WYBRANE DZIAŁY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Wykład 0

Wprowadzenie

0.1 Równania różniczkowe zwyczajne

Równanie postaci:

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x)) \tag{0.1}$$

Gdzie $f(x, y)$ jest funkcją dwóch zmiennych określoną i ciągłą w pewnym obszarze płaskim D, nazywamy równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu pierwszego. Ogólniej równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu pierwszego nazywamy równanie postaci:

$$F(x, y, y') = 0$$

Gdzie F jest funkcją trzech zmiennych x, y, y' określoną i ciągłą w pewnym obszarze przestrzennym. Rozwiązaniem lub całką równania (0.1) nazywamy każda funkcję y(x) różniczkowalną w pewny przedziale I, które wykres leży w obszarze D i która spełnia warunek:

$$y'(x) = f(x, y(x)) \; dla\; każ\deg o\; x \in I$$

Krzywą y=y(x) nazywamy krzywą całkowa, lub krócej całką równania różniczkowego (0.1). Rozwiązać lub scałkować równanie (0.1) znaczy znaleźć wszystkie jego całki.

Przykład 1

Rozwiązać równanie:

$$y' = 3x^2 - 2$$

Funkcja

$$y = x^3 - 2x$$

W przedziale $-\infty < x < \infty$ jest całką tego równania. Podobnie funkcje $y = x^3 - 2x + c$ sa całkami przy dowolnych wart0ściach c. Istnieje więc rodzina krzywych całkowych.

Przykład 2

Rozwiązać równanie:

$$xy' + 3x - 2y = 0$$

Funkcja

$$y = cx^2 + 3x$$

W przedziale $-\infty < x < \infty$ jest całką tego równania przy dowolnych wartościach c.

Przykład 3

Rozwiązać równanie:

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Funkcja

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \ i \ y = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

W przedziale $-r < x < r$ są całkami tego równania gdzie r jest dowolną stała dodatnią.

Ogólnie równania w postaci:

$$F\left(x, y, y', \ldots y^{(n)}\right) = 0 \tag{0.2}$$

Gdzie F jest funkcją n+2 zmiennych x, y, y', …., $y^{(n)}$ określoną i ciągłą w pewnym obszarze (n+2) wymiarowym i gdzie $y^{(n)}$ oznacza pochodną $\frac{d^n y}{dx^n}$, nazywamy równanie różniczkowym zwyczajnym rzędu n. Całkę tego równania określamy podobnie jak w przypadku n=1.

Przykład 4

Rozwiązać równanie:

$$xy'' + y' = 0$$

Funkcja

$$y = c_1 \ln|x| + c_2$$

W przedziale $-\infty < x < 0 \ \ i \ 0 < x < \infty$ y jest całką tego równania przy dowolnych wartościach $c_1 \ i \ c_2$.

0.2 Przykłady zagadnień prowadzących do równań różniczkowych.

Przedstawione zostaną trzy zagadnienia, których rozwiązanie prowadzi do całkowania równań różniczkowych.

Zadanie 1

Ciało stałe o masie m, zanurzone w cieczy, rozpuszcza się jak uczy doświadczenie z prędkością proporcjonalną do ilości ciała nierozpuszczonego. Niech y=y(t) oznacza ilość ciała rozpuszczonego w czasie t. Pytanie jak y zależy od czasu t?

Ilość ciała nie rozpuszczonego po upływie czasu t równa się m-y, prędkość rozpuszczania jest $\frac{dy}{dt}$, szukamy więc funkcji y=y(t) spełniającej równanie różniczkowe zwyczajne:

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda(m - y)$$

Gdzie λ jest stałym współczynnikiem proporcjonalności.

Rozwiązanie równania ma postać:

$$y = m - ce^{-\lambda t}$$

Gdzie c jest dowolną stałą.

Załóżmy, że rozpuszczanie zaczęło się w chwili t=0, wiec dla t=0 mamy y=0 skąd m-c=0 czyli c=m.

Przy tym warunku początkowym rozwiązanie ma postać:

$$y = m\left(1 - e^{-\lambda t}\right) \quad dla \quad 0 \le t \le \infty$$

Zadanie II

Na punkt materialny m poruszający się po osi x niech działa siła sprężysta proporcjonalna do odległości punktu m od punktu stałego 0. Pytanie, jaki ruch odbywa punkt m po wychyleniu z położenie równowagi 0 do punktu A, gdzie 0A =d.

