Wykład XI

UKŁADY RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH

1. Układy równań różniczkowych zwyczajnych

Układem równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu o dwu funkcjach niewiadomych nazywamy układ:

$$\begin{aligned} \Phi_1(t, x,, y, x', y') &= 0 \\ \Phi_2(t, x,, y, x', y') &= 0 \end{aligned} \qquad (11.1)$$

gdzie t jest zmienna niezależną. Całką układu (11.1) nazywamy taki układ dwu funkcji:

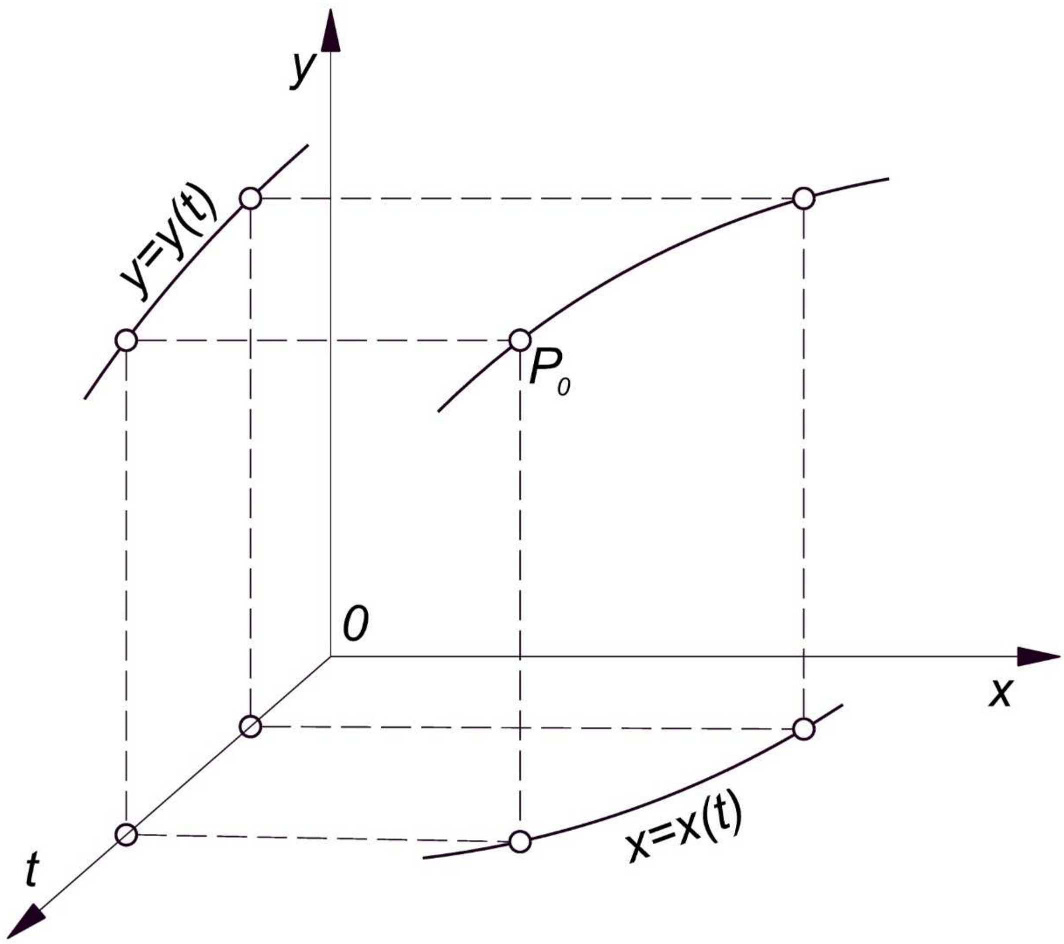
$$x = x(t), \quad y = y(t) \qquad (11.2)$$

Określonych, ciągłych i różniczkowalnych w pewnym zbiorze, które wstawione do układu (11.1) zamieniają równania układu (11.1) na tożsamości.

Układ (11.1) daje się niekiedy rozwiązać względem pochodnych x' i y': przybiera on wtedy następująca prostsza postać, zwaną normalną postacią Cauchy'ego.

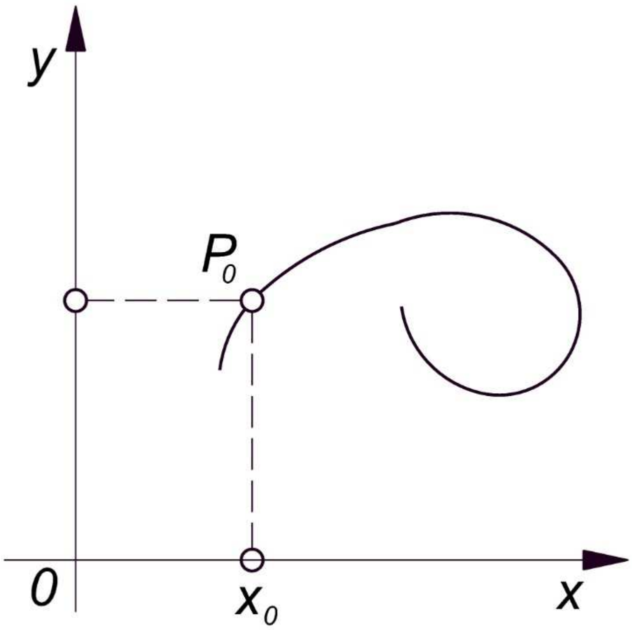
$$\frac{dx}{dt} = f_1(t, x, y), \quad \frac{dy}{dt} = f_2(t, x, y) \qquad (11.3)$$

Podamy dwie geometryczne interpretacje rozwiązania (11.2). Mianowicie można je traktować jako linie w przestrzeni 0txy, będącą krawędzią przecięcia się dwu walców (zwanych walcami rzutującymi); jednego o tworzących równoległuch do osi 0y i kierowincy o równaniu x=x(t), leżącej na płaszczyźnie 0tx i drugiego o tworzących równoległych do osi 0x i kierownicy y=y(t) leżącej w płaszczyźnie 0ty (rys. 11.1).



