{(0)} &= 0. \end{aligned} \quad (10.27)$$

Rozwiązania układu równań (10.26) z warunkami granicznymi (10.27) przeprowadzimy, stosując transformację Laplace'a:

$$L(u, w, \sigma, \varepsilon, \theta, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}) = (\tilde{u}, \tilde{w}, \tilde{\sigma}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{\theta}, \tilde{\sigma}_{ij}, \tilde{\varepsilon}_{ij}) \quad (10.28)$$

Uwzględniając warunek początkowy w postaci związku (10.24), równania wyjściowe liniowej teorii konsolidacji w ruchomym układzie odniesienia po przeprowadzeniu transformacji Laplace'a, mają postać:

$$\begin{aligned} N\nabla^2 \tilde{u} + (M + N) \tilde{\varepsilon}_{,1} &= -\frac{H}{R} \tilde{\sigma}_{,1}, \\ N\nabla^2 \tilde{w} + (M + N) \tilde{\varepsilon}_{,2} &= -\frac{H}{R} \tilde{\sigma}_{,2}, \\ C\nabla^2 \tilde{\sigma} &= \frac{s}{R} \tilde{\sigma} - \frac{\nu}{R} \tilde{\sigma}_{,1} - \frac{Hs}{R} \tilde{\varepsilon} + \frac{H\nu}{R} \tilde{\varepsilon}_{,1}, \end{aligned} \quad (10.29)$$

natomiast warunki brzegowe po wykonaniu przedstawienia całkowitego Fouriera funkcji obciążenia, wyrażają się związkami:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{22} \Big|_{\xi_2=0} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(\alpha)}{s} e^{-i\alpha\xi_1} d\alpha, \\ \tilde{\sigma}_{12} \Big|_{\xi_2=0} &= 0, \\ \tilde{\sigma} \Big|_{\xi_2=0} &= 0, \\ \tilde{u} \Big|_{\substack{\xi_1 \rightarrow \infty \\ \xi_2 \rightarrow \infty}} &= 0, \quad \tilde{w} \Big|_{\substack{\xi_1 \rightarrow \infty \\ \xi_2 \rightarrow \infty}} = 0, \quad \tilde{\sigma} \Big|_{\substack{\xi_1 \rightarrow \infty \\ \xi_2 \rightarrow \infty}} = 0, \end{aligned} \quad (10.30)$$

przy czym  $p(\alpha)$  jest przekształceniem zespolonym Fouriera funkcji obciążenia.

Przejdźmy do rozwiązania układu równań (10.29). Zrózniczkujemy pierwsze z równań po  $\xi_1$  m drugie po  $\xi_2$  i dodając stronami, po uporządkowaniu, otrzymujemy równanie:

$$\nabla^2 \tilde{\varepsilon} = -K_1 \nabla^2 \tilde{\sigma}, \quad (10.31)$$

gdzie  $K_1 = \frac{H}{R(M + 2N)}$ .

Wykonując następnie na równaniu przepływu obustronnie operację Laplace'a otrzymujemy:

$$C\nabla^2 \nabla^2 \tilde{\sigma} = \frac{s}{R} \nabla^2 \tilde{\sigma} - \frac{\nu}{R} \nabla^2 \tilde{\sigma}_{,1} - \frac{Hs}{R} \nabla^2 \tilde{\varepsilon} + \frac{H\nu}{R} \nabla^2 \tilde{\varepsilon}_{,1}. \quad (10.32)$$

Korzystając ze związku (10.31) i równania (10.32) rugujemy z tego ostatniego funkcje obrazu dylatacji  $\tilde{\varepsilon}$  i mamy:

$$\nabla^2 (\nabla^2 \tilde{\sigma} - sK\tilde{\sigma} + \nu K\tilde{\sigma}_{,1}) = 0, \quad (10.33)$$

gdzie  $K = \frac{R(M + 2N) + H^2}{C(M + 2N)R^2}$

Rozwiązanie równania (10.33) ma postać:

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2. \quad (10.34)$$

Przy czym  $\tilde{\varphi}_1$  jest funkcją harmoniczną, spełniającą równanie:

$$\nabla^2 \tilde{\varphi}_1 = 0, \quad (10.35)$$

natomiast  $\tilde{\varphi}_2$  jest rozwiązaniem równania:

$$\nabla^2 \tilde{\varphi}_2 - sK\tilde{\varphi}_2 + vK\tilde{\varphi}_{2,1} = 0. \quad (10.36)$$

Dla zbudowania rozwiązania szczególnego równań przemieszczeniowych (10.29) wprowadźmy transformatę Laplace'a funkcji potencjału przemieszczenia  $\tilde{\Phi}$  zdefiniowaną związkami:

$$\tilde{u} \stackrel{def}{=} \tilde{\Phi}_{,1}; \quad \tilde{w} \stackrel{def}{=} \tilde{\Phi}_{,2}. \quad (10.37)$$

Wstawiając związki (10.37) do równań przemieszczeniowych (10.29), a następnie całkując pierwsze z równań względem  $\xi_1$ , a drugie po  $\xi_2$  dostajemy po uporządkowaniu równanie Poissona:

$$\nabla^2 \tilde{\Phi} = -K_1 \tilde{\sigma}. \quad (10.38)$$

Z uwagi na związek (10.38) i postać rozwiązania (10.34) funkcję  $\tilde{\Phi}$  zapiszemy w postaci:

$$\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_1 + \tilde{\Phi}_2, \quad (10.39)$$

przy czym  $\tilde{\Phi}_1$  jest funkcją biharmoniczną, spełniającą równanie:

$$\nabla^2 \tilde{\Phi}_1 = -K_1 \tilde{\varphi}_1, \quad (10.40)$$

a  $\tilde{\Phi}_2$  jest rozwiązaniem równania:

$$\nabla^2 \tilde{\Phi}_2 = -K_1 \tilde{\varphi}_2. \quad (10.41)$$

Rozwiązania (10.39), jak łatwo wykazać, spełniają równania przemieszczeniowe (10.29) i rozprężone równanie przepływu (10.33), natomiast nie spełnia wyjściowego równania filtracji. Aby spełnić to równanie, należy do rozwiązania potencjalnego dodać rozwiązanie jednorodnego układu równań:

$$\begin{aligned} N\nabla^2 \tilde{u} + (M + N) \tilde{\varepsilon}_{,1} &= 0, \\ N\nabla^2 \tilde{w} + (M + N) \tilde{\varepsilon}_{,2} &= 0. \end{aligned} \quad (10.42)$$

Rozwiązanie układu (10.42) przyjmujemy w postaci funkcji Galerkina, zdefiniowanej związkami:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &\stackrel{def}{=} \bar{a} \tilde{\chi}_{,12}, \\ \tilde{w} &\stackrel{def}{=} \bar{b} \nabla^2 \tilde{\chi} + \bar{a} \tilde{\chi}_{,22}, \end{aligned} \quad (10.43)$$



przy czym  $\bar{a} = -\frac{M+N}{N}$ ,  $\bar{b} = -\frac{M+2N}{N}$ , natomiast  $\tilde{\chi}$  jest funkcją biharmoniczną spełniającą równanie:

$$\nabla^2 \nabla^2 \tilde{\chi} = 0. \quad (10.44)$$

Poszukiwane rozwiązania układu równań przemieszczeniowych (10.42) wyrażają się przy pomocy sumy:

$$\tilde{u} = \tilde{\tilde{u}} + \tilde{\tilde{\tilde{u}}}; \quad \tilde{w} = \tilde{\tilde{w}} + \tilde{\tilde{\tilde{w}}}. \quad (10.45)$$