Niech x=x(t) będzie odległością punktu m od punktu 0 w chwili t. Siła działajaca na punkt m równa się iloczynowi masy m przez przyspieszenie $-\frac{d^2x}{dt^2}$, więc szukamy funkcji x=x(t) spełniającej równanie różniczkowe:

$$-m\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda x$$

Gdzie λ jest pewną stałą dodatnią.

Oznaczając $a^2 = \frac{\lambda}{m}$ otrzymujemy:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a^2x = 0$$

Jest to równanie różniczkowe zwyczajne rzędu drugiego. Czytelnik może sprawdzić, że funkcja $x = c_1 a \sin \alpha t + c_2 a \cos \alpha t$ spełnia to równanie przy dowolnych stałych wartościach $c_1 \ i \ c_2$.

Załóżmy teraz, że czas liczymy od chwili największego wychylenia, tj., że dla t=0 mamy x=d, zatem $c_2 = \frac{d}{a}$. Prędkość ruchu :

$$\frac{dx}{dt} = -c_1 a \cos \alpha t + c_2 a \sin \alpha t$$

Niech równa się zeru w chwili t=0, więc $c_1 = 0$.

Zatem

$$x = d \cos \alpha t$$

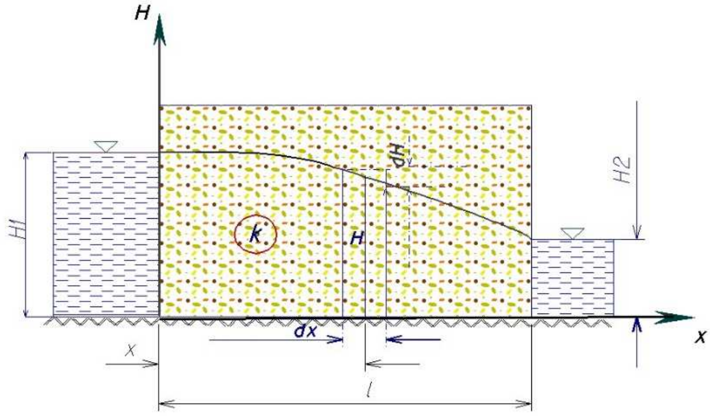
Punkt m odbywa więc ruch okresowy harmoniczny o amplitudzie d i okresie $T = \frac{2\pi}{a}$.

Zadanie III

Przykłady rozwiązań zadań dwuwymiarowych w oparciu o aproksymację Dupuit .

Zagadnienia przepływu ustalonego przy zasilaniu bocznym - przepływ wody przez groblę.

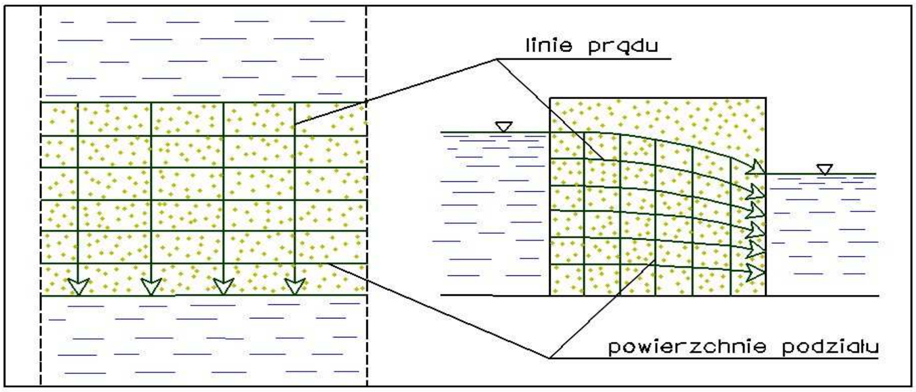
Grobla zbudowana z gruntu jednorodnego i izotropowego o współczynniku filtracji k spoczywa na poziomo ułożonym stropie warstwy nieprzepuszczalnej (rys. 0.1).



Rys. 0.1 Schemat zadania – przepływ wody przez groblę.

Szerokość grobli wynosi 1m, natomiast długość l. Poziom wody po jednej stronie grobli wynosi H_1, natomiast po drugiej H_2. Przepływ wody przez groblę jest ustalony. Wyznaczymy poziom zwierciadła wody w grobli oraz wydatek przepływającej przez groblę wody.

Linie prądu w tym przypadku wyglądają tak, jak to pokazano na (rys. 0.2).



Rys. 0.2 Linie prądu i powierzchnie przekroju.

