

## 9. MODELE REOLOGICZNE GRUNTÓW I SKAŁ *Monika Bartlewska*

### 9.1. Modele reologiczne

W poprzednim rozdziale przyjęliśmy założenie, że szkielet gruntowy jest ciałem nieodkształcalnym, a jeżeli dopuszczamy jakieś odkształcenia fazy stałej, to są to tylko zmiany objętościowe. Dla całego ośrodka uważa się, że odkształcenie polega na zmianie porowatości ośrodka, która zależy od ściśliwości szkieletu gruntowego i cieczy lub gazu wypełniającego jego pory.

W odniesieniu do szkieletu gruntowego lub skały litej można stosować jednakże różne modele reologiczne. Istnieje nieskończenie wiele teoretycznie poprawnych modeli opisujących właściwości mechaniczne ośrodków sprężystych, lepko-sprężystych czy też sprężysto-lepko-plastycznych. O tym, którego z tych modeli należy użyć do opisu właściwości interesującego nas materiału, decydują wyniki badań laboratoryjnych w połączeniu z możliwością właściwej i w miarę dokładnej interpretacji tych wyników przez wybrany model reologiczny. W większości wypadków zdarza się tak, że im bardziej skomplikowany jest model teoretyczny ośrodka, tym lepiej za jego pomocą można opisać wyniki doświadczeń, lecz ze względu na swoją skomplikowaną naturę model taki mniej się nadaje do konkretnych obliczeń prognostycznych.

Jeżeli szkielet ośrodka traktuje się jako jednorodne ciało jednofazowe, to proces naprężenie-odkształcenie opisywany jest najczęściej równaniem konstytutywnym ciała Boltzmanna – [Fung, 1969]. Najogólniejszym prawem wiążącym odkształcenia i naprężenia w teorii lepko-sprężystości ośrodków jednorodnych i izotropowych są dwa związki:

$$\begin{aligned} \vartheta_{ij} &= J(O)\tau_{ij}(t) + \int_0^t \tau_{ij}(t-\eta) \frac{\partial J(\eta)}{\partial \eta} d\eta, \\ \gamma_o &= I(O)\sigma_o(t) + \int_0^t \sigma_o(t-\eta) \frac{\partial I(\eta)}{\partial \eta} d\eta. \end{aligned} \quad (0.1)$$

Funkcja pełzania odkształceń postaciowych  $J(t)$  i funkcja pełzania odkształceń objętościowych  $I(t)$ , użyte w powyższych wzorach, jednoznacznie definiują cechy reologiczne przyjętego modelu ośrodka. Dewiator naprężenia  $\tau_{ij}$  i naprężenie średnie  $\sigma_m$  tworzą tensor naprężenia Cauchy'ego :

$\sigma_{ij} = \tau_{ij} + \sigma_m \delta_{ij}$ , a dewiator odkształcenia  $\vartheta_{ij}$  i odkształcenie średnie  $\gamma_o$  pozwalają uzyskać tensor infinyzimalnego odkształcenia  $e_{ij} = \vartheta_{ij} + \gamma_o \delta_{ij}$ . W wyrażeniach tych użyto delty Kronecker'a  $\delta_{ij}$ .

W najprostszych modelach "strukturalnych" zakładano, że prawo objętości jest sprężyste, a więc  $I(t)=3K_o$ , gdzie  $K_o$  jest modułem ściśliwości objętościowej. Funkcje pełzania odkształceń postaciowych dla najprostszych modeli reologicznych, których reprezentacje mechaniczne można utworzyć z tłumików i sprężyn wg Bauera i innych [1978], mają postać:

ciecz Newtona:	$J(t) = \frac{t}{2\eta},$
ciecz Maxwella:	$J(t) = 2G(1 + \frac{t}{T}),$
ciało Voighta:	$J(t) = 2G[1 - e^{-\frac{t}{T}}],$
ciało Zenera:	$J(t) = 2G_1[1 - (1 - \frac{T_2}{T_1})e^{-\frac{t}{T_1}}],$