Rys. 11.1 Linia w przestrzeni 0txy

Można tez uważać t za parametr linii płaskiej, leżącej w płaszczyźnie 0xy, zadanej układm równań parametrycznych (11.2). Wtedy płaszczyznę 0xy nazywamy płaszczyzną fazową (rys. 11.2)



Rys. 11.2 Rozwiązanie na płaszczyźnie fazowej

Oczywiście linia w płaszczyźnie fazowej jest rzutem równoległym do osi 0t linii przestrzennej, opisanej w pierwszej interpretacji.

Jedna z metod rozwiązywania układu (11.1) lub (11.3) polega na sprowadzeniu go do równania różniczkowego zwyczajnego drugiego rzędu o jednej funkcji niewiadomej (warunkami równoważności układu (11.3) i równania drugiego rzędu nie będziemy się zajmować). W tym celu różniczkujemy jedno z równań układu (11.3) np. drugie, względem zmiennej t. Prowadzi to do równania

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \Psi\left(t, x, y, x', y'\right) \tag{11.4}$$

Rugujemy z równań (11.4) i (11.1) tj. z trzech, funkcje niewiadomą x(t) i x'(t). Otrzymujemy równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu o niewiadomej y(t).

$$\Phi\left(t, y, y'\, y''\right) = 0 \tag{11.5}$$

Którego całka ogólna

$$\varphi\left(t, y, C_1, C_2\right) = 0 \tag{11.6}$$

Zależy od dwu stałych dowolnych.

Jeżeli tę funkcję można rozwikłać względem y, to całka równania (11.5) da się zapisać w postaci jawnej

$$y = y(t, C_1, C_2) \tag{11.7}$$

Z układu równań (11.1) i (11.3) można następnie wyrugować pochodną x’ doprowadzając do związku

$$\Omega(t, x, C_1, C_2) = 0 \tag{11.8}$$

Co pozwala z kolei dzięki (11.7) napisać związek

$$\omega(t, x, C_1, C_2) \tag{11.9}$$

Będący całką rozpatrywanego układu. Rozwijając (11.9) względem x, otrzymamy

$$x = x(t, C_1, C_2) \tag{11.10}$$

Całka ogólna układu równań (11.1), zapisująca się układem funkcji (11.7) i (11.10) zależy od dwu parametrów stałych (stałych dowolnych) C_1 *i* C_2 . Na ogół wystarczy postawić dwa warunki, które ma spełniać całka szczególna układu równań (11.1), by całka była jednoznacznie wyznaczona. Te dwa warunki mogą np. przedstawiać się tak:

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0 \tag{11.11}$$

Geometrycznie znaczy to, ze linia całkowa ma przechodzić przez zadany punkt P_0 o współrzędnych t_0, x_0, y_0 (rys. 11.1). Sprawę jednoznaczności rozwiązania układu równań (11.3) przy warunku (11.11) rozstrzyga następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Jeżeli dwie funkcje f_1 *i* f_2 *w równaniach (11.3) są w otoczeniu punktu* $P_0 = (t_0, x_0, y_0)$ *ograniczone wraz ze swoimi pochodnymi pierwszego rzędu, to w pewnym otoczeniu punktu* P_0 *istniej dokładnie jedna linia całkowa układu równań (11.3) przechodząca przez* P_0.

Przykład obliczeniowy

Zadanie 1

Znaleźć całkę układu równań różniczkowych:

$$\frac{dx}{dt} = t + x + y, \quad \frac{dy}{dt} = x - y \tag{11.12}$$

Przechodząca przez początek układu $(0,0,0)$.

Rozwiązanie

Różniczkując drugie z równań (11.12) i korzystając z pierwszego, otrzymujemy:

$$y'' = x' - y' = t + x + y - y'$$

A po ponownym uwzględnieniu równania drugiego, otrzymujemy

$$y''-2y=t \tag{11.13}$$

Całką ogólną równania (11.13) jest

$$y=Ae^{-\sqrt{2}t}+Ae^{\sqrt{2}t}-\frac{1}{2}t$$

Wobec czego dzięki równaniu drugiemu z równań (11.12)

$$x=y'+y=A\left(1-\sqrt{2}\right)e^{-\sqrt{2}t}+B\left(1+\sqrt{2}\right)e^{\sqrt{2}t}-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}$$

Warunki początkowe dają układ równań

$$\left(1-\sqrt{2}\right)A+\left(1+\sqrt{2}\right)B=\frac{1}{2}$$
$$A+B=0$$

skąd

$$A=-\frac{\sqrt{2}}{8},\quad B=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

Wobec czego szukanym rozwiązaniem układu równań (11.12) jest

$$x=\frac{1}{2}\cosh\sqrt{2}t+\frac{\sqrt{2}}{4}\sinh\sqrt{2}t-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}$$
$$y=\frac{\sqrt{2}}{4}\sinh\sqrt{2}t-\frac{1}{2}t$$

………………………………………………………………………………………………

11.2. Układ liniowych równań różniczkowych.

Gdy liczba równań i funkcji niewiadomych jest mała, to można szukane funkcje oznaczać $x(t),\ y(t),\ z(t)$. Gdy jest ich więcej (w szczególności gdy rozpatruje się zagadnienie ogólne) wygodnie jest oznaczać niewiadome jedną literą z indeksami, np. $x_1(t),\ x_2(t),\ldots\ldots,x_n(t)$.