Widać więc, że podział obszaru filtracji przekrojami pionowymi prostopadłymi do brzegu nieprzepuszczalnego odpowiada założeniom teorii Dupuit. Prędkość filtracji w odległości x od początku układu współrzędnych wyniesie:

$$v = k\frac{dH}{dx}. \tag{0.3}$$

Wydatek przypadający na 1mb grobli jest równy:

$$q = Fv = kH\frac{dH}{dx} = const. \tag{0.4}$$

Rozwiązując powyższe równanie różniczkowe zwyczajne metodą rozdzielenia zmiennych, otrzymamy:

$$H = \sqrt{\left(-\frac{2q}{k}x + c\right)}. \tag{0.5}$$

Uwzględniając warunek brzegowy:

dla $x = 0;\ H = H_1$

oraz $x = l;\ H = H_2,$

wyznaczymy stałe c oraz wydatek q w równaniu (0.5):

$$c = H_1^2,$$

(0.6)

$$q = \frac{k}{2l}\left(H_1^2 - H_2^2\right).$$

Równanie opisujące powierzchnię swobodną zwierciadła wody ma więc w postać:

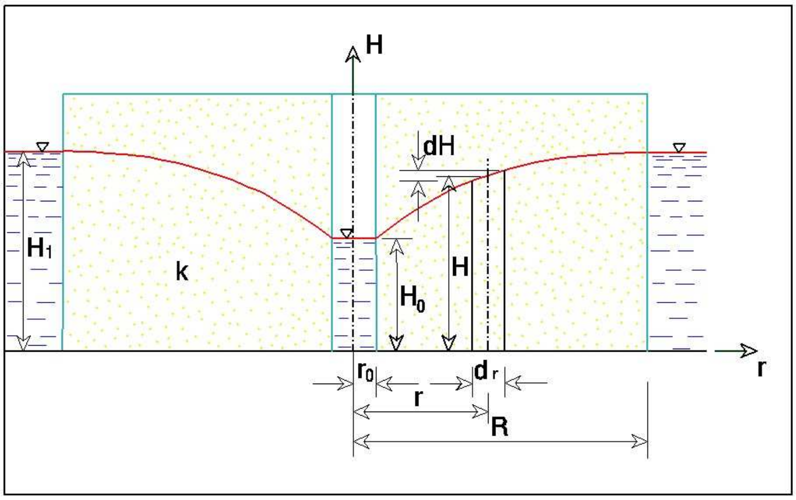
$$H = \sqrt{-\left(H_1^2 - H_2^2\right)\frac{x}{l} + H_1^2}\;. \tag{0.7}$$

Rozkład prędkości filtracji wzdłuż drogi przepływu przedstawia się następująco:

$$v = \frac{k}{2l}\frac{H_1^2 - H_2^2}{\sqrt{H_1^2 - \left(H_1^2 - H_2^2\right)\frac{x}{l}}}\;. \tag{0.8}$$

Dopływ do studni w warstwie o zwierciadle swobodnym przy zasilaniu bocznym.

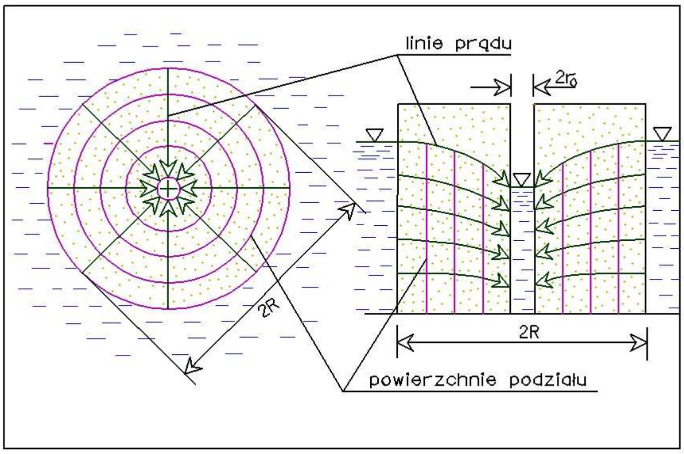
Rozwiążemy dopływ do studni o zwierciadle swobodnym (rys.0.3) przy następujących założeniach:



Rys. 0.3 Schemat zadania – dopływ cieczy nieściśliwej do studni.

- studnia o promieniu r leży na środku wyspy o promieniu R,
- warstwa wodonośna o współczynniku filtracji k jest jednorodna i izotropowa,
- strop warstwy nieprzepuszczalnej jest ułożony poziomo,
- studnia sięga spągu warstwy przepuszczalnej (studnia zupełna) i jest do niej prostopadła,
- przed pompowaniem zwierciadło cieczy jest poziome,
- na brzegach wyspy poziom wody względem stropu warstwy nieprzepuszczalnej wynosi H_1,
- w studni H_0,
- przepływ jest ustalony i laminarny.

