WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Wykład I

I. Algebra wektorów

Wykład opracowany na podstawie książki Tadeusza Trajdosa-Wróbla „Matematyka dla Inżynierów”, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa

I.1 Wektor swobodny

Definicja wektora.

Wektorem $P\vec{K}$ *nazywamy skierowany od punktu P do punktu K odcinek o początku P i końcu K.*

Punkt P określamy początkiem tego wektora, zaś K jego końcem. Zamiast mówić „odcinek skierowany” można mówić „para punktów” – wówczas pierwszym punktem jest początek wektora , a drugim jego koniec. Na rysunku, aby zaznaczyć skierowanie odcinka używamy strzałki.

Początek wektora PK i jego koniec charakteryzują się trzema współrzędnymi:

$$P = \left(x_p, y_p, z_p\right) \qquad K = \left(x_k, y_k, z_k\right)$$

Tych sześć liczb charakteryzujących wektor $\overrightarrow{PK}$, można zastąpić innym opisem wektora:

1) Trzech liczb charakteryzujących punkt P
2) Odległości punktów P i K zwanej długością wektora $\overrightarrow{PK}$ oznaczaną symbolem $\left|\overrightarrow{PK}\right|$, gdzie

$$\left|\overrightarrow{PK}\right| = \sqrt{\left(x_k - x_p\right)^2 + \left(y_k - y_p\right)^2 + \left(z_k - z_p\right)^2}$$

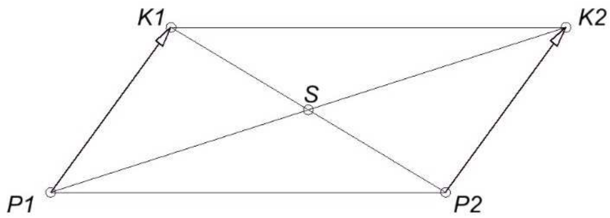
3) Kierunku wyznaczonego punktami P i K tzn. cechy prostej przechodzącej przez dwa punkty
4) Zwrotu, polegającego na wyborze jednej z dwu części prostej, określającej kierunek, a przechodzącej przez dzielący ja punkt P.

Definicja wektora zerowego.

Wektor $\overrightarrow{PP}$ *, którego koniec pokrywa się z początkiem nazywamy wektorem zerowym i oznaczamy* $\vec{0}$ *.*

Definicja wektorów równorzędnych.

Dwa wektory $\overrightarrow{P_1K_1}$ i $\overrightarrow{P_2K_2}$ *nazywamy wektorami równoważnymi, jeżeli odcinki łączące początek jednego z nich z końcem drugiego połowią się.*



Rys. 1.1 Wektory równoważne

Wynika z tego, że dwa wektory równoważne mają identyczne: długość, kierunek, zwrot zaś różne mają początki.

Definicja wektora swobodnego

*Wektorem swobodnym **a** nazywamy niepusty zbiór wszystkich równoważnych sobie wektorów.*

Definicja przedstawiciela zbioru wektora swobodnego

Wektor $\overrightarrow{PK}$ należący do zbioru wektorów a sobie równoważnych, nazywamy przedstawicielem tego zbioru, albo przedstawicielem wektora swobodnego **a.**

Następujący zapis:

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{PK}$$

Należy rozumieć w sensie podanej definicji, a nie w sensie utożsamiania elementu zbioru z samym zbiorem. Każdy wektor swobodny ma dokładnie jednego przedstawiciela o danym początku.

Zapis:

$$\mathbf{a}=\mathbf{b}$$

należy rozumieć w sensie identyczności obu zbiorów, czyli identyczności wektorów swobodnych występujących w powyższej równości.

W dalszym ciągu rozważań dotyczących wektorów swobodnych, wektor swobodny **a** nazywać będziemy wektorem **a.** Twierdzenia i definicje będziemy formułować dla wektora swobodnego, natomiast dowody tych twierdzeń oraz ich interpretacje geometryczne będziemy przeprowadzą na przedstawicielach wektora **a.**

Definicja rzutu wektora na prostą

*Rzutem wektora **a** na prostą l o danym kierunku nazywamy taki wektor a_1 , który jest rzutem przedstawiciela wektora **a** na prostą l.*

Ortokartezjańskie współrzędne wektora

Jak wiadomo, wektor swobodny **a** charakteryzuje jego długość a oraz skierowanie czyli kierunek i zwrot.