Rozwiązania (8.151) muszą spełniać równanie przepływu (10.29). Prowadzi to do dodatkowego warunku wiążącego funkcję  $\tilde{\varphi}_1$  z funkcją Galerkiną  $\tilde{\chi}$ , mianowicie:

$$\nabla^2 \tilde{\chi}_{,2} = \frac{KCR}{H} \tilde{\varphi}_1. \quad (10.46)$$

Funkcje występujące w rozwiązaniu, przyjmijmy w postaci zespolonych całek Fouriera. Rozpocznijmy od wyznaczenia funkcji  $\tilde{\sigma}$ . Zgodnie ze wzorem (10.34), funkcja  $\tilde{\sigma}$  jest sumą funkcji  $\tilde{\varphi}_1$  i  $\tilde{\varphi}_2$ . Funkcję  $\tilde{\varphi}_1$  przyjmijmy w postaci:

$$\tilde{\varphi}_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha, s) e^{-|\alpha|\xi_2} e^{-i\alpha\xi_1} d\alpha. \quad (10.47)$$

O takim wyborze funkcji zdecydował warunek, że przy  $\xi_2 \rightarrow \infty$  bez względu na znak parametru całkowania  $\alpha$  wszystkie funkcje wchodzące w skład rozwiązania powinny zanikać. Funkcja  $\tilde{\varphi}_2$  ma spełniać równanie (10.36) i wobec tego przyjmujemy ją w postaci:

$$\tilde{\varphi}_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\alpha, s) \exp\left(-\sqrt{\alpha^2 + Kiv\alpha + Ks\xi_2}\right) \exp(-i\alpha\xi_1) d\alpha. \quad (10.48)$$

W wyrażeniach (10.47) i (10.48)  $A(\alpha, s)$  i  $B(\alpha, s)$  są nieznanymi funkcjami parametru  $\alpha$  i parametru różniczkowania  $s$ . Zgodnie ze wzorem (10.34) funkcję naprężenia  $\tilde{\sigma}$  wyrazimy następująco:

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ A(\alpha, s) \exp(-|\alpha|\xi_2) + B(\alpha, s) \exp\left(-\sqrt{\alpha^2 + iKv\alpha + Ks\xi_2}\right) \right] \exp(-i\alpha\xi_1) d\alpha \quad (10.49)$$

Wykorzystując warunek brzegowy (10.20) otrzymujemy związek:

$$B(\alpha, s) = -A(\alpha, s). \quad (10.50)$$

Funkcja  $\tilde{\sigma}$  po wyeliminowaniu ze wzoru (10.49) funkcji parametru  $B(\alpha, s)$  ma postać:

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha, s) \left[ \exp(-|\alpha|\xi_2) - \exp\left(-\sqrt{\alpha^2 + iKv\alpha + Ks\xi_2}\right) \right] \exp(-i\alpha\xi_1) d\alpha. \quad (10.51)$$

Przejdźmy następnie do określenia transformaty funkcji potencjału dyfuzyjnego  $\tilde{\Phi}$ . Opierając się na wzorze (10.39) widzimy, że należy uprzednio wyznaczyć funkcje  $\tilde{\Phi}_1$  i  $\tilde{\Phi}_2$ . Funkcja  $\tilde{\Phi}_1$  jest biharmoniczna. Powinna spełniać równanie (10.40). Rozwiązanie tego równania ma postać:

$$\tilde{\Phi}_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \xi_2 C(\alpha, s) \exp(-\alpha \xi_2) \exp(-i\alpha \xi_1) d\alpha. \quad (10.52)$$

Po podstawieniu funkcji  $\tilde{\Phi}_1$  (10.52) do równanie (10.40) otrzymujemy związek pomiędzy funkcją parametru  $C(\alpha, s)$  i  $A(\alpha, s)$  w postaci:

$$C(\alpha, s) = \frac{K_1 A(\alpha, s)}{2\alpha |\alpha|}. \quad (10.53)$$

Po podstawieniu do (10.52) zależności (10.53), dostajemy  $\tilde{\Phi}_1$  wyrażone całką:

$$\tilde{\Phi}_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_1}{2} \frac{A(\alpha, s) \xi_2}{|\alpha|} \exp(-|\alpha| \xi_2) \exp(-i\alpha \xi_1) d\alpha. \quad (10.54)$$

Funkcję  $\tilde{\Phi}_2$  przyjmujemy w postaci zespolonej całki Fouriera:

$$\tilde{\Phi}_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D(\alpha, s) \exp\left(-\sqrt{\alpha^2 + iKv\alpha + Ks\xi_2}\right) \exp(-i\alpha \xi_1) d\alpha. \quad (10.55)$$

Po wykonaniu przepisanych różniczkowań wzorem (10.41) dostajemy w wyniku zależność pomiędzy  $D(\alpha, s)$  i  $A(\alpha, s)$ . Zależność ta wyraża się związkiem:

$$D(\alpha, s) = \frac{K_1}{K} \frac{A(\alpha, s)}{v\alpha i + s}. \quad (10.56)$$

Funkcję  $\tilde{\Phi}_2$  można już po uwzględnieniu związku (10.56) zapisać w następujący sposób:

$$\tilde{\Phi}_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_1 A(\alpha, s)}{K(v\alpha i + s)} \exp\left(-\sqrt{\alpha^2 + Kvi\alpha + Ks\xi_2}\right) \exp(-i\alpha \xi_1) d\alpha. \quad (10.57)$$

Ostatecznie transformatę Laplace'a funkcji potencjału dyfuzyjnego możemy zapisać w postaci następującej, zespolonej całki Fouriera:

$$\tilde{\Phi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{K_1 A(\alpha, s) \xi_2}{2|\alpha|} \exp(-|\alpha| \xi_2) + \frac{K_1 A(\alpha, s)}{2(v\alpha i + s)} \exp\left(-\sqrt{\alpha^2 + Kvi\alpha + Ks\xi_2}\right) \right] \exp(-i\alpha \xi_1) d\alpha. \quad (10.58)$$

Pozostała do wyznaczenia transformata funkcji Galerkina  $\tilde{\chi}$ . Przyjmijmy ją w postaci:

$$\tilde{\chi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [F(\alpha, s) + \alpha \xi_2 G(\alpha, s)] \exp(-|\alpha| \xi_2) \exp(-i\alpha \xi_1) d\alpha. \quad (10.59)$$

Podstawiając wyrażenia (10.59) i (10.47) do warunku (10.46) otrzymamy zależność:

$$G(\alpha, s) = \frac{RKC}{2H} \frac{A(\alpha, s)}{\alpha^3}. \quad (10.60)$$

Funkcja Galerkina po uwzględnieniu relacji (10.60) w przestrzeni obrazu, wyraża się całką:

$$\tilde{\chi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ F(\alpha, s) + \frac{RKC}{2H} \frac{A(\alpha, s)}{\alpha^3} \right] \exp(-|\alpha| \xi_2) \exp(-i\alpha \xi_1) d\alpha \quad (10.61)$$