gdzie:

$$T = \frac{\eta}{G}, \quad T_1 = \frac{\eta[K_0 + \frac{4}{3}G_1 + \frac{4}{3}G_2]}{G_1(K_0 + \frac{4}{3}G_2)},$$
$$T_2 = \frac{\eta}{G_1},$$

przy czym:  $G$ ,  $G_1$ ,  $G_2$  są to moduły odkształcenia poprzecznego,  
 $\eta$  - jest współczynnikiem lepkości postaciowej.

Jak widać, nawet proste modele reologiczne mają postać skomplikowaną. W procesie wyboru reologicznego równania stanu dla rozpatrywanego materiału do głosu dochodzi kompromis między dobrym dopasowaniem się do opisywanej rzeczywistości w skali makroskopowej a prostotą modelu. Dlatego należy zwrócić szczególną uwagę na model ciała sprężystego. Przytłaczająca większość praktycznie używanych modeli reologicznych posiada opis cechy sprężystości i po odpowiednich przejściach granicznych, czyli po wyeliminowaniu opisu innych własności, sprowadza je do modelu Hooke'a - ciała idealnie sprężystego.

Działem mechaniki, gdzie powyższe modele znalazły istotne zastosowania, jest mechanika gruntów i skał. Opis reologii gruntów i skał czytelnik znajdzie w pracach Kisiela [Kisiela, 1977], [Kisiela i innych, 1976], [Dembickiego, 1970, 1981b]. W pracach tych pokazano, że oprócz prób przedstawienia zachowania się gruntu lub skały w postaci modelu reologicznego ciała ciągłego istniały próby przedstawienia modelu opisującego zachowanie się takiego ośrodka z uwzględnieniem własności fazy stałej i ciekłej lub gazowej w skali porów. W naszych dalszych rozważaniach zajmiemy się tego typu związkami fizycznymi dla opisu pełniejszego oddziaływania przepływu filtracyjnego na odkształcenia ośrodka dwufazowego złożonego ze sprężystego szkieletu i słabo ściśliwej cieczy. Równania tego modelu zostały podane po raz pierwszy przez Biota, Willisa w 1927 [Biot, Willis, 1927], a następnie uszczegółowione przez Biota [Biot, 1935, 1941a, 1941b, 1954], a następnie wyprowadzone z podstawowych praw termodynamiki procesów nieodwracalnych przy uwzględnieniu twierdzenia Onsagera w 1956 [De Groot, Mazur, 1965].

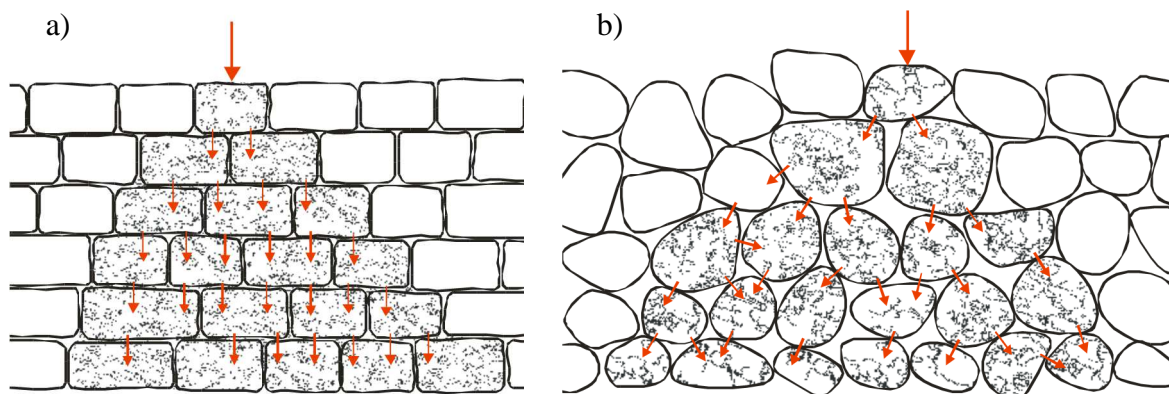
Dotychczas rozważany model ciała porosprężystego Biota-Darcy'ego charakteryzuje się występowaniem dwóch rodzajów odkształceń ciała:

