

8. Model porospężystości Biota - Darcy'ego.

Tomasz Strzelecki Anna Uciechowska-Grakowicz

8.1 Założenia wstępne.

Zakładamy wstępnie, że ośrodek składa się z porowatego ciała stałego tworzącego w przestrzeni ośrodek ciągły. Formułując swoją teorię M.A. Biot przyjął, że spełnia ona następujące podstawowe założenia:

- ośrodek jest dwufazowy. Składa się ze sprężystego porowatego szkieletu oraz słabo ściśliwej cieczy newtonowskiej wypełniającej pory szkieletu;
- ośrodek porowaty jest ciałem jednorodnym, izotropowym;
- deformacje szkieletu są małe, więc można pominąć nieliniowe człony tensora odkształcenia ε_{ij} , więc:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad (9.1)$$

- naprężenia σ_{ij} w szkielecie ośrodka porowatego odnosić będziemy do całkowitej powierzchni przekroju VER, mimo że w rzeczywistości należałoby tę powierzchnię pomniejszyć o pole zajęte przez pory (naprężenie rozmyte). W odniesieniu do cieczy wprowadzimy pojęcie naprężenia porowego cieczy σ , związanego z ciśnieniem efektywnym cieczy związkiem:

$$\sigma = -fp, \quad (9.2)$$

gdzie f określa porowatość objętościową ośrodka porowatego. Jest ono również odniesione do całkowitej powierzchni przekroju VER;

- porowatość ośrodka f uważa się za wielkość stałą, która ma charakter statystyczny;
- do opisu procesów przyjmujemy układ odniesienia Eulera.

8.2. Równania ciągłości przepływu ośrodka dwufazowego.

Niech Ω jest prostopadłościenną przestrzenią o nieskończonej małych krawędziach dx , dy , dz wypełnioną ośrodkiem dwufazowym złożonym: z porowatego szkieletu sprężystego i cieczy wypełniającej jego pory. Określimy przez S powierzchnię ściany elementu przestrzennego Ω , a wektor \vec{n} jest jednostkowym wektorem normalnym do powierzchni S , skierowanym na zewnątrz elementu Ω . Przez \vec{v}^l i \vec{v}^s oznaczać będziemy odpowiednio wektory prędkości filtracji cieczy i szkieletu ośrodka, a $v_i^r = v_i^l - v_i^s$ określa składowe względnej prędkości przepływu filtracyjnego cieczy przez ośrodek porowaty. Jeżeli ρ_s i ρ_l oznaczają kolejno gęstość właściwą szkieletu i cieczy, to możemy określić wielkość gęstości szkieletu ρ_1 i cieczy ρ_2 , odniesione każda z nich do objętości całkowitej obszaru Ω . Oznaczając przez f porowatość objętościową, możemy obliczyć te gęstości: $\rho_1 = (1-f)\rho_s$ i $\rho_2 = f\rho_l$. Przez ρ oznaczać będziemy gęstość ośrodka dwufazowego równą, co do wartości sumie: $\rho = \rho_1 + \rho_2$. Wartość $\bar{\rho}$ oznaczać będzie gęstość cieczy przepływającej przez ścianę S : $\bar{\rho} = f_A \rho_l$, gdzie f_A oznacza porowatość powierzchniową.

Przepływ masy całkowitej (szkieletu i cieczy) przez ścianę o powierzchni S jest równy:

$$\int_S \rho v_i^s n_i dS + \int_S \bar{\rho} (v_i^l - v_i^s) n_i dS + \int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega = 0. \quad (9.3)$$

Stąd korzystając z twierdzenia Gaussa – Ostrogradzkiego równanie ciągłości przepływu ośrodka dwufazowego złożonego z cieczy i szkieletu ma postać:

$$\frac{D^s \rho}{D t} + \rho \dot{\varepsilon} = -[\rho v_i^r]_i, \quad (9.4)$$

gdzie $\frac{D^s}{D t}$ oznacza pochodną masową wyrażoną wzorem:

$$\frac{D^s}{D t} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i^s \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (9.5)$$

a $\dot{\varepsilon}$ oznacza prędkość zmiany dylatacji szkieletu równa co do wartości v_i^s .