Funkcje  $\tilde{\Phi}$  oraz  $\tilde{\chi}$  określają składowe stanu odkształcenia i za ich pośrednictwem funkcje  $\tilde{\sigma}_{ij}$ , które muszą spełniać założone warunki brzegowe (10.30). Rozwiązanie szczególne, po wykorzystaniu związków geometrycznych (10.2), fizycznych (10.3) oraz związku (10.37) ma następującą postać:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{11} &= 2N\tilde{\Phi}_{,11} + \frac{MR - 2NQ}{H} \nabla^2 \tilde{\Phi}, \\ \tilde{\sigma}_{22} &= 2N\tilde{\Phi}_{,22} + \frac{MR - 2NQ}{H} \nabla^2 \tilde{\Phi}, \\ \tilde{\sigma}_{12} &= 2N\tilde{\Phi}_{,12}. \end{aligned} \quad (10.62)$$

Rozwiązanie układu jednorodnego znajdziemy po wykorzystaniu związków (10.2), (10.3) i (10.33). Maja one postać:

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{\sigma}}_{11} &= M\nabla^2 \tilde{\chi}_{,2} - 2(M + N) \tilde{\chi}_{,112}, \\ \tilde{\tilde{\sigma}}_{22} &= (3M + 4N) \nabla^2 \tilde{\chi}_{,2} - 2(M + N) \tilde{\chi}_{,222}, \\ \tilde{\tilde{\sigma}}_{12} &= (M + 2N) \nabla^2 \tilde{\chi}_{,1} - 2(M + N) \tilde{\chi}_{,221}. \end{aligned} \quad (10.63)$$

Rozwiązanie ostateczne ma postać:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{11} &= \tilde{\sigma}_{11} + \tilde{\tilde{\sigma}}_{11}, \\ \tilde{\sigma}_{22} &= \tilde{\sigma}_{22} + \tilde{\tilde{\sigma}}_{22}, \\ \tilde{\sigma}_{12} &= \tilde{\sigma}_{12} + \tilde{\tilde{\sigma}}_{12}. \end{aligned} \quad (10.64)$$

Po podstawieniu wzorów (10.62) i (10.63) odpowiednio zróżniczkowanych funkcji  $\tilde{\Phi}$  i  $\tilde{\chi}$  określonych wzorami (10.61) oraz podstawiając  $\xi_2 = 0$  otrzymamy:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{22} \Big|_{\xi_2=0} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{NKRC}{H} A(\alpha, s) + \frac{2NK_1 A(\alpha, s) \alpha^2}{K(v\alpha i + s)} - 2N\alpha^2 |\alpha| F(\alpha, s) \right] * \\ & * \exp(-i\alpha \xi_1) d\alpha, \\ \tilde{\sigma}_{12} \Big|_{\xi_2=0} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{-NK_1 A(\alpha, s) \alpha}{|\alpha|} + \frac{NKRC A(\alpha, s) |\alpha|}{H\alpha} (1 + \bar{a}) - \right. \\ & \left. - 2N\bar{a} \alpha^3 F(\alpha, s) + \frac{2NK_1 A(\alpha, s) \alpha \sqrt{\alpha^2 + Kvi\alpha + Ks}}{K(vi\alpha + s)} \right] \exp(-i\alpha \xi_1) d\alpha. \end{aligned} \quad (10.65)$$

Wykorzystanie warunków brzegowych (10.27) oraz wzorów (10.65) prowadzi do liniowego układu równań algebraicznych ze względu na  $A(\alpha, s)$  i  $F(\alpha, s)$ :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{NKRC}{H} + \frac{2NK_1 \alpha^2}{K(v\alpha i + s)} \right] A(\alpha, s) - 2N\alpha^2 |\alpha| F(\alpha, s) &= -\sqrt{2\pi} \frac{\tilde{p}(\alpha)}{s}, \\ \left[ -\frac{NK_1 \alpha}{|\alpha|} + \frac{NKRC |\alpha|}{H\alpha} (1 + \bar{a}) + \frac{2NK_1 \alpha \sqrt{\alpha^2 + Kvi\alpha + Ks}}{K(vi\alpha + s)} \right] A(\alpha, s) + \\ -2N\bar{a} \alpha^3 F(\alpha, s) &= 0. \end{aligned} \quad (10.66)$$

Po rozwiązaniu układu równań (10.66) otrzymujemy:

$$A(\alpha, s) = -\frac{\sqrt{2\pi} p(\alpha)(v\alpha i + s)}{s[(v\alpha i + s)a + g(\alpha, s)b]}, \quad (10.67)$$

przy czym

$$\begin{aligned} g(\alpha, s) &= |a| - \sqrt{\alpha^2 + Kvi\alpha + Ks}, \\ a &= NK_1 + \frac{NKRC}{H} \bar{a}, \\ b &= \frac{2NK_1}{K}. \end{aligned} \quad (10.68)$$

Funkcję  $F(\alpha, s)$  wyrazimy związkiem:

$$F(\alpha, s) = \frac{A(\alpha, s)}{2\bar{a}\alpha^3} \left[ -\frac{K_1 \alpha}{|\alpha|} + \frac{RKC |\alpha|}{H} (1 + \bar{a}) + \frac{2K_1 \alpha \sqrt{\alpha^2 + Kvi\alpha + Ks}}{K(v\alpha i + s)} \right]. \quad (10.69)$$

Jak to już wspomniano,  $p(\alpha)$  jest przekształceniem Fouriera funkcji obciążenia. Korzystając z przekształcenia całkowego Fouriera funkcji Diraca, mamy:

$$p(\alpha) = \frac{P}{\sqrt{2\pi}}, \quad (10.70)$$

gdzie  $P$  - obciążenie na jednostkę długości  $[N/m]$ .

Podstawiając (10.70) do wyrażenia (10.67) i wykonując proste przekształcenia algebraiczne, funkcję  $A(\alpha, s)$  można przedstawić w następującej postaci:

$$A(\alpha, s) = -\frac{p}{a} \frac{s + v\alpha i + A\alpha^2 + A|\alpha|\sqrt{\alpha^2 + Kvi\alpha + Ks}}{s(s + v\alpha i + B\alpha^2)}, \quad (10.71)$$

przy czym

$$A = \frac{b}{a}, \quad B = \frac{2ab - b^2 K}{a^2}.$$

Funkcje  $\tilde{\Phi}$  (10.58) oraz  $\tilde{\chi}$  (10.59) określają składowe wektora przemieszczenia  $\tilde{u}$  i  $\tilde{w}$ . Korzystając ze związków (10.37) znajdziemy transformaty Laplace'a funkcji przemieszczenia dyfuzyjnego  $\tilde{u}$  i  $\tilde{w}$ . A mianowicie:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha, s) \left[ \frac{K_1 \xi_2 \alpha}{2|\alpha|} \exp(-|\alpha| \xi_2) + \frac{K_1 \alpha}{K(v\alpha i + s)} \exp(-\xi_2 \sqrt{\alpha^2 + Kvi\alpha + Ks}) \right] * \\ & * \exp(-i\alpha \xi_1) d\alpha, \\ \tilde{w} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha, s) \left[ \frac{K_1(1 - \xi_2 |\alpha|)}{2|\alpha|} \exp(-|\alpha| \xi_2) - \frac{K_1 \sqrt{\alpha^2 + Kvi\alpha + Ks}}{K(v\alpha i + s)} \exp(-\xi_2 \sqrt{\alpha^2 + Kvi\alpha + Ks}) \right] * \\ & * \exp(-i\alpha \xi_1) d\alpha. \end{aligned} \quad (10.72)$$