- odkształcenia sprężystego, natychmiastowego, związanego z cechą sprężystości fazy stałej i zgodnie z prawem Hooke'a;
- odkształcenia struktury porowatej szkieletu sprężystego, wynikającego z przepływu płynu przez pory ośrodka mającego charakter pełzania.

Przyjęcie budowy modelu składającego się z nieściśliwej cieczy przepływającej przez nieodkształcalną strukturę ciała stałego stanowi uproszczenie rzeczywistości, głównie ze względu na brak wyznaczonej granicy stosowalności prawa sprężystości, ale także z uwagi na złożoność struktury ciała stałego. W rzeczywistości mamy do czynienia z ośrodkiem rozdrobnionym, w którym stopień konsolidacji, w dużym stopniu opisuje strukturę materiału. Szkielet gruntowy składa się z ziaren, które stykając się ze sobą tworzą określoną strukturę (uporządkowanie ziaren i cząstek), i tak podczas gdy w przypadku gruntów niespoistych (pospółek, żwirów, piasków) można mówić o bezpośrednim charakterze kontaktu cząsteczka – cząsteczka lub ziarno – ziarno, to w gruntach spoistych na styku ciało stałe – ciało stałe występuje najczęściej ciecz związana siłami elektrycznymi z powierzchnią graniczną cząstek.

W ten sposób część cząstek ma kontakt ze sobą za pośrednictwem wody błonkowej związanej z powierzchnią graniczną cząstek. Opisana struktura poddawana działaniu parcia cieczy oraz sił objętościowych (wynikających z grawitacji) oraz pola elektrycznego będzie przekazywała sobie wyżej wymienione siły poprzez styki.

Próby tworzenia modeli matematycznych opartych na założeniu, że faza stała nie jest ośrodkiem ciągłym rozpoczęły się od powstania idei traktowania ośrodka rozdrobionego jako ośrodka niespoistego będącego statycznym układem liniowo-odkształcalnych elementów o dowolnym kształcie nie powiązanych ze sobą, lecz wspartych o siebie w taki sposób, że pomiędzy nimi występują w stykach nie tylko siły tarcia ale również siły spójności wynikające ze zlepiania niektórych ziaren, (Litwiniszyn 1953a, b, 1953b, 1955, 1966a, b, Kandaurov 1966), wzajemnego położenia ziaren względem siebie, a także ciśnienia wody w porach. Zatem siły przyłożone do takiego ośrodka przekazyują się do wnętrza poprzez styki poszczególnych ziaren. Kisiel (1966) zauważył, że w zależności od tego czy ośrodek jest utworzony ze wspartych o siebie bloków, czy też z ziaren kształtem zbliżonym do kul także rozkład ciśnień będzie różny, co przedstawiono schematycznie na Rysunek **Błąd! W dokumencie nie ma tekstu o podanym stylu.-1.**



Rysunek **Błąd! W dokumencie nie ma tekstu o podanym stylu.-1.** Ośrodek rozdrobiony wg. Kisiela (1982)

a) bezporowy, b) rozporowy.

Przy budowie blokowej mamy do czynienia z ośrodkiem bezporowym (brak parcia bocznego między elementami). W drugim przypadku mamy do czynienia z przekazywaniem sił odchylonych od pionu. Cytując Strzeleckiego (2008): „*Mimo dyskusyjności niektórych założeń, prace te stanowią punkt wyjścia do budowy modeli reologicznych gruntu, obejmujących zarówno obszar określany stanem sprężystym lub lepko-sprężystym gruntu, traktowanych jako ciało liniowo-odkształcalne jak i obszar określany stanem granicznym ośrodka niespoistego*”.