Układem liniowych równań różniczkowych zwyczajnych nazywamy układ o postaci

$$\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{aligned} \tag{11.14}$$

Gdy przynajmniej jedna z funkcji $f_i(t) \quad (i = 1, 2, ..., n)$ nie jest tożsamosciowo równa zeru, to układ (11.14) nazywamy układem niejednorodnym, w przeciwnym wypadku układem jednorodnym. Współczynniki $a_{ik} \quad (i, k = 1, 2, ..., n)$ zależą na ogół od zmiennej niezależnej t. Gdy wszystkie a_{ik} są stałe, układ nazywamy układem o stałych współczynnikach.

Na ogół układ (11.14) rozwiązujemy w sposób analogiczny jak równanie rózniczkowe liniowe:

Najpierw szukamy całki ogólnej układu równań (11.14) w którym na miejscu funkcji $f_i(t) \quad (i = 1, 2, ..., n)$ kładziemy zera,, a następnie znaną już metodą uzmienniania stałych poszukujemy rozwiązania układu (11.14).

Przykład obliczeniowy

Treść zadania

Rozwiązać układ równań różniczkowych

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + \frac{1}{\cos t} \tag{11.15}$$

Rozwiązanie

Układ jednorodny:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x \tag{11.16}$$

Ma rozwiązanie ogólne

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad y = C_2 \cos t - C_1 \sin t \tag{11.17}$$

Uzmienniając stałe $C_1\ i\ C_2$ tj. uważając je za nieznane funkcje zmiennej t i wstawiając (11.16) do (11.15) otrzymujemy

$$C_1^{'} = -tg\, t, \quad C_2^{'} = 1$$

Stąd

$$C_1 = \ln|\cos t| + A, \quad C_2 = t + B$$

A zatem

$$\begin{aligned} x &= A\cos t + B\sin t + \cos t \ln|\cos t| + t\sin t \\ y &= B\cos t - A\sin t - \sin t \ln(\cos t) + t\cos t \end{aligned} \tag{11.18}$$

……………………………………………………………………………………

Niech będzie dany układ jednorodnych równań różniczkowych

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\,x_k \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots, n) \tag{11.19}$$

O współczynnikach $a_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \ldots\ldots, n)$ będących ciągłymi funkcjami zmiennej niezależnej t. Jeżeli układy

$$\begin{array}{c} \left[x_1^{(1)}(t), x_2^{(1)}(t), \ldots.., x_n^{(1)}(t)\right] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left[x_1^{(n)}(t), x_2^{(n)}(t), \ldots.., x_n^{(n)}(t)\right] \end{array} \tag{11.20}$$

Są jego rozwiązaniami od siebie liniowo niezależnymi w pewnym przedziale, tzn.. takimi, że

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)}(t), x_2^{(1)}(t), \ldots.., x_n^{(1)}(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^{(n)}(t), x_2^{(n)}(t), \ldots.., x_n^{(n)}(t) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{11.21}$$

W każdym punkcie tego przedziału, to całka ogólna układu (11.19) jest kombinacją liniową rozwiązań (11.20) tzn. jest dana wzorami

$$\begin{array}{l} x_1 = C_1 x_1^{(1)}(t) + C_2 x_1^{(2)}(t) + \ldots. + C_n x_1^{(n)}(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k x_1^{(k)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = C_1 x_n^{(1)}(t) + C_2 x_n^{(2)}(t) + \ldots. + C_n x_n^{(n)}(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k x_n^{(k)} \end{array} \tag{11.22}$$

Niezależne od siebie rozwiązania (11.20) nazywamy układem podstawowym rozwiązań układu równań (11.19).

11.3 Układ liniowych równań różniczkowych o stałych współczynnikach.

Niech układ równań liniowych jednorodnych

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\,x_k \quad (i, k = 1, 2, \ldots\ldots, n) \tag{11.23}$$

Będzie układem ostałych współczynnikach.

Poszukajmy rozwiązania tego układu w postaci

$$x_i = a_i e^{\lambda t} \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{11.24}$$

Wstawiając rozwiązanie (11.24) do (11.23) otrzymamy układ równań liniowych jednorodnych

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11} - \lambda) a_1 + a_{12} a_2 + ... + a_{1n} a_n = 0 \\ a_{21} a_1 + (a_{22} - \lambda) a_2 + ... + a_{2n} a_n = 0 \\ .... \\ a_{n1} a_1 + a_{n2} a_2 + ... + (a_{nn} - \lambda) a_n = 0 \end{array}\right\} \tag{11.25}$$

O rozwiązaniu niezerowym wtedy i tylko wtedy gdy wyznacznik charakterystyczny tego układu

$$\det[a_{ik} - \lambda \delta_{ik}] = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda \; a_{12} \; ..... \; a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} - \lambda \; ..... \; a_{2n} \\ .... \\ a_{n1} \; a_{n2} \; ..... \; a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \tag{11.26}$$

jest równy zeru.

Wyznacznik (11.26) jest wielomianem charakterystycznym macierzy $[a_{ik}]$, zaś samo równanie, wynikła z przyrównania tego wyznacznika do zera, jest równaniem sekularnym macierzy utworzonej ze współczynników układu równań (11.24).

Pierwiastki równania sekularnego

$$\det[a_{ik} - \lambda \delta_{ik}] = 0 \tag{11.27}$$

Niekoniecznie różne, rzeczywiste lub zespolone nazywają się wartościami charakterystycznymi macierzy $[a_{ik}]$.

Załóżmy, że wszystkie wartości charakterystyczne macierzy $[a_{ik}]$, są różne i oznaczymy je przez $\lambda_k \quad (k = 1, 2, ..., n)$.

Jeżeli do układu równań (11.25) za λ podstawimy którakolwiek z wartości charakterystycznych np. λ_k gdzie k jest jedną z liczb 1,2,….,n, to otrzymamy układ równań liniowo od siebie zależnych. Wtedy jedno z równań układu

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11} - \lambda) a_1 + a_{12} a_2 + ... + a_{1n} a_n = 0 \\ a_{21} a_1 + (a_{22} - \lambda) a_2 + ... + a_{2n} a_n = 0 \\ .... \\ a_{n1} a_1 + a_{n2} a_2 + ... + (a_{nn} - \lambda) a_n = 0 \end{array}\right\} \tag{11.28}$$

Będzie kombinacją liniową równań pozostałych.