Drugą część rozwiązania  $\tilde{u}$  i  $\tilde{w}$  można wyznaczyć na podstawie zależności (10.43). Po wykonaniu przepisanych zależnością (10.43) działań transformaty rozwiązań otrzymamy w postaci:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -\frac{RKC\bar{a}}{2H} \frac{A(\alpha, s)(1 - |\alpha| \xi_2)}{\alpha} + \bar{a}\alpha|\alpha| F(\alpha, s) \right] * \\ & \exp(-|\alpha| \xi_2) \exp(-i\alpha \xi_1) d\alpha, \\ \tilde{w} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -\frac{RKC\bar{b}}{H} \frac{|\alpha|}{\alpha^2} A(\alpha, s) - \frac{RKC\bar{a}}{2H\alpha^2} A(\alpha, s)(2 - |\alpha| \xi_2) + \right. \\ & \left. + \frac{\bar{a}\alpha^2 F(\alpha, s)}{1} \right] \exp(-|\alpha| \xi_2) \exp(-i\alpha \xi_1) d\alpha. \end{aligned} \quad (10.73)$$

Na podstawie związków (10.39) i (10.51) rozwiązania ogólne układu równań, dostajemy w postaci następujących, zespolonych całek Fouriera:

$$\begin{aligned}
 \tilde{u} &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[ -\frac{RKC\bar{a}}{2H} \frac{A(\alpha, s)(1-|\alpha|\xi_2)}{\alpha} - \frac{K_1\xi_2\alpha A(\alpha, s)}{2|\alpha|} + \bar{a}\alpha|\alpha|F(\alpha, s) \right]^* \right. \\
 &\quad \left. \exp(-|\alpha|\xi_2) - \frac{K_1\alpha A(\alpha, s)}{K(vi\alpha + s)} \exp\left(-\xi_2\sqrt{\alpha^2 + Kvi\alpha + Ks}\right) \right\} \exp(-i\alpha\xi_1) d\alpha, \\
 \tilde{w} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[ -\frac{K_1(1-|\alpha|\xi_2)}{2|\alpha|} A(\alpha, s) - \frac{RKC(2-\bar{a}|\alpha|\xi_2)|\alpha|}{2H\alpha^2} A(\alpha, s) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\bar{a}\alpha^2 F(\alpha, s)}{1} \right] \exp(-|\alpha|\xi_2) - \frac{K_1}{K(vi\alpha + s)} \sqrt{\alpha^2 + Kvi\alpha + Ks} \exp\left(-\sqrt{\alpha^2 + Kvi\alpha + Ks}\right) \right\} \exp(-i\alpha\xi_1) d\alpha, \\
 \tilde{\sigma} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha, s) \left[ \exp(-|\alpha|\xi_2) - \exp\left(-\xi_2\sqrt{\alpha^2 + Kvi\alpha + Ks}\right) \right] \exp(-i\alpha\xi_1) d\alpha, \\
 (10.74)
 \end{aligned}$$

przy czym  $A(\alpha, s)$  i  $F(\alpha, s)$  są określone wzorami (10.71) i (10.69). Obecnie zgodnie z zapowiedzą wykażemy, że funkcje (10.74) w chwili  $t = 0$  spełniają układ równań (10.12). Wykorzystamy w tym celu twierdzenie Doetscha [], które mówi:

„**Jeżeli istnieje**  $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t)$ , to

$$\lim_{t \rightarrow 0} F(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\tilde{F}(s) \quad (10.75)$$

Po wykonaniu przejść granicznych zgodnie z (10.75) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 u^{(0)} &= -\frac{p}{2\pi N \left[ (1+HK_1)\frac{M+N}{N} + HK_1 \right]} \left\{ \arctg\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right) - \left[ HK_1 + (1+HK_1)\frac{M+N}{N} \right] \frac{\xi_2\xi_1}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \right\}, \\
 w^{(0)} &= -\frac{p}{4\pi N \left[ (1+HK_1)\frac{M+N}{N} + HK_1 \right]} \left\{ -(1+HK_1)\frac{M+2N}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\alpha|} \exp(-|\alpha|\xi_2) \exp(-i\alpha\xi_1) d\alpha + \right. \\
 &\quad \left. + \left[ (1+HK_1)\frac{M+N}{N} + HK_1 \right] \frac{\xi_2^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \right\}, \\
 \sigma^{(0)} &= -\frac{pH}{\pi N \left[ (1+HK_1)\frac{M+N}{N} + HK_1 \right]} \frac{\xi_2}{\xi_1^2 + \xi_2^2}. \\
 (10.76)
 \end{aligned}$$

Jak łatwo sprawdzić wypisane wyżej granice transformaty przemieszczeń i funkcji naprężeń hydrostatycznych wyrażone wzorami (10.76) istotnie spełniają układ równań (10.12) z warunkami brzegowymi (10.18) do (10.23).

### VIII.2.1.1. Wyznaczenie funkcji osiadań powierzchni półprzestrzeni konsolidującej.

Określenie w postaci jawnej wszystkich uzyskanych rozwiązań jest zadaniem trudnym i nie ma, moim zadaniem, istotnego znaczenie w zastosowaniach inżynierskich. Znacznie łatwiej jest uzyskać rozwiązania metodami numerycznymi, co zostanie przedstawione w rozdziale IX.

W dalszym ciągu interesować nas będzie wyłącznie osiadanie obciążonej powierzchni. Określa je funkcja  $\tilde{w}$  dla  $y = 0$ . Uzyskane rozwiązanie dla funkcji osiadań może pełnić istotną rolę w zakresie weryfikacji procedur numerycznych.

Transformata funkcji osiadań wyraża się wzorem:

$$\tilde{w}|_{\xi_2=0} = \frac{D}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s + v\alpha i + A\alpha^2 + A|\alpha|\sqrt{\alpha^2 + Kvi\alpha + Ks}}{|\alpha|s(s + v\alpha i + B\alpha^2)} \exp(-i\alpha\xi_1) d\alpha, \quad (10.77)$$

przy czym  $D = -\frac{PKRC(\bar{a}-1)}{2Ha}$ .