Możemy następnie obliczyć przepływ cieczy przez powierzchnię S. Wyrazi się on wzorem:

$$\int_S \bar{\rho} v_i^s n_i dS + \int_S \bar{\rho} (v_i^l - v_i^s) n_i dS + \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega = 0. \quad (9.6)$$

Stąd dostajemy równanie ciągłości przepływu fazy ciekłej w postaci:

$$\frac{D^r \rho}{D t} + \bar{\rho} (\dot{\theta} - \dot{\varepsilon}) = -(\bar{\rho} v_i^l)_i, \quad (9.7)$$

gdzie $\frac{D^r}{D t}$ jest pochodną masową wyrażoną wzorem $\frac{D^r}{D t} = \frac{\partial}{\partial t} + (v_i^l - v_i^s) \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Zakładając, że faza stała jest nieruchoma ($v_i^s = 0$), a przez pory przesącza się ściśliwa ciecz, równanie ciągłości przepływu ma sens tylko w odniesieniu do fazy ciekłej ośrodka i sprowadza się do postaci:

$$\text{div}(\bar{\rho} \bar{v}) = -\frac{\partial(\bar{\rho})}{\partial t}. \quad (9.8)$$

Taką postać równania ciągłości uzyskaliśmy w poprzednim podrozdziale IV.2.4 – wzór **Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania.** dla modelu hydrodynamicznego przepływu filtracyjnego. Widać więc, że w przejściu granicznym dostajemy poprzednio wyprowadzone równania ciągłości przepływu.

8.3 Równania ruchu fazy stałej i ciekłej.

Aby uzyskać równania równowagi dla fazy stałej i ciekłej ośrodka dwufazowego, wprowadzimy dodatkowe definicje i założenia wprowadzone przez Biota [Biot, 1956a, 1956b]:

- energię kinetyczną ośrodka dwufazowego możemy wyrazić wzorem:

$$2K = \int_{\Omega} (\rho_{11} v_i^s v_i^s + 2\rho_{12} v_i^s v_i^l + \rho_{22} v_i^l v_i^l) d\Omega \quad (9.9)$$

z warunkami:

$$\rho_{11} + \rho_{12} = \rho_1 > 0; \quad \rho_{22} + \rho_{21} = \rho_2 > 0; \quad \rho_{12} < 0,$$

gdzie ρ_{12} jest nowym parametrem o wymiarze gęstości określającym dynamiczne sprzężenie pomiędzy dwoma fazami ośrodka;

- funkcja dyssypacji jest formą kwadratową zależną od prędkości względnej przepływu filtracyjnego, którą można wyrazić w następujący sposób:

$$2W_d = \int_{\Omega} b v_i^r v_i^r d\Omega, \quad (9.10)$$

gdzie b jest współczynnikiem oporu filtracyjnego spełniającym warunek $b > 0$;

- korzystając z równania (9.9) można określić objętościowe siły wewnętrzne wynikające z oporu lepkiego przepływającej cieczy przez pory ośrodka. Siły działające na szkielet ośrodka wynoszą:

$$M_i^s = \frac{\partial W_d}{\partial v_i^s} = - \int_{\Omega} b v_i^r d\Omega \quad (9.11)$$

i na ciecz

$$M_i^l = \frac{\partial W_d}{\partial v_i^l} = \int_{\Omega} b v_i^r d\Omega, \quad (9.12)$$

- składowe lokalnego wektora pędu szkieletu i cieczy można obliczyć ze wzoru:

$$P_i^s = \int_{\Omega} (\rho_{11} v_i^s + \rho_{12} v_i^l) d\Omega, \quad (9.13)$$

$$P_i^l = \int_{\Omega} (\rho_{12} v_i^s + \rho_{22} v_i^l) d\Omega. \quad (9.14)$$

Prawo zachowania pędu fazy stałej ośrodka można wyrazić wzorem:

$$\int_S \sigma_{ij} n_j dS + \int_{\Omega} b (v_i^l - v_i^s) d\Omega + \int_{\Omega} (\rho - \bar{\rho}) X_i d\Omega = \int_{\Omega} \frac{D^s P_i^s}{Dt} d\Omega, \quad (9.15)$$

gdzie $\sigma_{ij} n_j$ oznacza naprężenia w szkielecie działające na powierzchnię S , a przez X_i - siły ciężkości na jednostkę masy całkowitej.