Niech np. równanie ostatnie będzie kombinacją liniowa równań pozostałych. Macierz współczynników układu pozostałych n-1 równań

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda\ a_{12}\ .....\ a_{1,n-1}\ a_{1,n} \\ a_{21}\ a_{22}-\lambda\ .....\ a_{2,n-1}\ a_{2,n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-1,1}\ a_{n-1,2}\ .....\ a_{n-1,n-1}-\lambda\ a_{n-1,n} \end{vmatrix} \tag{11.29}$$

Jet oczywiście rzędu n-1. Oznaczając przez $W_i^{(k)}$ podwyznacznik macierzy powstałej z macierzy (11.29) przez skreślenie i-tej kolumny (co najmniej jeden z nich jest różny od zera), otrzymamy rozwiązanie układu równań (11.19) z dokładnością do stałej dowolnej C_k , w postaci:

$$a_1^{(k)}=C_kW_1^{(k)},\ a_2^{(k)}=C_kW_2^{(k)},\ ...,\ a_n^{(k)}=C_kW_n^{(k)} \tag{11.30}$$

Wobec czego rozwiązanie (11.24) przybierze postać

$$x_i^{(k)}=C_kW_i^{(k)}e^{\lambda_k t}\quad (i,k=1,2,.....,n) \tag{11.31}$$

Zaś całka ogólna układu równań (11.23) – postać

$$x_i=\sum_{k=1}^{n}C_kW_i^{(k)}e^{\lambda_k t} \tag{11.32}$$

Jeżeli wartości charakterystyczne macierzy $[a_{ik}]$ nie wszystkie są pojedyncze, np. λ_0 jest k_0- krotną wartością, to wśród poszukiwanych rozwiązań układu równań (11.23) znajdą się rozwiązania o postaci:

$$A_1e^{\lambda_0 t},\quad A_2te^{\lambda_0 t},............,\quad A_{k_0}t^{k_0-1}e^{\lambda_0 t}$$

Teorią takich przypadków zajmować się nie będziemy. Podamy jednak przykłady i rozwiążemy je.

Przykład obliczeniowy

Treść zadania

Rozwiązać układ równań różniczkowych

$$\frac{dx}{dt}=y-z,\quad \frac{dy}{dt}=z-x,\quad \frac{dz}{dt}=x-y \tag{11.33}$$

Rozwiązanie 1

Sprowadzenie układu równań różniczkowych do równania trzeciego rzędu. Zróżniczkujmy układ (11.33). Otrzymamy

$$x'' = y' - z', \quad y'' = z' - x', \quad z'' = x' - y' \tag{11.34}$$

Zróżniczkujmy jeszcze raz równanie $(11.34)_3$

$$z''' = x'' - y'' \tag{11.35}$$

I wstawmy do (11.35) prawe strony równań $(11.34)_1$ i $(11.34)_2$, a następnie $(11.33)_1$ i $(11.33)_2$. Otrzymamy

$$\begin{aligned} z''' &= (y' - z') - (z' - x') = -2z' + x' + y' = -2z' + (y - z) + (z - x) = \\ &= -2z' - (x - y) = -2z' - z' = -3z' \end{aligned}$$

a więc

$$z''' + 3z' = 0 \tag{11.36}$$

Pierwiastkami równania charakterystycznego

$$\lambda^3 + 3\lambda = \lambda\left(\lambda + j\sqrt{3}\right)\left(\lambda - j\sqrt{3}\right) = 0 \tag{11.37}$$

Są

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -j\sqrt{3}, \quad \lambda_3 = j\sqrt{3}$$

Wobec czego całkami podstawowymi równania (11.36) są

$$1, \quad \cos\sqrt{3}t, \quad \sin\sqrt{3}t$$

Zaś całka ogólną jest

$$z = C_1 + C_2\cos\sqrt{3}t + C_3\sin\sqrt{3}t \tag{11.38}$$

Pozostałe funkcje znajdziemy poszukując zależności

$$x = f\left(z, z', z''\right)$$

Mianowicie łącząc $(11.33)_1$ i $(11.33)_3$ otrzymamy

$$z' + z = -x' + x \tag{11.39}$$

Oraz łącząc $(11.34)_3$ i $(11.33)_2$

$$z'' + z = x' + x \tag{11.40}$$

Z równań (11.39) i (11.40) dostajemy

$$x = \frac{1}{2}\left(z'' + z' + 2z\right) \tag{11.41}$$

a w konsekwencji

$$x = C_1 - \frac{C_2 - \sqrt{3}C_3}{2}\cos\sqrt{3}t - \frac{\sqrt{3}C_2 + C_3}{2}\sin\sqrt{3}t \tag{11.42}$$

Zależność

$$y = f\left(z, z', z''\right)$$

znajdziemy korzystając z równań (11.33)3 i (11.41). Będzie wtedy:

$$y = x - z' = \frac{1}{2}\left(z'' - z' + 2z\right)$$

A w konsekwencji

$$y = C_1 - \frac{C_2 + \sqrt{3}C_3}{2}\cos\sqrt{3}t + \frac{\sqrt{3}C_2 - C_3}{2}\sin\sqrt{3}t \qquad (11.43)$$

Rozwiązanie 2 –wykorzystanie całek pierwszych

Zapiszmy układ równań (11.33) w postaci stosunków

$$\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y} = dt \qquad (11.44)$$

Dodając w równości (11.44) liczniki i mianowniki otrzymamy

$$dt = \frac{dx + dy + dz}{0}$$

A stąd

$$dx + dy + dz = 0$$

i w konsekwencji całka pierwsza

$$x + y + z = C_1 \qquad (11.45)$$

Pomnóżmy teraz w równości (11.44) liczniki i mianowniki przez x, y, z i dodajmy je do siebie. Otrzymamy

$$dt = \frac{xdx + ydy + zdz}{0}$$

A stąd

$$xdx + ydy + zdz = 0$$

I w konsekwencji całka pierwsza

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2 \qquad (11.46)$$

Układ całek pierwotnych (11.45) i (11.46) daje rozwiązanie . Widać, że całki równania (11.33) tworzą pewną dwuparametrowa rodzinę okręgów.