Aby otrzymać poszukiwaną funkcję osiadania wykonamy najpierw odwrotną transformację Laplace'a na funkcji  $\tilde{w}$  dla  $y = 0$  określoną wzorem:

$$w(\xi_1, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \tilde{w}(\xi_1, s) \exp(-st) ds. \quad (10.78)$$

Następnie wykonamy przepisane wzorem (10.77) całkowanie względem zmiennej  $\alpha$ . Jak łatwo stwierdzić, w rozwiązaniu (10.77) występują całki typu:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\alpha|} \exp(-i\alpha\xi_1) d\alpha, \quad (10.79)$$

które, jak wiadomo (patrz [Sobczyńska, 1966]) dla każdego ograniczonego  $\xi_1$  równają się nieskończoności. Zatem w dalszym postępowaniu zajmiemy się określeniem względnego osiadania powierzchni półprzestrzeni. Otrzymamy je poprzez wprowadzenie dodatkowego warunku, że dla  $\xi_1 = \pm l$ , gdzie  $l$  jest dowolnie duże,  $\tilde{w}(\pm l) = 0$ . Powyższe założenie jest spełnieniem warunku brzegowego (10.23). Stąd mamy:

$$\tilde{w}|_{\xi_2=0} = \frac{D}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s + v\alpha i + A\alpha^2 + A|\alpha|\sqrt{\alpha^2 + Kvi\alpha + Ks}}{|\alpha|s(s + v\alpha i + B\alpha^2)} (\exp(-i\alpha\xi_1) - \exp(-i\alpha l)) d\alpha. \quad (10.80)$$

Dla lepszej przejrzystości przy obliczaniu całek, występujących we wzorze (10.80) zapiszemy go w postaci:

przy czym:

$$\tilde{w}|_{\xi_2=0} = D(\tilde{I} + \tilde{II} + \tilde{III} + \tilde{IV}), \quad (10.81)$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 \tilde{I} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\exp(-i\alpha\xi_1) - \exp(-i\alpha l))}{|\alpha|s(s + v i\alpha + B\alpha^2)} d\alpha, \\
 \tilde{II} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v\alpha i(\exp(-i\alpha\xi_1) - \exp(-i\alpha l))}{|\alpha|s(s + v i\alpha + B\alpha^2)} d\alpha, \\
 \tilde{III} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A\alpha^2(\exp(-i\alpha\xi_1) - \exp(-i\alpha l))}{|\alpha|s(s + v i\alpha + B\alpha^2)} d\alpha, \\
 \tilde{IV} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A|\alpha|\sqrt{\alpha^2 + K v i\alpha + K s}(\exp(-i\alpha\xi_1) - \exp(-i\alpha l))}{|\alpha|s(s + v i\alpha + B\alpha^2)} d\alpha.
 \end{aligned} \tag{10.82}$$

Po uwzględnieniu wyników całkowania i uporządkowaniu otrzymujemy ostatecznie wzór na osiadanie względne półprzestrzeni konsolidującej:

$$\begin{aligned}
 w(\xi_1, t) \Big|_{\xi_2=0} &= -\frac{p\eta(t)}{8\pi N b_1} \left\{ F_0 \ln \left| \frac{\xi_1}{l} \right| + \int_0^t \frac{1}{\tau} \left[ \exp\left(-\frac{(\xi_1 + v\tau)^2 K}{4\tau}\right) - \exp\left(-\frac{(l + v\tau)^2 K}{4\tau}\right) \right] d\tau + \right. \\
 &F_1(I_A - I'_A) + F_2(I_B - I'_B) + F_3(I_C - I'_C - I_D + I'_D) \Big\},
 \end{aligned} \tag{10.83}$$

przy czym:



$$I_A = \int_0^t \frac{i\sqrt{\pi}}{\tau\sqrt{\tau}} (\xi_1 + v\tau) \exp\left(-\frac{(\xi_1 + v\tau)^2}{4B\tau}\right) \operatorname{Erf}\left(i\frac{\xi_1 + v\tau}{2\sqrt{B\tau}}\right) d\tau,$$

$$I_A' = \int_0^t \frac{i\sqrt{\pi}}{\tau\sqrt{\tau}} (l + v\tau) \exp\left(-\frac{(l + v\tau)^2}{4B\tau}\right) \operatorname{Erf}\left(i\frac{l + v\tau}{2\sqrt{B\tau}}\right) d\tau,$$

$$I_B = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{BK(t-\tau) + \tau\sqrt{\tau}}} \exp\left(-\frac{(\xi_1 + v\tau)^2 K}{4[BK(t-\tau) + \tau]}\right) d\tau,$$

$$I_B' = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{BK(t-\tau) + \tau\sqrt{\tau}}} \exp\left(-\frac{(l + v\tau)^2 K}{4[BK(t-\tau) + \tau]}\right) d\tau,$$

$$I_C = \int_0^t \frac{v\sqrt{\pi}}{\sqrt{\tau}} \exp\left(\frac{v^2\tau}{B^2K} - \frac{v}{B}(\xi_1 + v\tau)\right) \operatorname{Erfc}\left(\frac{v}{B}\sqrt{\frac{\tau}{K}} - \frac{\sqrt{K}(\xi_1 + v\tau)}{2\sqrt{\tau}}\right) d\tau,$$

$$I_C' = \int_0^t \frac{v\sqrt{\pi}}{\sqrt{\tau}} \exp\left(\frac{v^2\tau}{B^2K} - \frac{v}{B}(l + v\tau)\right) \operatorname{Erfc}\left(\frac{v}{B}\sqrt{\frac{\tau}{K}} - \frac{\sqrt{K}(l + v\tau)}{2\sqrt{\tau}}\right) d\tau,$$

$$I_D = \int_0^t \frac{v\sqrt{\pi}}{\sqrt{\tau}} \exp\left(\frac{v^2[BK(t-\tau) + \tau]}{B^2K} - \frac{v}{B}(\xi_1 + v\tau)\right) \operatorname{Erfc}\left(\frac{v}{B}\sqrt{\frac{BK(t-\tau) + \tau}{K}} - \frac{\sqrt{K}(\xi_1 + v\tau)}{2\sqrt{BK(t-\tau) + \tau}}\right) d\tau,$$

$$I_D' = \int_0^t \frac{v\sqrt{\pi}}{\sqrt{\tau}} \exp\left(\frac{v^2[BK(t-\tau) + \tau]}{B^2K} - \frac{v}{B}(l + v\tau)\right) \operatorname{Erfc}\left(\frac{v}{B}\sqrt{\frac{BK(t-\tau) + \tau}{K}} - \frac{\sqrt{K}(l + v\tau)}{2\sqrt{BK(t-\tau) + \tau}}\right) d\tau,$$

(10.84)  
gdzie:

$$F_0 = -\frac{4(1+HK_1)\frac{M+N}{N}}{\left[(1+HK_1)\frac{M+N}{N} + HK_1\right]},$$

$$F_1 = \frac{HK_1 - (1+HK_1)\frac{M+N}{N}}{4} \sqrt{\frac{KN}{HK_1(1+HK_1)(M+N)}},$$

$$F_2 = -\frac{\left[HK_1 - (1+HK_1)\frac{M+N}{N}\right]^2}{\left[HK_1 + (1+HK_1)\frac{M+N}{N}\right]},$$

$$F_3 = -\frac{\left[HK_1 - (1+HK_1)\frac{M+N}{N}\right]^2}{4HK_1(1+HK_1)\frac{M+N}{N}},$$

$$B = \frac{4HK_1(1+HK_1)\frac{M+N}{N}}{K\left[HK_1 + (1+HK_1)\frac{M+N}{N}\right]^2},$$

$$\bar{b}_1 = -\frac{M+N}{M+2N}.$$

Zajmiemy się badaniem zbieżności całek występujących w rozwiązaniu oraz zbadaniem zachowania się funkcji osiadania w przypadkach granicznych. W wymienionym wzorze występują cztery grupy całek o podobnej budowie. Nie ma potrzeby, zatem analizować wszystkich całek, lecz jedynie reprezentatywne dla grup, a mianowicie:

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^t \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{(\xi_1 + v\tau)K}{4\tau}\right) d\tau, \\ A_2 &= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}\sqrt{BK(t-\tau)+\tau}} \exp\left(-\frac{(\xi_1 + v\tau)K}{4[BK(t-\tau)+\tau]}\right) d\tau, \\ A_3 &= \int_0^t \frac{i\sqrt{\pi}}{\tau\sqrt{\tau}} \left[ (\xi_1 + v\tau) \exp\left(-\frac{(\xi_1 + v\tau)^2}{4B\tau}\right) \operatorname{Erf}\left(i\frac{\xi_1 + v\tau}{2\sqrt{B\tau}}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \left[ (l + v\tau) \exp\left(-\frac{(l + v\tau)^2}{4B\tau}\right) \operatorname{Erf}\left(i\frac{l + v\tau}{2\sqrt{B\tau}}\right) \right] \right] d\tau, \\ A_4 &= \int_0^t \frac{v\sqrt{\pi}}{\sqrt{\tau}} \left\{ \exp\left[\frac{v^2\tau}{B^2K} - \frac{v}{B}(\xi_1 + v\tau)\right] \operatorname{Erfc}\left[\frac{v}{B}\sqrt{\frac{\tau}{K}} - \frac{\sqrt{K}(\xi_1 + v\tau)}{2\sqrt{\tau}}\right] + \right. \\ &\quad \left. - \exp\left[\frac{v^2\tau}{B^2K} - \frac{v}{B}(l + v\tau)\right] \operatorname{Erfc}\left[\frac{v}{B}\sqrt{\frac{\tau}{K}} - \frac{\sqrt{K}(l + v\tau)}{2\sqrt{\tau}}\right] \right\} d\tau. \end{aligned} \tag{10.85}$$

Sprawdźmy najpierw, czy wymienione całki są zbieżne przy dowolnych  $\xi_1$  z wyłączeniem punktu  $\xi_1 = 0$ , tzn. punktu, w którym znajduje się obciążenie przy  $\tau \rightarrow 0$ . Zajmiemy się najpierw badaniem zbieżności całek  $A_1$  i  $A_2$ . W tym celu zapiszmy je w innej postaci. Dokonując w obydwu całkach podstawienia:

$$\frac{1}{\sqrt{\tau}} = \lambda.$$

Otrzymamy

$$A_1 = -2 \int_{\frac{1}{\sqrt{t}}}^{\frac{1}{\sqrt{0}}} \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{\left(\xi_1 + \frac{v}{\lambda^2}\right)^2 K \lambda^2}{4}\right) d\lambda \tag{10.86}$$

$$A_2 = \int_{\frac{1}{\sqrt{t}}}^{\infty} \frac{2}{\lambda \sqrt{Bkt\lambda^2 + (1-BK)}} \exp \left[ -\frac{\left(\xi_1 + \frac{v}{\lambda^2}\right)^2 K \lambda^2}{4[BKt\lambda^2 + (1-BK)]} \right] d\lambda. \quad (10.87)$$

Do badania zbieżności tych całek zastosujemy kryterium całki niewłaściwej Cauchy'ego, które głosi: **„Jeżeli istnieje taka wartość  $p > 1$ , dla której iloczyn  $f(\lambda)\lambda^p$  pozostaje ograniczony, gdy  $\lambda \rightarrow \infty$  to badana całka jest bezwzględnie zbieżna”.**

Spełnienie tego warunku gwarantuje istnienie skończonej granicy:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda)\lambda^p < \infty. \quad (10.88)$$

Przyjmując w przypadku całek  $A_1$  i  $A_2$ ,  $p = 2$  badamy granicę:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left| \lambda \exp \left( -\frac{\left(\xi_1 + \frac{v}{\lambda^2}\right)^2 K \lambda^2}{4} \right) \right| = 0, \quad (10.89)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left| \frac{2}{\sqrt{BKt + \frac{1-BK}{\lambda^2}}} \exp \left( -\frac{\left(\xi_1 + \frac{v}{\lambda^2}\right)^2 K}{4 \left[ KBt + \frac{1-BK}{\lambda^2} \right]} \right) \right| = \frac{2}{\sqrt{BKt}} \exp \left( -\frac{\xi_1 K}{4KBt} \right) < \infty. \quad (10.90)$$

Widzimy zatem, że obie całki w badanym obszarze są ograniczone. Zbadamy następnie zbieżność całki  $A_3$ . Dla ułatwienia dowodu rozbijmy całkę  $A_3$  na dwie całki  $A_3'$  i  $A_3''$ :

$$A_3' = \int_0^t \frac{i\sqrt{\pi}}{\tau\sqrt{\tau}} \left[ (\xi_1 + v\tau) \exp \left( -\frac{(\xi_1 + v\tau)^2}{4B\tau} \right) \operatorname{Erfc} \left( -i \frac{\xi_1 + v\tau}{2\sqrt{B\tau}} \right) + \right. \\ \left. - \left[ (l + v\tau) \exp \left( -\frac{(l + v\tau)^2}{4B\tau} \right) \operatorname{Erfc} \left( -i \frac{l + v\tau}{2\sqrt{B\tau}} \right) \right] \right] d\tau, \quad (10.91)$$

$$A_3'' = \int_0^t \frac{i\sqrt{\pi}}{\tau\sqrt{\tau}} \left[ (\xi_1 + v\tau) \exp \left( -\frac{(\xi_1 + v\tau)^2}{4B\tau} \right) \operatorname{Erfc} \left( i \frac{\xi_1 + v\tau}{2\sqrt{B\tau}} \right) + \right. \\ \left. - \left[ (l + v\tau) \exp \left( -\frac{(l + v\tau)^2}{4B\tau} \right) \operatorname{Erfc} \left( i \frac{l + v\tau}{2\sqrt{B\tau}} \right) \right] \right] d\tau, \quad (10.92)$$

przy czym:

$$A_3 = A_3' + A_3'' \quad (10.93)$$

Jeżeli całki  $A_3'$  i  $A_3''$  są zbieżne, to na mocy podstawowego twierdzenia o zbieżności całek []:

„Jeżeli zbieżne są całki  $\int_0^{\infty} F(x)dx$  i  $\int_0^{\infty} G(x)dx$  to zbieżna jest całka  $\int_0^{\infty} [F(x) \pm G(x)]dx$  i:

$$\int_0^{\infty} [F(x) \pm G(x)]dx = \int_0^{\infty} F(x)dx \pm \int_0^{\infty} G(x)dx \quad (10.94)$$

Do zbadania zbieżności tej całki skorzystamy z kryterium Cauchy'ego dla przypadku, gdy funkcja podcałkowa posiada osobliwość w jednej z granic całkowania. Kryterium to głosi:

„Całka  $\int_p^g F(x)dx$ , dla której dolna granica jest punktem osobliwym, jest zbieżna bezwzględnie, jeżeli istnieje taka liczba  $\alpha < 1$ , że istnieje granica:

$$\lim_{x \rightarrow p} |(p-x)^\alpha F(x)| < \infty \quad (10.95)$$

Zbadajmy najpierw zbieżność całki  $A_3'$ . Jeżeli skorzystamy z rozwinięcia asymptotycznego funkcji  $Erfc(z)$  (patrz [Riżik, Gradstein, 1964]):

$$Erfc(z) = \frac{1}{\pi} \exp(-z^2) \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)}{(z^2)^{k+\frac{1}{2}}} \quad (10.96)$$

Oraz przyjmijmy, że  $\alpha = \frac{1}{2}$  to na podstawie wymienionego kryterium należy zbadać granicę:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{B\tau}}{\pi} \left[ \frac{1}{\tau} \left[ 1 + \frac{2B\tau}{(\xi_1 + v\tau)^2} + \frac{3 \cdot 4 \cdot B^2 \tau^2}{(\xi_1 + v\tau)^4} + \dots \right] - \frac{1}{\tau} \left[ 1 + \frac{2B\tau}{(l + v\tau)^2} + \frac{3 \cdot 4 \cdot B^2 \tau^2}{(l + v\tau)^4} + \dots \right] \right] = 0 \quad (10.97)$$

Całka  $A_3'$  jest więc bezwzględnie zbieżna. Funkcja podcałkowa, całki  $A_3''$  ma identyczną budowę, jak całka  $A_3'$ . Postępując analogicznie jak z całką  $A_3'$  łatwo wykazać, że całka  $A_3''$  jest również bezwzględnie zbieżna. Z tego wynika, że całka  $A_3$  na podstawie cytowanego twierdzenia (8.200) jest bezwzględnie zbieżna. Do badania zbieżności całki  $A_4$  skorzystamy z tego samego kryterium, co w przypadku całki  $A_3$ . Korzystając z rozwiązania asymptotycznego funkcji  $Erfc(z)$  (8.203) oraz przyjmując  $\alpha = \frac{1}{2}$  to na podstawie wymienionego kryterium (8.201) należy zbadać granicę:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\tau \rightarrow 0} \sqrt{\tau} \left[ \frac{2B\sqrt{K}}{\pi [2v\tau - BK(\xi_1 + v\tau)]} \exp\left(-\frac{(\xi_1 + v\tau)^2 K}{4\tau}\right) \left[ 1 - \frac{1}{2 \left[ \frac{v}{B} \sqrt{\frac{\tau}{K}} - \frac{\sqrt{K(\xi_1 + v\tau)}}{2\sqrt{\tau}} \right]^2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{3}{4 \left[ \frac{v}{B} \sqrt{\frac{\tau}{K}} - \frac{\sqrt{K(\xi_1 + v\tau)}}{2\sqrt{\tau}} \right]^4} - \dots \right] + \right. \\
 & \left. - \frac{2B\sqrt{K}}{\pi [2v\tau - BK(l + v\tau)]} \exp\left(-\frac{(l + v\tau)^2 K}{4\tau}\right) \left[ 1 + \frac{1}{2 \left[ \frac{v}{B} \sqrt{\frac{\tau}{K}} - \frac{\sqrt{K(l + v\tau)}}{2\sqrt{\tau}} \right]^2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{3}{4 \left[ \frac{v}{B} \sqrt{\frac{\tau}{K}} - \frac{\sqrt{K(l + v\tau)}}{2\sqrt{\tau}} \right]^4} - \dots \right] \right] = 0.
 \end{aligned} \tag{10.98}$$

Z tego wynika, że funkcja  $A_4$  dla badanego obszaru jest bezwzględnie zbieżna. W ten sposób wykazaliśmy, że całki wchodzące w skład wzoru są bezwzględnie zbieżne dla  $\xi_1 \neq 0$ .

Zbadamy następnie jak zachowują się funkcje podcałkowe, gdy  $\xi_1 \rightarrow 0$ . Jak łatwo stwierdzić, granica funkcji podcałkowych dla  $\xi_1 \rightarrow 0$  jest skończona. Funkcja osiadań ma jednak w punkcie przyłożenia obciążenia, osobliwość typu logarytmicznego. Dla wartości  $\xi_1$  różnych od zera w przedziale  $(-l, l)$  osiadania są ograniczone.

Zbadamy następnie jak zachowuje się funkcja osiadań gdy prędkość przemieszczania się obciążenia dąży do zera. Przechodząc do granicy przy  $v \rightarrow 0$  z wyrażeniem (10.98) otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 w(\xi_1, t) \Big|_{\xi_2=0} \Big|_{v=0} &= -\frac{p\eta(t)}{8\pi N b_1} \left[ F_0 \ln \left| \frac{\xi_1}{l} \right| - Ei \left( -\frac{\xi_1^2 K}{4t} \right) + Ei \left( -\frac{l^2 K}{4t} \right) + \right. \\
 & \left. F_1 (I'_a - I''_a) + F_2 (I'_b - I''_b) \right],
 \end{aligned} \tag{10.99}$$

przy czym

$$I'_a = \int_0^t \frac{\sqrt{\pi i}}{\sqrt{\tau^3}} \xi_1 \exp\left(-\frac{\xi_1^2}{4B\tau}\right) \operatorname{Erf}\left(\frac{i\xi_1}{2\sqrt{B\tau}}\right) d\tau,$$

$$I''_a = \int_0^t \frac{\sqrt{\pi i}}{\sqrt{\tau^3}} l \exp\left(-\frac{l^2}{4B\tau}\right) \operatorname{Erf}\left(\frac{il}{2\sqrt{B\tau}}\right) d\tau,$$

$$I'_b = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau} \sqrt{BK(t-\tau) + \tau}} \exp\left(-\frac{\xi_1^2 K}{4[KB(t-\tau) + \tau]}\right) d\tau,$$

$$I''_b = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau} \sqrt{BK(t-\tau) + \tau}} \exp\left(-\frac{l^2 K}{4[KB(t-\tau) + \tau]}\right) d\tau.$$

$Ei(-\zeta)$  oznacza funkcję wykładniczo-całkową, której przedstawienie całkowe ma postać

$$Ei(-\zeta) = -\int_{-\zeta}^{\infty} \frac{\exp(-\tau)}{\tau} d\tau.$$

Porównując otrzymany rezultat z osiadciami względnym  $w(\xi_1, t)|_{\xi_2=0}$  powierzchni brzegowej półprzestrzeni konsolidującej obliczonym w przypadku działania obciążenia skupionego [Strzelecki, 1874b] widać, że wzory te są identyczne.