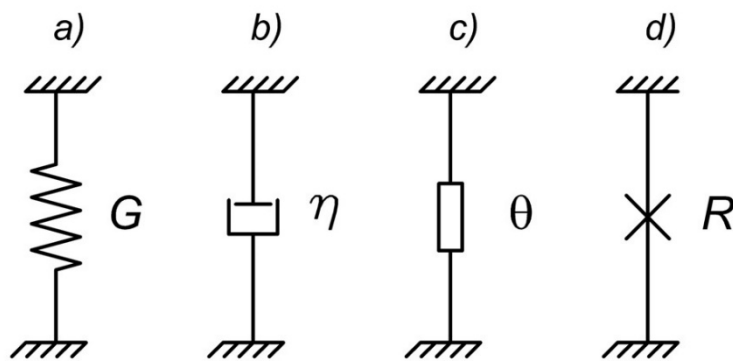
### **Modele reologiczne**

Przedstawione powyżej modele porowate mają zastosowanie w mechanice gruntów i skał i są oparte na założeniu cech liniowo – sprężystych szkieletu gruntowego. Założenie obejmowało również odkształcalność ośrodka gruntowego interpretowaną jako efekt przepływu cieczy lepkiej przez pory opisywanego ośrodka powodując odkształcenie ośrodka porowatego jako funkcji czasu. Zostało to nazwane efektem konsolidacji ośrodka porowatego. Wielu badaczy,

## GEOTECHNIKA KIERUNEK GEODEZJA I KARTOGRAFIA

w tym Kisiel, Dmitruk i Lysik (1969) oraz Bauer i inni (1981) ma odmienne zadanie uważając, że można traktować grunt jako ciało jednofazowe zakładając dla niego model reologiczny – ciało Boltzmana a efekty odkształceń tego ciała odwzorować jako efekty pełzania.

W pracy Bauera, Strzeleckiego i Szcześniak (1981) przedstawiono wyniki badań próby podsumowania, które z modeli reologicznych najlepiej wpisują się w wyniki badań doświadczalnych pełzania próbki edometrycznej gruntu spoistego. Szczegółowo analizę modeli reologicznymi gruntu traktowanego jako ciało jednofazowe przedstawił Kisiel w pracach (Kisiel *i in.*, 1969, Kisiel *i In.*, 1982). Co istotne również w tych pracach można znaleźć koncepcję konsolidacji gruntu zgodną z modelem Terzagiego, gdy szkieletowi gruntowemu przypisujemy cechy reologiczne. Opis bardziej skomplikowanych modeli sprężysto – lepkoplastyczne szkieletu gruntowego proponuje Gryczmański (1983, 1995). Według Strzeleckiego (2008), przez modele reologiczne rozumiemy modele, których elementami są cztery podstawowe cechy fizyczne: sprężystość, lepkość, plastyczność oraz wytrzymałość. Cechy te symbolicznie w różnych modelach określa się za pomocą symboli przedstawionych na Rysunek **Błąd! W dokumencie nie ma tekstu o podanym stylu.**-2.



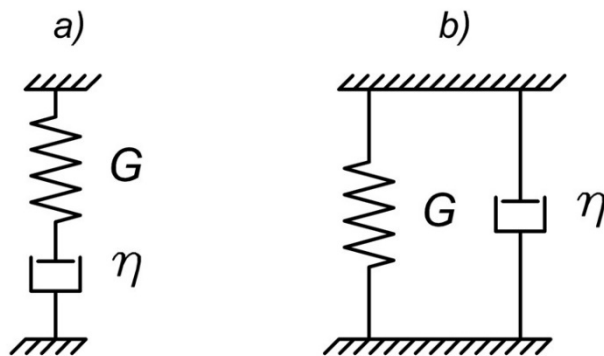
Rysunek **Błąd! W dokumencie nie ma tekstu o podanym stylu.**-2. Symbole w modelach reologicznych ciała stałego i cieczy a) sprężystość, b) lepkość, c) plastyczność d) wytrzymałość.