Rozwiązanie 3

Układ równań różniczkowych (11.33) za układ równań liniowych jednorodnych o stałych współczynnikach.

Rozwiązania poszukujemy w postaci:

$$x = \alpha e^{\lambda t}, \quad y = \beta e^{\lambda t}, \quad z = \gamma e^{\lambda t} \tag{11.47}$$

Po zróżniczkowaniu i wstawieniu do układu równań (11.33) otrzymamy układ jednorodnych równań liniowych

$$\begin{aligned} \lambda\alpha - \beta + \gamma &= 0 \\ \alpha - \lambda\beta - \gamma &= 0 \\ -\alpha + \beta - \lambda\gamma &= 0 \end{aligned} \tag{11.48}$$

O rozwiązaniach niezerowych wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda\left(\lambda + j\sqrt{3}\right)\left(\lambda - j\sqrt{3}\right) = 0$$

A więc

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -j\sqrt{3}, \quad \lambda_3 = j\sqrt{3} \tag{11.49}$$

Z układu (11.48) można wyliczyć, że

$$\left.\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1+\lambda_k}{1-\lambda_k}\gamma_k = \mu_k\gamma_k \\ \beta_k &= \frac{1-\lambda_k}{1+\lambda_k}\gamma_k = \frac{1}{\mu_k}\gamma_k \end{aligned}\right\} \quad (k = 1, 2, 3) \tag{11.50}$$

A stąd

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 1 = \frac{1}{\mu_1} \\ \mu_2 &= 1 - j\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\mu_3} \\ \mu_3 &= 1 + j\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\mu_2} \end{aligned} \tag{11.51}$$

Wobec tego całki w postaci zespolonej przybiorą postać

$$\begin{aligned} x &= \gamma_1 + \left(1 - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\gamma_2 e^{-j\sqrt{3}t} + \left(1 + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\gamma_3 e^{j\sqrt{3}t} \\ y &= \gamma_1 + \left(1 + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\gamma_2 e^{-j\sqrt{3}t} + \left(1 - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\gamma_3 e^{j\sqrt{3}t} \\ x &= \gamma_1 + \gamma_2 e^{-j\sqrt{3}t} + \gamma_3 e^{j\sqrt{3}t} \end{aligned} \tag{11.52}$$

Jeżeliby przyjąć

$$\gamma_1 = C_1, \quad \gamma_2 = \frac{C_2 - j\sqrt{3}}{2}, \quad \gamma_3 = \frac{C_3 + j\sqrt{3}}{2} \tag{11.53}$$

To równości (11.52) utożsamiają się z równościami (11.38), (11.42), (11.43) z rozwiązania 1.

……………………………………………………………………………………………………

11.4 Klasyfikacja liniowych równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu z dwiema zmiennymi niezależnymi.

Równanie liniowe drugiego rzędu z dwiema zmiennymi niezależnym ma postać

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_2\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f \tag{11.54}$$

gdzie $u(x, y)$ jest szukaną funkcją dwu zmiennych, zaś współczynniki $a_{11}, ..., c$ i funkcja f są funkcjami tych samych zmiennych w pewnym obszarze. Zazwyczaj zakładamy ciągłość tych funkcji, niekiedy ich różniczkowalność, a nawet przynależność do klasy C_1 ; bywa, że żądamy od współczynników nawet analityczności.

Rozwiązanie równania (11.54) jest zazwyczaj klasy C_2 .

Badania Leonarda Eulera wykazały, że ta najogólniejsza postać równania liniowego może być uproszczona dzięki wprowadzeniu ma miejsce zmiennych x, y odpowiednio wiąząvyvh się z nimi nowych zmiennych ξ i η . Wtedy w równaniu (11.54) suma wyrazów drugiego rzędu:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} \tag{11.55}$$

Przybiera względem nowych zmiennych jedną z z czterech postaci, które nazywamy postaciami kanonicznymi, a mianowicie:

$$u_{\xi\eta}, u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}, u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta}, u_{\eta\eta} \tag{11.56}$$

Przy czym dalsza część równania, zawierajaca wyrazy rzędu nie wyższego niż pierwszy, pozostaje nadal liniowa względem funkcji u_ξ, u_η, u .

Azeby wykazać i jednocześnie pokazać metodę sprowadzania równania (11.54) do postaci kanonicznej, wprowadzamy nowe zmienne ξ, η zależne od starych zmiennych x i y

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \tag{11.57}$$

Funkcje wiążące stare zmienne z nowymi spełniają warunki:

1. $\xi = \xi(x, y)$ i $\eta = \eta(x, y)$ są klasy C_2

2. Odpowiedniość między zmiennymi x i y i nowymi zmiennymi ξ *i* η jest lokalnie wzajemnie jednoznaczna (a więc odwracalna). Jak wiadomo, na to wystarczy, by ciągły jakobian przekształcenia (11.57) w każdym punkcie obszaru był rózny od zera:

$$J = \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0 \tag{11.58}$$

Przekształcenie (11.57) spełaniające powyższe dwa warunki nazywamy przekształceniem nieosobliwym. Poszukiwana fumkcja u może być teraz w zależności od zmiennych x i y zapisana za pośrednictwem zmiennych ξ *i* η jak następuje:

$$u\left[\xi(x,y),\eta(x,y)\right] \tag{11.59}$$

Zajmiemy się obecnie przedstawieniem pochodnych niewiadomej funkcji u, występujących w równaniu (11.54), w zależności od pochodnych tej funkcji względem zmiennych ξ,η :