Równanie (9.6), po wykorzystaniu twierdzenia Gaussa – Ostrogradzkiego, pozwala na uzyskanie lokalnego równania ruchu fazy stałej ośrodka w postaci:

$$\sigma_{ij,j} + X_i (\rho - \bar{\rho}) = -b v_i^r + \rho_{11} \frac{D^s v_i^s}{Dt} + \rho_{12} \frac{D^s v_i^l}{Dt}, \quad (9.16)$$

gdzie $\frac{D^s}{Dt}$ jest pochodną materialną wyrażoną wzorem: $\frac{D^s}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i^s \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Dla fazy ciekłej ośrodka prawo zachowania pędu sprowadza się do postaci:

$$\int_S \sigma n_i dS + \int_{\Omega} b (v_i^s - v_i^l) d\Omega + \int_{\Omega} \bar{\rho} X_i d\Omega = \int_{\Omega} \frac{D^l P_i^l}{Dt} d\Omega, \quad (9.17)$$

gdzie $\frac{D^l}{Dt}$ jest pochodną materialną wyrażoną wzorem: $\frac{D^l}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i^l \frac{\partial}{\partial x_i}$,

σn_j oznacza naprężenia w cieczy działające na całkowitą powierzchnię S. Naprężenie rozmyte w cieczy σ równa się co do wartości:

$$\sigma = -pf, \quad (9.18)$$

przy czym p oznacza ciśnienie efektywne w cieczy.

Równanie (9.17) po wykorzystaniu twierdzenia Gaussa - Ostrogradzkiego pozwala na uzyskanie równania ruchu fazy ciekłej ośrodka w postaci:

$$\sigma_{,i} + X_i \bar{\rho} = bv_i^r + \rho_{12} \frac{D^l v_i^s}{Dt} + \rho_{22} \frac{D^l v_i^l}{Dt}. \quad (9.19)$$

Dla przypadku przepływu quasi – statycznego można pominąć człony reprezentujące siły bezwładności cieczy i szkieletu i równania ruchu dla każdej z faz można zapisać w postaci:

$$\sigma_{ij,j} + X_i(\rho - \bar{\rho}) = -bv_i^r, \quad (9.20)$$

$$\sigma_{,i} + X_i \bar{\rho} = bv_i^r. \quad (9.21)$$

Sumaryczne równanie ruchu dla obydwu faz ma w tym przypadku postać:

$$\sigma_{ij,j} + \sigma_{,i} + X_i \rho = 0. \quad (9.22)$$

W przypadku, gdy szkielet ośrodka wykazuje się jedynie ściśliwością i jest w swojej masie nieodkształcalny, równanie (9.20) traci sens, gdyż szkielet jest nieruchomy i tensor naprężenia reprezentuje tylko część kulistą tensora, a równanie (9.21) sprowadza się do postaci równania przepływu filtracyjnego Darcy'ego **Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania.** w modelu hydrodynamicznym przepływu, które można zapisać w postaci:

$$v_i^l = -k \frac{\partial H}{\partial x_i}. \quad (9.23)$$

8.4 Związki konstytutywne ciała Biota.

Związki konstytutywne modelu Biota wyprowadzimy z termodynamiki procesów nieodwracalnych. Problem uzyskania związków konstytutywnych był tematem publikacji wielu publikacji, w tym między innymi Biota [Biot, 1956a], Strzeleckiego [Strzelecki, 1979, 2006], Derskiego [Derski, 1964a, 1964c, 1969b, 1975], Szefera [Szefer, 1980a, 1980b], Gaszyńskiego [Gaszyński, 1980], Coussy'ego [Coussy, 1995].

Skorzystajmy z pierwszego prawa termodynamiki, które możemy przedstawić w postaci:

$$\dot{L} + \dot{Q} = \frac{D}{Dt}(W + K), \quad (9.24)$$

gdzie: przez L określamy pracę wykonaną przez siły wewnętrzne, siły ciężkości i siły pochodzące od oporu lepkiego przepływającej cieczy; Q oznacza ciepło generowane podczas przepływu filtracyjnego i odkształceń szkieletu ośrodka porowatego; W oznacza energię wewnętrzną; K wyraża energię kinetyczną.

Zapiszemy oddzielnie pierwsze prawo termodynamiki procesów nieodwracalnych dla każdej z faz oddzielnie, przy czym będziemy używać wskaźnika 1 dla fazy stałej ośrodka i 2 dla fazy ciekłej.