Zbadamy następnie osiadania półprzestrzeni konsolidującej w chwili  $t = +0$ . Po wykonaniu przejścia granicznego we wzorze **Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania.** z  $t \rightarrow 0$  otrzymujemy:

$$w(\xi_1 t)|_{\xi_2=0} = \lim_{t \rightarrow +0} w(\xi_1 t)|_{\xi_2=0} = -\frac{p(M+2N)(1+HK_1)}{2\pi N^2 \left[ (1+HK_1) \frac{M+N}{N} + HK_1 \right]} \ln \left| \frac{\xi_1}{l} \right|. \quad (10.100)$$

Łatwo można stwierdzić, że wzór (10.100) pokrywa się z rozwiązaniem (10.77) oczywiście po uwzględnieniu wpięcia dla  $\xi_1 = \pm l \Rightarrow w^{(0)}(\xi_1)$  i wykonania całkowania względem  $\alpha$ .

Zbadajmy następnie osiadania dla  $t \rightarrow \infty$ . Rozpatrzmy je w ruchomym układzie współrzędnych. Zauważymy, że funkcje podcałkowe całek wchodzących w skład wzoru:  $I_C - I'_C$ ,  $I_D - I'_D$  zależą w sposób jawny od  $t$  i przy  $t \rightarrow \infty$  mają w granicy wartość zero. Ostatecznie osiadanie po czasie  $t \rightarrow \infty$  wyraża się wzorem:

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} w(\xi_1, t) \Big|_{\xi_2=0} &= -\frac{p}{8\pi N b_1} \left\{ F_0 \ln \left| \frac{\xi_1}{l} \right| + \int_0^{\infty} \frac{1}{\tau} \left[ \exp \left( -\frac{(\xi_1 + v\tau)^2 K}{4\tau} \right) - \exp \left( -\frac{(l + v\tau)^2 K}{4\tau} \right) \right] d\tau + \right. \\
 &+ \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} i}{\tau \sqrt{\tau}} \left[ (\xi_1 + v\tau) \exp \left( -\frac{(\xi_1 + v\tau)^2}{4B\tau} \right) \operatorname{Erf} \left( i \frac{(\xi_1 + v\tau)}{2\sqrt{B\tau}} \right) - (l + v\tau) \exp \left( -\frac{(l + v\tau)^2}{4B\tau} \right) \operatorname{Erf} \left( i \frac{(l + v\tau)}{2\sqrt{B\tau}} \right) \right] d\tau \\
 &+ \lim_{t \rightarrow \infty} F_2 \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau} \sqrt{BK(t-\tau) + \tau}} \left[ \exp \left( -\frac{(\xi_1 + v\tau)^2 K}{4[BK(t-\tau) + \tau]} \right) - \exp \left( -\frac{(l + v\tau)^2 K}{4[BK(t-\tau) + \tau]} \right) \right] d\tau \Big\}.
 \end{aligned}
 \tag{10.101}$$

Jak wykazano wcześniej występujące we wzorze (10.101) całki są zbieżne w całym przedziale zmiennej  $t(0, \infty)$ , więc są zbieżne w przypadku całki:

$$S = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau} \sqrt{BK(t-\tau) + \tau}} \left[ \exp \left( -\frac{(\xi_1 + v\tau)^2 K}{4[BK(t-\tau) + \tau]} \right) - \exp \left( -\frac{(l + v\tau)^2 K}{4[BK(t-\tau) + \tau]} \right) \right] d\tau. \tag{10.102}$$

Zauważymy, że przy  $t \rightarrow \infty$  funkcja podcałkowa dąży do zera. Pozostawimy jednak tę funkcję w rozwiązaniu (10.101), gdyż w szczególnym przypadku, gdy  $f \rightarrow 0$ , tzn. gdy mamy do czynienia z ośrodkiem sprężystym nieporowatym, całka  $S$  ma wartość skończoną. Rozpatrzmy bliżej ten przypadek. Zauważymy, że przy  $f \rightarrow 0$  stała  $B$  równa się zero i wówczas korzystając z tablic całek [ ] mamy:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S \Big|_{f=0} = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{1}{\tau} \left[ \exp \left( -\frac{\xi_1^2 K}{4\tau} \right) - \exp \left( -\frac{l^2 K}{4\tau} \right) \right] = -2 \ln \left| \frac{\xi_1}{l} \right|. \tag{10.103}$$

W przypadku  $f \neq 0$ , całka  $\lim_{t \rightarrow \infty} S = 0$ . Funkcja osiadań **Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania.**

posiada w punkcie  $\xi_1 = 0$  osobliwość typu  $\ln \left| \frac{\xi_1}{l} \right|$ . Dla pozostałych  $\xi_1$  w przedziale  $(-l, l)$  wartości funkcji są ograniczone. Opierając się na pracy [Doetscha, 1964] możemy więc stwierdzić, że otrzymane rozwiązanie **Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania.** jest stateczne i posiada tzw. stateczność niewłaściwą.

Zbadamy jeszcze przebieg osiadania, gdy  $t \rightarrow \infty$  i  $v \rightarrow 0$ . W tym przypadku wzór (10.101) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}
 w(\xi_1, t) \Big|_{\xi_2=0} \Big|_{v \rightarrow 0} &= -\frac{p(M+2N)}{2\pi N} \left[ \frac{1+HK_1}{(M+N)(1+HK_1)-HK_1} + \frac{1}{4(M+N)} \right] \ln \left| \frac{\xi_1}{l} \right| + \\
 &\sqrt{\pi} i I_1 + \lim_{t \rightarrow \infty} F_2 I_2,
 \end{aligned} \tag{10.104}$$

przy czym:

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{1}{\tau\sqrt{\tau}} \left[ \xi_1 \exp\left(-\frac{\xi_1^2}{4B\tau}\right) \operatorname{Erf}\left(i\frac{\xi_1}{2\sqrt{B\tau}}\right) - l \exp\left(-\frac{l^2}{4B\tau}\right) \operatorname{Erf}\left(i\frac{l}{2\sqrt{B\tau}}\right) \right] d\tau,$$

$$I_2 = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}\sqrt{BK(t-\tau)+\tau}} \left[ \exp\left(-\frac{\xi_1^2 K}{4[BK(t-\tau)+\tau]}\right) - \exp\left(-\frac{l^2 K}{4[BK(t-\tau)+\tau]}\right) \right] d\tau.$$

Jak łatwo wykazać, przy  $f \rightarrow 0$  całka  $I_1$  dąży do zera, a całka  $I_2$ , jak to wykazano wyżej ma wartość  $-2 \ln \left| \frac{\xi_1}{l} \right|$ . Ostatecznie więc osiadanie względne powierzchni wyraża się wówczas wzorem:

$$w(\xi_1) = -\frac{p}{G\pi} (1-\nu) \ln \left| \frac{\xi_1}{l} \right|. \quad (10.105)$$

$\xi_2=0$   
 $t \rightarrow \infty$   
 $\nu \rightarrow 0$   
 $f \rightarrow 0$

Uwzględniono tutaj, że M odpowiada w tym przypadku stałej Lamego  $\lambda$ , a N odpowiada modułowi odkształcenia postaciowego  $G$ . Jak widać, osiadania względne wyrażone wzorem (10.105) odpowiadają ściśle rozwiązaniu Flamanda z teorii sprężystości [Nowacki, 1970]. Wykonane przejścia graniczne pod znakiem całki są dopuszczalne z uwagi na fakt, że badane wyrażenia spełniają wymagane dla takiej operacji warunki co wykazano w pracy [Strzelecki, 1973c].