Skierowanie wektora jest dane , gdy znane są trzy kąty α , β , γ , jakie ten wektor tworzy z osiami ortokartezjańskiego9 układ współrzędnych:

$$\alpha = \angle(a,x)\ \beta = \angle(a,y)\ \gamma = \angle(a,z)$$

Rozważmy przedstawiciel wektora **a** – wektor $\overrightarrow{OA}$ **,** którego początek pokrywa się z początkiem układu odniesienia. Współrzędne wektora a względem osi ortokartezjańskiego układu odniesienia można wyrazić za pomocą kątów α , β , γ oraz długości wektora – a=|**a**|:

$$a_x = a\cos\alpha \quad a_y = a\cos\beta \quad a_z = a\cos\gamma$$

Łatwo zauważyć, że współrzędne wektora **a** względem układu są jednocześnie współrzędnymi punktu A:

$$A = (a_x, a_y, a_z)$$

Jeżeli wektor $\overrightarrow{PK}$ jest przedstawicielem wektora **a**, to różnice współrzędnych punktu K i punktu P są równe współrzędnym wektora **a** względem układu czyli:

$$a_x = x_k - x_p \quad a_y = y_k - y_p \quad a_z = z_k - z_p$$

Znając ortokartezjańskie współrzędne dowolnego przedstawiciela wektora swobodnego **a** możemy stosują twierdzenia Pitagorasa obliczyć długość wektora **a**:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Wektorowi swobodnemu **a** odpowiada jednoznacznie trójka współrzędnych a_x, a_y, a_z co zapisujemy:

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

Gdy wektor a jest zerowy, to jego wszystkie współrzędne są zerami, a kierunek jest nieokreślony.

Przykład obliczeniowy 1

Treść zadania:

Wektor **a** ma początek P o współrzędnych $(1,-2,3)$ i koniec o współrzędnych $(5,4,-1)$. Obliczyć jego długość oraz kąty jakie tworzy z osiami układu ortokartezjańskiego.

Rozwiązanie:

Obliczamy współrzędne wektora:

$$a_x = x_k - x_p = 5 - 1 = 4, \quad a_y = y_k - y_p = 4 - (-2) = 6, \quad a_z = z_k - z_p = -1 - 3 = -4$$

Długość wektora a=$(4,6,-4)$ wynosi:

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{4^2+6^2+(-4)^2}=2\sqrt{17}$$

Kosinusy kątów, jakie tworzy wektor a z osiami układu współrzędnych:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{a}=\frac{4}{2\sqrt{17}}=0,484$$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{a}=\frac{6}{2\sqrt{17}}=0,728$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{a}=\frac{-4}{2\sqrt{17}}=-0,484$$

1.2 Kombinacje liniowe wektorów.

1.2.1 Definicja Iloczynu wektora i liczby

*Iloczynem wektora **a** i liczby m nazywamy wektor ma, którego długość równa się:*

*|m***a**|=|**a**|*|m|=|m|*a*

*Kierunek m**a** jest identyczny z kierunkiem **a**, zaś zwrot jest identyczny ze zwrotem **a** gdy m jest liczbą dodatnią, przeciwny gdy m jest liczbą ujemną. Ponadto przyjmujemy, że:*

0*a=0   m*0=0

Z definicji iloczynu wektora i liczby m*a wynika własność dotycząca rzutu iloczynu m***a** na dowolną oś s:

Rzut$_s$(m***a**)=m*Rzut$_s$(**a**)

Co odczytujemy***: rzut iloczynu liczby i wektora na oś s jest równy iloczynowi tej liczby przez rzut tego wektora na oś s.***

Mnożenie liczby i wektora podlega prawu łączności mnożenia:

m(n**a**)=(mn)**a**

Odpowiednikiem analitycznym mnożenia wektora **a**=(a_x,a_y,a_z) przez liczbę m jest mnożenie przez tę liczbę każdej współrzędnej wektora co zapisujemy wzorem:

m***a**=(ma_x,ma_y,ma_z)

W szczególności, gdy m=-1 otrzymujemy w wyniku mnożenia wektor:

-1***a**=-**a**

Zwany wektorem przeciwnym do **a.**

Przykład obliczeniowy 2

Treść zadania:

Dany jest wektor **a**=$\left(\sqrt{2},-1,-1\right)$. Znaleźć wektor -2***a** i kąty jakie on tworzy z osiami układu współrzędnych.