Moc sił wewnętrznych szkieletu wyraża się wzorem:

$$\dot{L}_1^A = \int_S (\sigma_{ij} + \sigma\delta_{ij}) v_i^s n_j dS . \quad (9.25)$$

Moc sił ciężkości szkieletu ośrodka:

$$\dot{L}_1^P = \int_{\Omega} (\rho - \bar{\rho}) X_i v_i^s d\Omega . \quad (9.26)$$

Moc sił oporu lepkiego cieczy odniesiona do szkieletu:

$$\dot{L}_1^D = - \int_{\Omega} b (v_i^s - v_i^l) d\Omega . \quad (9.27)$$

Ponieważ moc jest wielkością skalarną, więc całkowita moc sił działających na szkielet ośrodka wynosi:

$$\dot{L}_1 = \dot{L}_1^A + \dot{L}_1^P + \dot{L}_1^D . \quad (9.28)$$

Prędkość zmian ciepła w szkielecie ośrodka wyraża się wzorem:

$$\dot{Q}_1 = - \int_{\Omega} q_{i,i}^s d\Omega , \quad (9.29)$$

gdzie q_i^s są to składowe strumienia ciepła przepływającego przez fazę stałą ośrodka.

Pochodna materialna energii kinetycznej dla fazy stałej ośrodka wynosi:

$$\frac{D^s K_1}{Dt} = \int_{\Omega} (\rho_{11} v_i^s \frac{D^s v_i^s}{Dt} + \rho_{12} v_i^l \frac{D^s v_i^l}{Dt}) d\Omega . \quad (9.30)$$

Pochodna materialna energii wewnętrznej dla szkieletu wynosi:

$$\frac{DW}{Dt} = \int_{\Omega} \dot{w}_1 d\Omega , \quad (9.31)$$

gdzie \dot{w}_1 oznacza prędkość zmiany lokalnej energii wewnętrznej szkieletu.

Biorąc pod uwagę wzory od (9.25) do (9.31) pierwsze prawo termodynamiki w odniesieniu do fazy stałej ośrodka można wyrazić wzorem:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\dot{w}_1 + \rho_{11} v_i^s \frac{Dv_i^s}{Dt} + \rho_{12} v_i^l \frac{Dv_i^l}{Dt} \right) d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} \left[X_i (\rho - \bar{\rho}) v_i^s - b (v_i^s - v_i^l) v_i^s + (\sigma_{ij} + \sigma\delta_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij} + (\sigma_{ij,j} + \sigma_{,i}) v_i^s - q_{i,i}^s \right] d\Omega . \end{aligned} \quad (9.32)$$

Korzystając z równań (9.16) i (9.19), równanie (9.32) można przedstawić w postaci związku lokalnego wyrażającego wielkość energii swobodnej odniesionej do fazy stałej ośrodka:

$$\dot{w}_1 = \sigma_{,i} v_i^s + (\sigma_{ij} + \sigma\delta_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij} - q_{i,i}^s . \quad (9.33)$$

Dla cieczy moc sił wewnętrznych w cieczy jest równa:

$$\dot{L}_2^A = \int_S \sigma (v_i^l - v_i^s) n_i dS . \quad (9.34)$$

Moc sił ciężkości cieczy:

$$\dot{L}_2^p = \int_{\Omega} \bar{\rho} X_i v_i^l d\Omega , \quad (9.35)$$

a moc sił oporu lepkiego w cieczy:

$$\dot{L}_2^D = \int_{\Omega} b (v_i^s - v_i^l) v_i^l d\Omega . \quad (9.36)$$

Prędkość zmian ciepła w cieczy wynosi:

$$\dot{Q} = - \int_{\Omega} q_{i,i}^l d\Omega , \quad (9.37)$$

gdzie q_i^l to składowe wektora strumienia przepływu ciepła:

Pochodna materialna energii kinetycznej cieczy K_2 wynosi:

$$\frac{D^k K_2}{Dt} = \int_{\Omega} \left(\rho_{12} v_i^l \frac{D^k v_i^s}{Dt} + \rho_{22} v_i^l \frac{D^k v_i^l}{Dt} \right) d\Omega . \quad (9.38)$$