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \\ u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \end{aligned} \tag{11.60}$$

Oraz

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx} \\ u_{xy} &= u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy} \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy} \end{aligned} \tag{11.61}$$

Wstawmy obecnie pochodne nowych zmiennych (11.60) i (11.61) do równania (11.54) na miejsce odpowiednich funkcji. Otrzymamy wtedy, po uporządkowaniu, równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu liniowe z niewiadomą funkcją nowych zmiennych

$$a_{11}' u_{\xi\xi} + 2a_{12}' u_{\xi\eta} + a_{22}' u_{\eta\eta} + b_1' u_\xi + b_2' u_\eta + c' u = f' \tag{11.62}$$

Gdzie nowe współczynniki (odróżnione od starych znakiem prim) wyrażają się za pomocą starych współczynników jak następuje:

$$\left.\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 \\ a'_{12} &= a_{11}\xi_x\xi_y + 2a_{12}\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + a_{22}\xi_y\eta_x \\ a'_{22} &= a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2 \end{aligned}\right\} \tag{11.63}$$

$$\left.\begin{aligned} b_1' &= a_{11}\xi_{xx} + 2a_{12}\xi_{xy} + a_{22}\xi_{yy} + b_1\xi_x + b_2\xi_y \\ b_2' &= a_{11}\eta_{xx} + 2a_{12}\eta + a_{22}\eta_{yy} + b_1\eta_x + b_2\eta_y \end{aligned}\right\} \tag{11.64}$$

$$\left.\begin{aligned} c' &= c \\ f' &= f \end{aligned}\right\} \tag{11.65}$$

Przy czym po prawej stronie równości (11.63), (11.64), (11.65) przed ich podstawieniem w równaniu (11.62) należy zmienne x ,y zastąpić odpowiednimi funkcjami zmiennych ξ, η tworzącymi układ odwrotny względem wprowadzonego układu (11.59) tj.:

$$x = x(\xi,\eta), \quad y = y(\xi,\eta) \tag{11.66}$$

Np. $c' = c\left[x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\right]$.

Można udowodnić dwa twierdzenia:

Twierdzenie 1

Nie istnieje niezależny liniowo taki układ funkcji (11.57), że

$$\left|a_{11}'\right| + \left|a_{12}'\right| + \left|a_{22}'\right| = 0$$

chyba, że wszystkie współczynniki w części drugiego rzędu (11.55) równania (11.54) są równe zeru; wtedy jednak równanie (11.54) wbrew założeniu, nie jest równaniem drugiego rzędu. Twierdzenie to mówi więc, że rząd równania jest niezmiennikiem przekształceń nieosobliwych.

Twierdzenie 2

Przy oznaczeniach

$$\delta = a_{11}a_{22} - \left(a_{12}\right)^2, \quad \delta' = a_{11}' a_{22}' - \left(a_{12}'\right)^2 \tag{11.67}$$

Oraz przy oznaczeniu (11.68) *pomiędzy współczynnikami równania (11.54), (11.62) i pochodnymi funkcji* (11.57) *zachodzi następujący związek*

$$\delta' = J^2\delta \tag{11.68}$$

…………………………………………………………………………………………………..

Wróćmy teraz do przekształceń (11.57). Dobierzmy je tak, aby jak najwięcej współczynników w części drugiego rzędu równania (11.62) poznikało. Zacznijmy od żądania, by

$$a_{11}' = 0 \tag{11.69}$$

Jest ono równoważne warunkowi, by funkcja $\xi(x, y)$ spełniała równanie różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu

$$a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = 0 \tag{11.70}$$

Równanie to sprowadzimy do równania różniczkowego zwyczajnego sposobem niżej opisanym.
Wiadomo, że jeżeli funkcja uwikłana

$$\xi(x, y) = C \tag{11.71}$$

Daje się rozwikłać względem zmiennej niezależnej x (a jest tak, gdy $\xi_y \neq 0$), to pochodna funkcji $y(x)$ będącej jednoznaczną gałęzią funkcji (11.71) wyraża się

$$y'(x) = -\frac{\xi_x}{\xi_y} \tag{11.72}$$

Dzieląc równanie (11.70) przez $\xi_y^2 \neq 0$ otrzymamy

$$a_{11}\left(-\frac{\xi_x}{\xi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\xi_x}{\xi_y}\right) + a_{22} = 0 \tag{11.73}$$

I korzystając z pochodnej (11.72) otrzymamy równanie różniczkowe zwyczajne

$$a_{11}(y')^2 - 2a_{12}y' + a_{22} = 0 \tag{11.74}$$

Zwane równaniem charakterystycznym lub równaniem charakterystyk. Jest ono w tym sensie równoważne równaniu (11.70), że jeżeli rozwiązanie równania (11.74) zapiszemy w postaci uwikłanej

$$\varphi(x, y) = C \tag{11.75}$$

To rozwiązaniem równania (11.70) jest wtedy

$$\xi = \varphi(x, y) \tag{11.76}$$

i odwrotnie.

11.4.1 Kanoniczna postać równań różniczkowych liniowych drugiego rzędu.

Równanie charakterystyczne (11.74) jest pierwszego rzędu i drugiego stopnia. Można je rozwiązać zauważając, że ma ono postać trójmianu kwadratowego z niewiadomą y' .