W ogólnym przypadku elementy modeli reologicznych można ze sobą łączyć na dwa sposoby:

- łączenie szeregowe, gdy elementy w schemacie następują po sobie;
- łączenie równoległe, gdy elementy w schemacie następują jeden obok drugiego.

Najprostsze modele reologiczne, przedstawione na Rysunek **Błąd! W dokumencie nie ma tekstu o podanym stylu.**-3 są dobrym przykładem takiego łączenia elementów:

- **ciecz Maxwella**, gdy element sprężysty jest połączony szeregowo z tłumikiem obrazującym element lepki;
- **ciało Kelvina-Voigta** gdy element sprężysty jest połączony równoległe z elementem lepkiem.



Rysunek **Błąd! W dokumencie nie ma tekstu o podanym stylu.**-3. Schemat cieczy

Maxwella oraz ciała Kelvina-Voigta.

Gdy wskaźnikiem  $S$  oznaczymy odkształcenia i naprężenia sprężyste, a wskaźnikiem  $L$  odkształcenia i naprężenia lepkie, w przypadku dwóch najprostszych modeli reologicznych możemy określić podstawowe reguły kinematyczne i dynamiczne rządzące odkształceniami i naprężeniami (Strzelecki, 2008).

**Ciecz Maxwella:**

$$\epsilon_{ij}^S + \epsilon_{ij}^L = \epsilon_{ij}$$

oraz

$$\sigma_{ij}^S = \sigma_{ij}^L = \sigma_{ij} .$$

Dla **ciała Kelvina-Voigta:**

$$\epsilon_{ij}^S = \epsilon_{ij}^L = \epsilon_{ij}$$

Oraz

$$\sigma_{ij}^S + \sigma_{ij}^L = \sigma_{ij}$$

**Błąd! W dokumencie nie ma tekstu o podanym stylu.-1**

## GEOTECHNIKA KIERUNEK GEODEZJA I KARTOGRAFIA

Odpowiednikiem elementu liniowego sprężystego modelu reologicznego odpowiada w ogólnym przypadku związek liniowy prawa Hooke'a:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

**Błąd! W dokumencie nie ma tekstu o podanym stylu.-2**

gdzie  $c_{ijkl}$  to tensor sprężystości, który zgodnie z rozważaniami w podrozdziale 2.1 dla przypadku ośrodka porowatego Biota można wyrazić za pomocą stałych N i M wzorem:

$$c_{ijkl} = A \delta_{ij} \delta_{kl} + N (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

Element lepki wyraża się w przypadku lepkiej cieczy newtonowskiej związkiem konstytutywnym:

$$\sigma_{ij} = \eta_{ijkl} \frac{d\varepsilon_{kl}}{dt}$$

**Błąd! W dokumencie nie ma tekstu o podanym stylu.-3**

W ogólnym przypadku pochodna względem czasu tensora naprężenia jest pochodną masową. Ponieważ jednak proces pełzania ośrodka reologicznego odbywa się z bardzo małymi prędkościami, można przyjąć, bez popełnienia większego błędu, że pochodna masowa jest równa w przybliżeniu pochodnej cząstkowej względem czasu  $t$ :

$$\frac{d}{dt} \cong \frac{\partial}{\partial t}$$

i związek konstytutywny (**Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania.**) można zapisać w postaci:

**GEOTECHNIKA  
KIERUNEK GEODEZJA I KARTOGRAFIA**

$$\sigma_{ij} = \eta_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}$$

**Błąd! W  
dokumencie  
nie ma  
tekstu o  
podanym  
stylu.-4**