Pochodna materialna energii wewnętrznej cieczy w obszarze Ω można wyrazić wzorem:

$$\frac{D^k W_2}{Dt} = \int_{\Omega} \dot{w}_2 d\Omega . \quad (9.39)$$

Korzystając ze wzorów (9.24) oraz wzorów od (9.34) do (9.39), pierwsze prawo termodynamiki dla cieczy wyraża się związkem:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\dot{w}_2 + \rho_{22} v_i^l \frac{D v_i^l}{Dt} + \rho_{12} v_i^l \frac{D v_i^s}{Dt} \right) d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} \left[X_i \bar{\rho} v_i^l + b (v_i^s - v_i^l) v_i^l + \sigma_{,i} (v_i^l - v_i^s) + \sigma (\dot{\theta} - \dot{\epsilon}) - q_{i,i}^l \right] d\Omega \end{aligned} \quad (9.40)$$

W powyższej relacji przez $\dot{\theta}$ oznaczono prędkość zmiany dylatacji cieczy, a przez $\dot{\epsilon}$ prędkość zmian dylatacji szkieletu ośrodka.

Biorąc pod uwagę równanie ruchu cieczy (9.19), równanie (9.40) można zapisać w postaci związku lokalnego:

$$\dot{w}_2 = -\sigma_{,i} v_i^s + \sigma (\dot{\theta} - \dot{\epsilon}) - q_{i,i}^l . \quad (9.41)$$

Można założyć, że prędkość zmiany energii wewnętrznej ośrodka dwufazowego \dot{w} jest równa sumie prędkości zmian energii każdej z faz ośrodka \dot{w}_1 i \dot{w}_2 , więc:

$$\dot{w} = \dot{w}_1 + \dot{w}_2 . \quad (9.42)$$

Oznaczając przez q_i składowe prędkości przepływu ciepła ośrodka dwufazowego (szkielet + ciecz), można stwierdzić, że:

$$q_i = q_i^s + q_i^l . \quad (9.43)$$

Korzystając z powyższych związków (9.42) i (9.43) oraz z równań (9.33) i (9.41) możemy stwierdzić, że zmiana energii wewnętrznej ośrodka dwufazowego wynosi:

$$\dot{w} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + \sigma \dot{\theta} - q_{i,i} . \quad (9.44)$$

Pierwsza zasada termodynamiki określa związek pomiędzy pracą mechaniczną i ciepłem. Wyraża ona bilans energii i nie wnosi ograniczeń na kierunek procesu zmiany stanu ciała. W zagadnieniach mechaniki klasycznej ciał idealnie sztywnych możemy mówić o wzajemnej zamianie energii potencjalnej w kinetyczną zakładając oczywiście, że w układzie nie ma dyssypacji energii generowanej na przykład na skutek wzajemnego tarcia cząstek. Gdy w układzie zaczynają występować zmiany termiczne, mamy do czynienia z procesami nieodwracalnymi. W takim przypadku musimy odwołać się do drugiego prawa termodynamiki, które nakłada istotne ograniczenia na proces zmian stanu energetycznego układu.

Celem opisanie zjawisk nieodwracalnych wprowadza się w termodynamice funkcję zmiany stanu zwaną entropią. Aby określić ograniczenie kierunków zmian stanu układu, drugie prawo termodynamiki wprowadza nierówność stwierdzającą, że zmiana entropii wewnętrznej układu jest zawsze dodatnia lub równa zero w przypadku procesu nieodwracalnego, zwana nierównością Clausiusa – Duhema. W mechanice ośrodków ciągłych wg. Derskiego [Derski, 1975], De Groota, Mazura [De Groot, Mazur, 1965] wprowadza się funkcję entropii właściwej s mierzonej na jednostkę objętości Ω , co można wyrazić wzorem:

$$S = \int_{\Omega} s d\Omega . \quad (9.45)$$

Zdefiniujmy entropię właściwą w postaci:

$$ds = \frac{dq}{T} , \quad (9.46)$$

przy czym:

- T jest temperaturą bezwzględną,
- dq jest przyrostem ciepła na jednostkę objętości.
- różniczka ds jest różniczką zupełną.