Zaznaczmy na rys. 0.4 przebieg linii prądu dla rozwiązywanego zadania.



Rys 0.4. Przebieg linii prądu.

Obszar filtracji w tym przypadku podzielimy pionowymi, współosiowymi ze studnią powierzchniami. Prędkość filtracji w odległości r od osi studni wyniesie:

$$v = k\frac{dH}{dr},$$

wydatek natomiast będzie równy:

$$Q = 2\pi rHk\frac{dH}{dr}.$$

Rozwiązując powyższe równanie różniczkowe metodą rozdzielenia zmiennych otrzymamy:

$$H = \sqrt{\frac{Q}{\pi k}\ln r + c}\,. \qquad (0.9)$$

Warunki brzegowe dla rozpatrywanego przypadku są następujące:

dla $r = r_0;\ \ H = H_0$

oraz $r = R;\ \ H = H_1.$

Uwzględniając powyższe warunki uzyskujemy równanie opisujące powierzchnię zwierciadła wody w postaci:

$$H = \sqrt{H_1^2 - \left(H_1^2 - H_0^2\right)\frac{\ln\frac{r}{r_0}}{\ln\frac{R}{r_0}}} \qquad (0.10)$$

oraz wzór na wydatek dopływającego do studni:

$$Q = \frac{\pi k\left(H_1^2 - H_0^2\right)}{\ln\frac{R}{r_0}}, \qquad (0.11)$$

natomiast prędkość filtracji wyrazi się wzorem:

$$v = \frac{k\left(H_1^2 - H_0^2\right)}{2r\ln\frac{R}{r_0}\sqrt{H_1^2 - \left(H_1^2 - H_0^2\right)\frac{\ln\frac{R}{r}}{\ln\frac{R}{r_0}}}}. \qquad (0.12)$$

0.3 Równania różniczkowe cząstkowe.

Funkcje trzech lub więcej zmiennych.

Funkcje trzech zmiennych f(x,y,z) i ogólnie funkcję o zmiennych $f\left(x_1, x_2, x_3, \ldots. x_n\right)$ określamy w zbiorze przestrzennym E podobnie jak funkcje jednej czy dwu zmiennych. Analogicznie też określamy granicę i ciągłość tych funkcji. Zachowują ważność twierdzenia o granicy i ciągłości sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu dwu funkcji.

Definicja pochodnej cząstkowej.

Niech f(x,y,z) będzie funkcją określoną w otoczeniu punktu $\left(x_0, y_0, z_0\right)$. Pochodną cząstkowa tej funkcji względem x w punkcie $\left(x_0, y_0, z_0\right)$ nazywany pochodna funkcji $f\left(x, y_0, z_0\right)$ jednej zmiennej x w punkcie x_0. Określamy ją przez :

$$f_x\left(x_0, y_0, z_0\right) \qquad \text{lub} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}$$

Analogicznie określamy pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial y}$ i $\frac{\partial f}{\partial z}$ funkcji $f(x,y,z)$ oraz pochodne czastkowe funkcji $f(x_1,x_2,...,x_n)$.

Przykład 1

Niech

$$f(x,y,z)=2x^3-xy^2+4yz$$

Obliczamy pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=6x^2-y^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=-2xy+4z$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}=4y$$

Pochodne cząstkowe pochodnych cząstkowych nazywamy pochodnymi cząstkowymi wyższych rzędów. Przez

$$\frac{\partial^{p+q+r}f}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}$$

Lub

$$f_{x^p y^q z^r}(x,y,z)$$

oznaczamy pochodną cząstkowa rzędu p+q+r funkcji f(x,y,z) otrzymaną różniczkowaniem najpierw r razy względem z, następnie q razy względem y i wreszcie p razy względem x. Jeżeli wszystkie pochodne rzędu n są ciągłe, to porządek różniczkowania nie ma wpływu na wartość tych pochodnych.

Funkcję $u(x,y,z)$ klasy C_2 spełniającą w pewnym obszarze równanie:

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$$

Nazywamy funkcją harmoniczną trzech zmiennych.

Pochodne cząstkowe funkcji złożonej.