Rozwiązanie:

Z definicji iloczynu liczby i wektora wynika, że

$$-2*\mathbf{a}=\left(-2a_x,-2a_y,-2a_z\right)=\left(-2\sqrt{2},2,2\right)$$

Długość tego wektora wynosi:

$$|-2*\mathbf{a}|=|-2|*|\mathbf{a}|=2*|\mathbf{a}|=2\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(-1\right)^2+\left(-1\right)^2}=4$$

Wobec czego kąty są następujące:

$$\alpha=135^0 \quad \beta=60^0 \quad \gamma=60^0$$

Wersor wektora

Wektor a można przedstawić w zależności od jego długości i jego wersora:

$$\mathbf{a}=a*\mathbf{a}^0$$

lub jeżeli $a\neq 0$:

$$\mathbf{a}^0=\frac{\mathbf{a}}{a}$$

Powyższa zależność pozwala przedstawić wersor wektora **a** za pomocą kosinusów kątów, jakie ten wektor tworzy z osiami:

$$\mathbf{a}^0=\left(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\right)$$

1.2.2 Suma wektorów

Niech będą dane wektory **a**=$\left(a_x,a_y,a_z\right)$ i **b**=$\left(b_x,b_y,b_z\right)$. Określmy operację zwaną dodawaniem wektorów, dającą w wyniku wektor **c**=$\left(c_x,c_y,c_z\right)$, będący ich sumą co zapisujemy:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$$

Dodawanie wektorów ma następujące własności:

1) przemienność

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$$

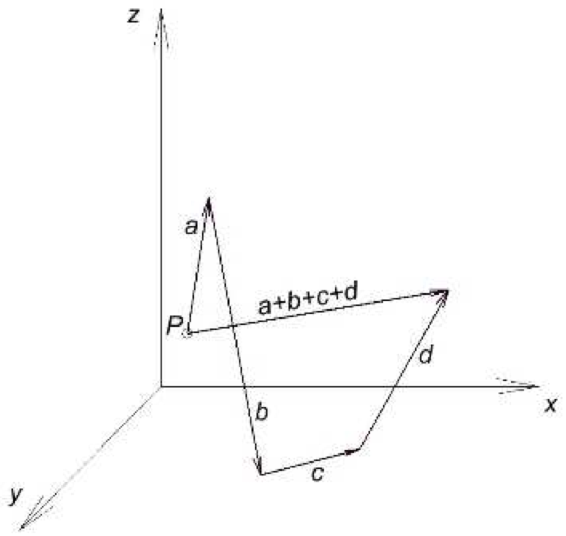
2) łączność

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$$

3) rozdzielność względem mnożenia przez liczbę

$$m(\mathbf{a}+\mathbf{b})=m\mathbf{a}+m\mathbf{b}$$

Przy dodawaniu do siebie kilku wektorów tworzymy łańcuch wektorów, w którym początek następnego wektora pokrywa się z końcem wektora poprzedniego. Wektor zamykający jest sumą tych wektorów.



Rys. 1.2 Suma wektorów

Sumowanie wektorów polega na sumowaniu ich współrzędnych:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\left(a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z\right)$$

1.2.3 Kombinacja liniowa wektorów

Niech będą wektory $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots\ldots,\mathbf{a}_k$. Pomnóżmy każdy z nich przez dowolną liczbę μ_i (i=1,2,….,k) i dodajmy do siebie:

$$\mu_1\,\mathbf{a}_1+\mu_2\,\mathbf{a}_2+\ldots\ldots+\mu_k\,\mathbf{a}_k=\sum_{i=1}^{k}\mu_i\,\mathbf{a}_i$$

Powyższe wyrażenia nazywamy kombinacją liniową wektorów $\mathbf{a}_i$ (i=1,2,….,k).

Wektory $\mathbf{a}_i$ (i=1,2,….,k) nazywamy liniowo od siebie zależnymi, jeżeli istnieje kombinacja liniowa tych wektorów o współrzędnych nie wszystkich równych zeru, będącą równą zeru:

$$\sum_{i=1}^{k}\mu_i\,\mathbf{a}_i=0 \qquad \left(\sum_{i=1}^{k}|\mu_i|>0\right)$$

Powyższe równanie jest równoważne dla n=3 układowi trzech równań skalarowych:

$$\mu_1 \mathbf{a}_{1x}+\mu_2 \mathbf{a}_{2x}+\ldots.. \mu_k \mathbf{a}_{kx}=0$$

$$\mu_1 \mathbf{a}_{1y}+\mu_2 \mathbf{a}_{2y}+\ldots.. \mu_k \mathbf{a}_{ky}=0$$

$$\mu_1 \mathbf{a}_{1z}+\mu_2 \mathbf{a}_{2z}+\ldots.. \mu_k \mathbf{a}_{kz}=0$$

Jeżeli liczba wektorów jest większa niż 3 (w przestrzeni trójwymiarowej) to oczywiście powyższy układ ma rozwiązanie niezerowe, z czego wynika, że cztery wektory są zawsze od siebie liniowo zależne, więc spośród tych czterech wektorów co najmniej jeden da się przedstawić jako kombinacja liniowa wektorów pozostałych.