Ponieważ w przypadku ogólnym ciało może wymieniać ciepło z otoczeniem, prędkość zmian entropii jest sumą prędkości zmian entropii S_z wskutek wymiany ciepła z otoczeniem i prędkości zmian entropii wewnętrznej, co można zapisać równaniem:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS_w}{dt} + \frac{dS_z}{dt} . \quad (9.47)$$

Entropia związana z wymianą ciepła z otoczeniem wyraża się związkiem:

$$\frac{dS_z}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dQ}{dt} = - \int_{\Omega} q_{i,i} \frac{1}{T} d\Omega , \quad (9.48)$$

co sprowadza się do równania lokalnego w postaci:

$$T \frac{ds_z}{dt} = -q_{i,i} . \quad (9.49)$$

Jak widać z zależności (9.49), entropia S_z może mieć wartość dodatnią, ujemną, lub równą zero w zależności od kierunku przepływającego ciepła i od jego dywergencji. Inaczej ma się sprawa z entropią wewnętrzną S_w . Jej zmiana w jednostce objętości układu musi spełniać nierówność Clausiusa-Duhema, co w zapisie lokalnym można przedstawić w sposób następujący:

$$\frac{ds_w}{dt} \geq 0 \quad . \quad (9.50)$$

Jeżeli skorzystamy z definicji entropii, wyrażoną wzorem (9.48), prędkość zmiany entropii możemy zapisać związką:

$$\dot{S}_z = - \int_{\Omega} \frac{q_{i,i}}{T} d\Omega = \int_{\Omega} \dot{s}_z d\Omega, \quad (9.51)$$

gdzie \dot{S}_z jest prędkością zmiany entropii lokalnej, a T określa temperaturę absolutną ośrodka. Korzystając ze wzoru (9.45) oraz równania (9.51), zmianę energii wewnętrznej ośrodka możemy wyrazić równaniem:

$$\dot{w} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + \sigma \dot{\theta} + \dot{s}_z T. \quad (9.52)$$

Aby uzyskać związki konstytutywne, skorzystamy z definicji energii swobodnej Helmholtza wyrażającej się wzorem:

$$F = W - ST. \quad (9.53)$$

Energia swobodna Helmholtz'a, podobnie jak energia wewnętrzna W , jest funkcją stanu ośrodka. Jeżeli zmiany stanu ośrodka są nieskończenie małe, zmianę funkcji stanu F można wyrazić przy pomocy definicji różniczki zupełnej dF :

$$dF = dW - TdS - SdT. \quad (9.54)$$

Proces izotermiczny.

W przypadku procesów izotermicznych mamy:

$$dT = 0, \quad (9.55)$$

więc w takim przypadku:

$$dF = dW - TdS. \quad (9.56)$$

Traktując różniczkę zupełną funkcji Helmholtza F jako zmianę tej funkcji stanu w czasie, co możemy napisać w postaci:

$$\dot{F} = \dot{W} - T\dot{S} = \dot{W} - T[\dot{S}_w + \dot{S}_z] \quad (9.57)$$

oraz wprowadzając funkcję lokalną energii swobodnej Helmholtz'a χ spełniającą związek:

$$F = \int_{\Omega} \chi d\Omega, \quad (9.58)$$

równanie (9.57) wyraża się w skali lokalnej następująco:

$$\dot{\chi} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \sigma \dot{\theta} - T \dot{s}_w. \quad (9.59)$$

Stąd dostajemy:

$$T \dot{s}_w = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \sigma \dot{\theta} - \dot{\chi} \geq 0. \quad (9.60)$$

Kładąc:

$$\chi = \chi(\varepsilon_{ij}, \theta), \quad (9.61)$$

na podstawie (9.60) dostajemy:

$$\left(\sigma_{ij} - \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \dot{\varepsilon}_{ij} + \left(\sigma - \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} \geq 0 \quad (9.62)$$

dla każdego $\dot{\varepsilon}_{ij}$, $\dot{\theta}$. Powyższe równanie jest spełnione, gdy:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (9.63)$$

i

$$\sigma = \frac{\partial \chi}{\partial \theta}. \quad (9.64)$$

Ponieważ funkcja zmiany energii swobodnej Helmholtza jest różniczką zupełną, więc:

$$d\chi = \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \dot{\theta}. \quad (9.65)$$

Rozwijając w szereg Taylor'a funkcję energii swobodnej χ w okolicach stanu naturalnego znajdujemy:

$$\begin{aligned} \chi(\varepsilon_{ij}, \theta) = & \chi(0,0) + \frac{\partial \chi(0,0)}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial \chi(0,0)}{\partial \theta} \theta + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \chi(0,0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + 2 \frac{\partial^2 \chi(0,0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \theta} \varepsilon_{ij} \theta + \frac{\partial^2 \chi(0,0)}{\partial \theta \partial \theta} \theta \theta \right] + \dots \end{aligned} \quad (9.66)$$