Niech funkcje $u=\phi(x,y)$ i $v=\psi(x,y)$ będą określona jest funkcja z=f(u,v). Wówczas wzór:

$$z=f\left[\phi(x,y),\psi(x,y)\right] \tag{0.13}$$

Określa w obszarze D funkcję złożoną zmiennych x i y. Możemy wykazać, że :

Jeżeli funkcje $\phi(x, y)$ i $\psi(x, y)$ maja pochodne cząstkowe w punkcie P o współrzędnych x,y oraz funkcja $f(u, v)$ ma w otoczeniu punktu (u,v) gdzie $u = \phi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$, pochodne cząstkowe ciągłe to funkcja złożona (0.13) ma w punkcie P pochodne cząstkowe wyrażone wzorami:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{0.14}$$

Jeżeli funkcje f, ϕ, ψ mają drugie pochodne cząstkowe wówczas wzory (0.14) można stosować do z_x i z_y i obliczyć z_{xx}, z_{yy}, z_{xy} . Np.:

$$z_{xx} = f_{uu}u_x^2 + 2f_{uv}u_x v_x + f_{vv}v_x^2 + f_u u_{xx} + f_v v_{xx}$$

Przykład obliczeniowy

Niech

$$z = u \ln v$$

Gdzie u=3x-y, $v = x^2 + y^2$. W myśl wzoru (0.14) mamy:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3\ln v + \frac{u}{v}2x = 3\ln\left(x^2 + y^2\right) + 2x\frac{3x - y}{x^2 + y^2},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -1\ln v + \frac{u}{v}2y = -\ln\left(x^2 + y^2\right) + 2y\frac{3x - y}{x^2 + y^2}.$$

Różniczki funkcji dwu lub więcej zmiennych.

Niech f(x,y) będzie funkcją określoną w otoczeniu punktu $P_0(x_0, y_0)$ i różniczkowalną w tym punkcie. Iloczyny:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx, \quad \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Gzie dx i dy są dowolnymi przyrostami, a pochodne są obliczone w punkcie P_0 , nazywamy różniczkami cząstkowymi funkcji f(x,y) w punkcie P_0.

Sumę różniczek cząstkowych oznaczamy przez df:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{0.15}$$

I nazywamy różniczką zupełną funkcji f w punkcie P.

Różniczkę zupełną funkcji n zmiennych $f(x_1, x_2, \ldots. x_n)$ określamy analogicznie jako sumę n różniczek cząstkowych:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}dx_3 + \ldots\ldots.. + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n \tag{0.16}$$

Wzór Taylora dla funkcji dwu i więcej zmiennych.

Niech $f(x,y)$ będzie funkcją klasy C_n w pewnym obszarze zawierającym odcinek o końcach $A(x_0,y_0)\ i\ B(x_0+h,y_0+k)$. Na odcinku AB znajduje się taki punkt $C(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$,że $f(x_0+h,y_0+k)$ wyraża się wzorem:

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\frac{df}{1!}+\frac{d^2f}{2!}+.....+\frac{d^{n-1}f}{(n-1)!}+R_n \tag{0.17}$$

Gdzie

$$df=\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k\right)^p \quad , \quad R_n=\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k\right)^n$$

I gdzie pochodne funkcji f w wyrażeniach $d^\nu f$ dla $\nu<n$ są obliczone w punkcie (x_0,y_0) , pochodne rzędu n w reszcie R_n są obliczone w punkcie $(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$.

Maksima i minima.

Funkcja $f(x,y)$ różniczkowalna w pewnym obszarze może mieć ekstremum (maksimum lub minimum) tylko w takich punktach obszaru, w których:

$$f_x(x,y)=0 \quad i \quad f_y(x,y)=0 \tag{0.18}$$

Twierdzenie powyższe łatwo rozszerzyć, na funkcje trzech i więcej zmiennych.

Warunek wystarczający dla ekstremum.

Niech funkcja $f(x,y)$ ma w otoczeniu punktu (x_0,y_0) pierwsze i drugie pochodne cząstkowe ciągłe. Wyrażenie:

$$W(x,y)=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2 \tag{0.19}$$

Nazywamy wyróżnikiem funkcji $f(x,y)$. Można wykazać, że:

W punkcie (x_0,y_0) w którym $f_x=0\ i\ f_y=0$, funkcja $f(x,y)$ ma ekstremum:

- jeżeli $W(x_0,y_0)>0$ osiąga maksimum, gdy w tym punkcie $f_{xx}<0$, minimum gdy w tym punkcie $f_{xx}>0$
- jeżeli $W(x_0,y_0)<0$, wówczas nie ma ekstremum.