Jeżeli jest nim wektor $\mathbf{a}_4$ to:

$$\mathbf{a}_4=\lambda_1 \mathbf{a}_1+\lambda_2 \mathbf{a}_2+\lambda_3 \mathbf{a}_3$$

Utwórzmy kombinację liniową trzech wektorów **a**,**b**,**c** i przyrównujmy do zera:

$$\lambda \mathbf{a}+\mu \mathbf{b}+\nu \mathbf{c}=0$$

Czyli:

$$\begin{aligned}\lambda a_x+\mu a_y+\nu a_z&=0\\ \lambda b_x+\mu b_y+\nu b_z&=0\\ \lambda c_x+\mu c_y+\nu c_z&=0\end{aligned}$$

Powyższy układ równań jednorodnych względem niewiadomych λ, μ, ν ma wtedy i tylko wtedy rozwiązanie niezerowe, gdy wyznacznik charakterystyczny układu jest równy zeru, tzn. gdy:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0$$

Trzy wektory zależne nazywamy wektorami komplanarnymi. . Jeżeli trzy wektory **a**, **b**, **c** są komplanarne, tzn. gdy:

$$\lambda \mathbf{a}+\mu \mathbf{b}+\nu \mathbf{c}=0 \quad \left(\lambda^2+\mu^2+\nu^2>0\right)$$

I gdy $\nu \neq 0$ to

$$\mathbf{c}=-\frac{\lambda}{\nu} \mathbf{a}-\frac{\mu}{\nu} \mathbf{b}=\omega \mathbf{a}+\delta \mathbf{b}$$

Wówczas wszystkie trzy wektory leżą w jednej płaszczyźnie i właśnie dlatego nazywają się komplanarnymi.

Przykład obliczeniowy 3

Treść zadania:

Dane są dwa wektory:

a=(-1,5,4) **b**=(0,4,1)

Znaleźć wektor komplanarny (liniowo zależny) z tymi wektorami.

Rozwiązanie:

Komplanarny z a i b są wektory:

$\mathbf{c}_1=\mathbf{0}$, $\mathbf{c}_2=\omega\,\mathbf{a}$, $\mathbf{c}_3=\delta\,\mathbf{b}$

np.:

$\mathbf{c}_2$=(-2,10,8) oraz $\mathbf{c}_3$=(0,-4,-1)

Zbiór wszystkich wektorów komplanarnych z wektorami a i b najogólniej można zapisać w postaci:

$$\mathbf{c}=\omega\mathbf{a}+\delta\,\mathbf{b}=\left(\omega a_x+\delta b_x,\omega a_y+\delta b_y,\omega a_z+\delta b_z\right)$$

np. gdy $\omega=2\ i\ \delta=-1$ to:

c=2**a**-**b**=(-2,6,7)

Dwa wektory liniowo zależne nazywamy **wektorami kolinearnymi**. Warunkiem kolinearności jest warunek, żeby macierz współrzędnych obu wektorów:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Była rzędu najwyżej 1. Warunek ten jest konieczny i wystarczający dla kolinearności.

Aby dwa wektory a i b były kolinearne musi być spełniony warunek:

$$\lambda\,\mathbf{a}+\mu\,\mathbf{b}=0 \quad \left(\lambda^2+\omega^2>0\right)$$

Gdy $\mu\neq 0$ to:

$$\mathbf{b}=-\frac{\lambda}{\mu}\,\mathbf{a}=\omega\,\mathbf{a}$$

jeżeli oba wektory są zamocowane w jednym punkcie, wtedy leżą na jednej prostej.

1.3 Iloczyn skalarowy dwóch wektorów

1.3.1 Definicja

Iloczynem skalarowym niezerowych wektorów a i b oznaczonym **a*b** lub **ab** nazywamy liczbę równą iloczynowi długości każdego z tych wektorów i cosinusa kąta zawartego pomiędzy nimi.

$$\mathbf{ab}=ab\cos(\alpha)$$

1.3.2 Iloczyn skalarowy posiada własności:

Własność I.