Otrzymaliśmy więc przyjmując oznaczenie wyróżnika zgodnie z oznaczeniami (11.67), dwa równania:

$$y' = \frac{a_{12} \pm \sqrt{-\delta}}{a_{11}} \tag{11.77}$$

Zauważymy, że zachodzą tu trzy przypadki:

1. Przypadek gdy $\delta < 0$.

Wtedy prawe strony równań (11.77) są rzeczywiste i różne. Oznaczając całki tych równań w postaci uwikłanej

$$\varphi_1(x, y) = C_1, \quad \varphi_2(x, y) = C_2 \tag{11.78}$$

Otrzymamy dwa odwracalne rozwiązania równania (11.70). Ze względu na to, że współczynniki $a_{11}^{'}\ i\ a_{22}^{'}$ różnią się od siebie występującymi w nich funkcjami tj. w pierwszym występuje ξ , zaś w drugim η , więc kładąc

$$\xi = \varphi_1(x, y), \quad \eta = \varphi_2(x, y) \tag{11.79}$$

Otrzymujemy jednocześnie $a_{11}^{'} = 0\ i\ a_{22}^{'} = 0$. Można wykazać rachunkiem (lub też korzystając z twierdzenia 1) , że przy przekształceniu (11.79) musi być $a_{12}^{'} \neq 0$.

W tym przypadku, po podzieleniu równania (11.62) przez $a_{12}^{'}$ otrzymujemy postać kanoniczną równania:

$$u_{\xi\eta} + au_{\xi} + bu_{\eta} + cu = f \tag{11.80}$$

gdzie a,b,c,f – są to wiadome funkcje zmiennych $\xi\ i\ \eta$.

Równanie, które da się nieosobliwą transformacją rzeczywistą sprowadzić do postaci (11.80), nazywa się równaniem hiperbolicznym zaś obie jednoparametrowe rodziny linii (11.78) jego rzeczywistymi charakterystykami.

2. Przypadek gdy $\delta > 0$.

Wtedy prawe strony równań (11.77) są zespolone i różne. Istnioeje twierdzenie, które mówi, ze jeżeli współczynniki tych równań $a_{11}, a_{22}, i\ a_{12}$ są analityczne, to obie całki tych równań, napisane w postaci uwikłanej

$$\varphi_1(x, y) = C_1, \quad \varphi_2(x, y) = C_2 \tag{11.81}$$

są zespolone i ze sobą sprzężone, tzn., że

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= \alpha(x, y) + j\beta(x, y) \\ \varphi_2(x, y) &= \alpha(x, y) - j\beta(x, y) \end{aligned} \tag{11.82}$$

Postępując tak, jak w przypadku równania hiperbolicznego, tzn. kładąc nowe zmienne $\xi\ i\ \eta$ zgodnie z oznaczeniem (11.79) otrzymamy równanie o postaci równania (11.80) z tym, że współczynniki a,b,c i funkcja f nie wszystkie są rzeczywiste (dlatego nie uważamy takiej postaci za kanoniczną).

Połóżmy nowe zmienne wyrażone związkami:

$$\alpha = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = re\,\varphi_1(x, y), \quad \beta = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2j} = im\,\varphi_1(x, y) \tag{11.83}$$

Wprowadzenie nowych zmiennych α, β pozwala wzorami analogicznymi do (11.63) obliczyć współczynniki równania, które oznaczymy przez $\dot{a}_{11}, \dot{a}_{12}, \dot{a}_{22}$

$$\begin{aligned} \dot{a}_{11} &= a_{11}\alpha_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha_y^2 \\ \dot{a}_{12} &= a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}\left(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x\right) + a_{22}\alpha_y\beta_x \\ \dot{a}_{22} &= a_{11}\beta_x^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}\beta_y^2 \end{aligned} \tag{11.84}$$

Wykażemy wtedy, że

$$\dot{a}_{11} = \dot{a}_{22} \neq 0, \quad \dot{a}_{12} = 0 \tag{11.85}$$

Wiemy, że $\varphi_1 = \alpha + j\beta$ i spełnia równanie (11.70), tzn., że

$$a_{11}\left[(\alpha + j\beta)_x\right]^2 + 2a_{12}(\alpha + j\beta)_x(\alpha + j\beta)_y + a_{22}\left[(\alpha + j\beta)_y\right]^2 = 0 \tag{11.86}$$

Wykonajmy różniczkowanie i działania algebraiczne, a następnie uporządkujmy powyższe równanie

$$\begin{aligned} &\left[a_{11}\alpha_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha_y^2\right] + \\ &+2j\left[a_{11}\alpha_x\beta_y + a_{12}\left(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x\right) + a_{22}\alpha_y\beta_x\right] + \\ &+\left[a_{11}\beta_x^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}\beta_y^2\right] = \\ &(\dot{a}_{11} - \dot{a}_{22}) + 2j\dot{a}_{12} = 0 \end{aligned}$$

To, że $\dot{a}_{11} \neq 0$ wynika z niezmienności rzędu równania różniczkowego. Rozpatrywane równanie różniczkowe ma wiec postać następującą:

$$\dot{a}_{11}u_{\alpha\alpha} + \dot{a}_{11}u_{\beta\beta} + \dot{b}u_\alpha + \dot{b}u_\beta + \dot{c}u = \dot{f} \tag{11.87}$$

Dzieląc je teraz obustronnie przez $\dot{a}_{11}$ otrzymujemy postać kanoniczną

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} + au_\alpha + bu_\beta + cu = f \tag{11.88}$$

Gdzie a,b,c,f są to pewne funkcje rzeczywiste zmiennych α *i* β .

Równanie, które da się nieosobliwą rzeczywistą transformację sprowadzić do postaci (11.88) nazywa się równaniem eliptycznym, zaś obie jednoparametrowe rodziny linii (11.81)

$$\begin{aligned} \alpha(x,y)+j\beta(x,y)&=C_1 \\ \alpha(x,y)-j\beta(x,y)&=C_2 \end{aligned} \tag{11.89}$$

Nazywają się rodzinami urojonych charakterystyk.