Ponieważ w stanie naturalnym (nieodkształconym) funkcje: $\chi(0,0)$, $\sigma_{ij}(0,0)$ oraz $\sigma(0,0)$ są równe zeru, więc z dokładnością do małych drugiego rzędu możemy zapisać:

$$2\chi(\varepsilon_{ij}, \theta) = c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \beta_{ij} \varepsilon_{ij} \theta + \gamma \theta \theta, \quad (9.67)$$

gdzie

$$c_{ijkl} = \frac{\partial^2 \chi(0,0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}, \quad (9.68)$$

$$\beta_{ij} = 2 \frac{\partial^2 \chi(0,0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \theta}, \quad (9.69)$$

$$\gamma = \frac{\partial^2 \chi(0,0)}{\partial \theta \partial \theta}. \quad (9.70)$$

Korzystając ze związków (9.63) i (9.64) uzyskamy związki konstytutywne ciała Biota w przypadku dowolnej anizotropii ośrodka dwufazowego:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \beta_{ij} \theta, \quad (9.71)$$

$$\sigma = \beta_{ij} \varepsilon_{ij} + \gamma \theta. \quad (9.72)$$

Mimo że nie korzystaliśmy z prawa symetrii Onagera, uzyskaliśmy związki konstytutywne spełniające to prawo. W przypadku, gdy na wielkość ciśnienia porowego mają wpływ jedynie odkształcenia objętościowe cieczy, co powoduje, że $\beta_{ij} = \beta \delta_{ij}$, wtedy uzyskujemy uproszczoną postać związków konstytutywnych Biota:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \beta \delta_{ij} \theta \quad (9.73)$$

oraz

$$\sigma = \beta \varepsilon + \gamma \theta. \quad (9.74)$$

W przypadku szkieletu izotropowego tensor sprężystości c_{ijkl} można wyrazić przy pomocy dwóch stałych sprężystości zdefiniowanych, przez Biota w postaci:

$$c_{ijkl} = A \delta_{ij} \delta_{kl} + N (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (9.75)$$

Używając oznaczeń wprowadzonych przez Biota, wprowadzimy dwie nowe stałe:

$$\beta = Q \quad i \quad \gamma = R. \quad (9.76)$$

Związki konstytutywne po wprowadzonych oznaczeniach sprowadzają się do postaci zaproponowanej przez Biota [Biot, 1956]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2N \varepsilon_{ij} + (A\varepsilon + Q\theta) \delta_{ij}, \\ \sigma &= Q\varepsilon + R\theta. \end{aligned} \quad (9.77)$$

W pracy Biota – Willis [Biot, Willis, 1957] zinterpretowano stałe występujące w związkach konstytutywnych (9.77) w sposób następujący:

- N jest modułem odkształcenia postaciowego szkieletu,
- A jest modułem odkształcenia objętościowego szkieletu wypełnionego cieczą,
- Q jest współczynnikiem wpływu odkształcenia objętościowego cieczy na naprężenie w szkielecie lub odwrotnie - współczynnikiem wpływu odkształcenia objętościowego szkieletu na naprężenie w cieczy,
- R jest modułem odkształcenia objętościowego cieczy wypełniającej pory ciała Biota,
- parametr M wyraża się poprzez:

$$M = A - \frac{Q^2}{R}.$$

Stale M i N Biota odpowiadają w przypadku ośrodka sprężystego pozbawionego por **stałym Lamego** λ i μ . Takie oznaczenie stałych Biot przyjął i konsekwentnie stosował w swojej pracy

Coussy [Coussy, 1995]. Na podstawie pracy Biota, Willisa [Biot, Willis, 1957] można w takim przypadku wyrazić stałe sprężystości Biota przy pomocy modułu odkształcenia postaciowego G i współczynnika Poissona ν :

$$N = G \quad i \quad M = \frac{2\nu G}{(1-2\nu)}. \quad (9.78)$$

Sposób wyznaczania pozostałych stałych modelu Biota czytelnik znajdzie w pracy [Fatta, 1959].