Mnożenie skalarowe wektorów jest przemienne:

ab=**ba**

Własność II.

Mnożenie skalarowe jest łączne względem mnożenia przez liczbę.

m(**ab**)=(m**a**)**b**

Własność III.

Mnożenie skalarowe jest rozdzielne względem dodawania.

(**a**+**b**)**c**=**ac**+**bc**

Zamiast iloczynu skalarowego wektora przez siebie możemy posługiwać się kwadratem wektora:

$\mathbf{a}^2=\mathbf{aa}=a^2$

1.3.3 Ortogonalność wektorów:

Dwa wektory **a** i **b** nazywamy wzajemnie ortogonalnymi, gdy ich iloczyn skalarowy jest równy zeru, więc

ab=0

Z powyższej definicji wynika, że wektor zerowy jest ortogonalny do każdego wektora.

1.3.4 Nierówność Cauchy'ego - Buniakowskiego

Nierównością Cauchy'ego – Buniakowskiego nazywa się wzór pozwalający oszacować moduł iloczynu skalarnego:

|**ab**|<=ab

Powyższa nierówność wynika bezpośrednio z definicji iloczynu skalarowego.

Obliczmy kąt miedzy niezerowymi wektorami **a** i **b** posługując się iloczynem skalarowym:

cos(**a**,**b**) = **ab**/ab

Z nierówności Cauchy'ego – Buniakowskiego wynika, że dla dowolnych niezerowych wektorów **a** i **b** kąt (**a**,**b**) między tymi wektorami spełnia nierówność:

|cos(**a**,**b**)|<=1

1.3.5 Iloczyn skalarowy przedstawiony za pomocą współrzędnych wektorów

WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Rozpatrzmy dwa wektory **a**=$\left(a_x, a_y, a_z\right)$ i **b**=$\left(b_x, b_y, b_z\right)$ ortokartezjańskim układzie współrzędnych x,y,z. Możanje zapisać zapomocą wersorów i,j,k jako ich kombinacje liniowe:

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \quad \mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$$

Aby obliczyć iloczyn skalarowy tych wektorów skorzystamy z następującej własności iloczynu:

Kombinacja liniowa wektorów mnoży się przez siebie skalarowo traktując znak mnożenia i znak dodawania tak jak w algebrze liczb więc np.:

$$\left(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}\right) \circ \left(\upsilon\mathbf{c} + \omega\mathbf{d}\right) = \lambda\upsilon\mathbf{a} \circ \mathbf{c} + \lambda\omega\mathbf{a} \circ \mathbf{d} + \mu\upsilon\mathbf{b} \circ \mathbf{c} + \mu\omega\mathbf{b} \circ \mathbf{d}$$

Iloczyny dwóch różnych wersorów spośród podanych jest zerem gdyż są one względem siebie prostopadłe:

$$\mathbf{i} \circ \mathbf{j} = \mathbf{j} \circ \mathbf{k} = \mathbf{k} \circ \mathbf{i} = 0$$

Natomiast iloczyn wersora przez siebie jest jednością.

$$\mathbf{i} \circ \mathbf{i} = \left|\mathbf{i}^2\right| = 1$$

Więc prawdziwe jest twierdzenie, że iloczyn skalarowy dwu wektorów wyraża się wzorem:

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Warunek ortogonalności dwu wektorów **a** i **b** ma postać:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

oraz wzór na cosinus kąta między niezerowymi wektorami a i b ma wartość:

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Przykład obliczeniowy 4

Treść zadania.

Obliczyć iloczyn skalarowy dwu wektorów **a**=(3,5,-4), **b**=2**i**-4**j**+**k** oraz kąt między tymi wektorami.

Rozwiązanie.

Iloczyn skalarowy:

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 3 \circ 2 + 5 \circ \left(-4\right) + \left(-4\right) \circ 1 = -18$$

Długość wektorów:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{3^2 + 5^2 + (-4)^2} = 5\sqrt{2}$$

$$b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{21}$$

Więc cosinus kąta:

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \circ \mathbf{b}}{ab} = \frac{-18}{5\sqrt{42}} = -\frac{3\sqrt{42}}{35} \approx\sim -0,554$$

$$\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = arc\cos\left(-\frac{3\sqrt{42}}{35}\right) \approx arc\cos(-0,554)$$