3. Przypadek gdy $\delta = 0$

Wtedy równania (11.77) są identyczne; ich rozwiązanie zapiszemy w postaci uwikłanej

$$\varphi(x,y)=C \tag{11.90}$$

Kładąc $\xi=\varphi(x,y)$ mamy zapewnione $a_{11}^{'}=0$ natomiast nie otrzymaliśmy z równań (11.77) drugiej rodziny funkcji, liniowo niezależnych od funkcji (11.90) pozwalającej na wprowadzenie takiej nowej zmiennej η , aby było $a_{22}^{'}=0$.

Udowodnimy, że przyjmując jako η dowolną funkcję dwu zmiennych niezależną liniowo do $\varphi(x,y)$ otrzymamy $a_{12}^{'}=0, a_{22}^{'}\neq 0$.

Zauważymy, iż z warunku

$$\delta = a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$$

Wynika, że prawa strona równości (11.63), określającej $a_{11}^{'}$, jest pełnym kwadratem wyrażenia:

$$a_{11}^{'}=a_{11}(\xi_x)^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}(\xi_y)^2=\varepsilon\left[\sqrt{|a_{11}|}\xi_x+\varepsilon\sqrt{|a_{22}|}\xi_y\right]^2=0 \tag{11.91}$$

gdzie $\varepsilon=\pm 1$, w zależności od tego, czy a_{12} jest dodatnie (wtedy $\varepsilon=+1$),, czy przeciwnie.

Gdy $a_{12}=0$, to wobec $\delta=0$ również $a_{11}a_{22}=0$ i równanie już miałoby postać kanoniczną.

Połóżmy

$$\eta=g(x,y) \tag{11.92}$$

gdzie g jest dowolną funkcją spełniającą warunek

$$J=\frac{\partial(\varphi,g)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\varphi_x & \varphi_y \\ g_x & g_y\end{vmatrix}\neq 0 \tag{11.93}$$

wtedy

$$\begin{aligned} a_{12}^{'}&=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+a_{22}\xi_y\eta_x= \\ &=\varepsilon\left[\sqrt{|a_{11}|}\xi_x+\varepsilon\sqrt{|a_{22}|}\xi_y\right]\left[\sqrt{|a_{11}|}\eta_x+\varepsilon\sqrt{|a_{22}|}\eta_y\right] \end{aligned} \tag{11.94}$$

Z równości (11.91) wynika, że pierwszy czynnik po prawej stronie równości (11.94) jest zerem, więc niezależnie od przyjętej funkcji η

$$a_{12}^{'}=0 \tag{11.95}$$

Teza będzie udowodniona, gdy wykażemy jeszcze, że $a_{22}^{'}\neq 0$. Otóż

$$a_{22}^{'}=a_{11}\left(\eta_x\right)^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\left(\eta_y\right)^2=\varepsilon\left[\sqrt{|a_{11}|}\eta_x+\varepsilon\sqrt{|a_{22}|}\eta_y\right]^2 \tag{11.96}$$

Gdyby przypuścić, że $a_{22}^{'}=0$ ton równania (11.91) i (11.96) dałyby

$$\begin{vmatrix}\xi_x & \xi_y\\ \eta_x & \eta_y\end{vmatrix}=0 \tag{11.97}$$

a przecież jakobian $\dfrac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}$ z założenia (11.93) jest różny od zera.

Dzieląc teraz równanie, w którym wprowadziliśmy nowe zmienne, przez $a_{22}^{'}\neq 0$ otrzymamy postać kanoniczną równania

$$u_{\eta\eta}+au_{\xi}+bu_{\eta}+cu=f \tag{11.98}$$

gdzie a,b,c,f są to pewne funkcje zmiennych ξ i η .

Równanie, które da się sprowadzić nieosobliwą transformacją do postaci (11.98) nosi nazwę równania parabolicznego, zaś jednoparametrowa rodzina funkcji (11.90) nosi nazwę rodziny charakterystyk. Zanim zbierzemy otrzymane wyniki w jedno twierdzenie zauważymy, że wyróżnik (11.67) jest funkcją punktu (x,y) .

$$\delta(x,y)=a_{11}(x,y)a_{22}(x,y)-a_{12}^2(x,y) \tag{11.99}$$

Wobec czego jest sens mówić o „typie równania w punkcje". Jeżeli znak wyróżnika $\delta(x,y)$ jest w pewnym zbiorze D stały, to można mówić o „typie równania w zbiorze". Ze względu na ciągłość wyróżnika zbiór D jest na ogół obszarem lub linią, (linią jest tylko w przypadku równania parabolicznego). Bywa, że typ równania jest stały na całej płaszczyźnie kartezjańskiej (x,y). Zachodzi to wtedy, gdy współczynniki a_{11},a_{12},a_{22} są stałe (ale nie tylko wtedy). Zasługuje na uwagę fakt, że gdy współczynniki są stałe to rozwiązanie równania charakterystycznego (11.74) są liniami prostymi (rzeczywistymi lub urojonymi). Na przykładzie równania Tricomiego

$$y\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0 \tag{11.100}$$

Można zauważyć, ze typ równania może się zmieniać w zależności od obszaru. Mianowicie równanie (11.100) jest w dolne płaszczyźnie (y<0) hiperboliczne, w górnej (y>0) – eliptyczne

, zaś w zbiorze złożonym z punktów osi x (y=0) – paraboliczne. Możemy teraz wyłowić twierdzenie:

Twierdzenie

Równanie różniczkowe cząstkowe

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f \tag{11.101}$$

o rzeczywistych i ciągłych współczynnikach, z których nie wszystkie stojące przy pochodnych drugiego rzędu są jednocześnie zerami, jest hiperboliczne, paraboliczne lub eliptyczne, gdy wyróżnik równania

$$\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \tag{11.102}$$

jest odpowiednio ujemny, równy zeru, dodatni.