8.5 Rozwiązania zagadnień konsolidacji metodami analitycznymi.

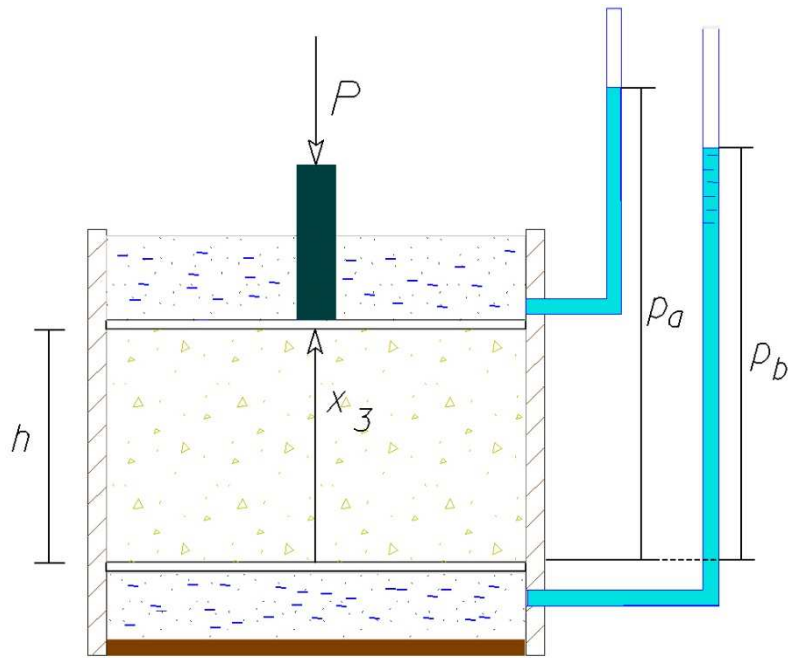
Poniżej przedstawimy sposób rozwiązywania zagadnień przepływu filtracyjnego cieczy przez odkształcalny ośrodek porowaty. Ze względu na fakt, że rozwiązywanie tych zagadnień metodami analitycznymi prowadzi do skomplikowanej postaci rozwiązań, zazwyczaj stosuje się metody numeryczne. Celem uzyskanych rozwiązań w klasycznej teorii konsolidacji jest określenie skutków, jakie wywiera na ośrodek działanie obciążenia zewnętrznego wywołującego przepływ filtracyjny i deformacje postaciowe szkieletu. W znanych mi rozwiązaniach teorii konsolidacji w mniejszym stopniu zwraca się uwagę na funkcje opisujące proces filtracji i odwrotnie, szczegółowo analizuje się funkcje przemieszczeń i naprężeń w szkielecie ośrodka porowatego. W niniejszej pracy poświęcimy więcej uwagi funkcjom opisującym przepływ filtracyjny cieczy w procesie konsolidacji ośrodka porowatego.

8.5.1 Zagadnienie jednowymiarowe konsolidacji ciała Biota.

. Zagadnienie jednowymiarowe sprowadza się do rozwiązania zagadnienia porowatego słupa wypełnionego cieczą i poddanego działaniu jednoosiowego ściskania poprzez przyłożenie obciążenia za pośrednictwem porowatej płytki, umożliwiającej swobodny wypływ cieczy z ośrodka lub działania gradientu ciśnienia hydrostatycznego po obu stronach słupa, działania ciężaru własnego ośrodka, a także innego typu działania jak np. działania gradientu prądu stałego, lub gradientu temperatury. Przedstawione poniżej rozwiązania dotyczące zagadnienia jednowymiarowego zostały po raz pierwszy uzyskane w przypadku obciążenia przez [Jasiewicza, 1968], w przypadku działania prądu elektrycznego i obciążenia przez [Auriault i innych, 1981], [Bauera i innych, 1980a, 1980b] oraz działania prądu elektrycznego i obciążenia i gradientu hydraulicznego przez [Strzeleckiego, Bartlewską, 2006]. Poniżej przedstawiono analizę uzyskanych rozwiązań pod kątem wykorzystania ich do wyznaczania parametrów efektywnych modeli reologicznych oraz w zakresie poszukiwania strefy upłynnienia gruntu, czyli utraty stateczności filtracyjnej w procesie konsolidacji.

8.5.1 Zagadnienie konsolidacji jednowymiarowej wywołanej działaniem obciążenia i gradientu hydraulicznego.

Wszelkie rodzaje obciążenia przykładane są w sposób natychmiastowy w chwili $t=0$, co odpowiada funkcji Heaviseida $\eta(t)$ (patrz podrozdział VII.3.1 - rys. 7.25). Uzyskanie rozwiązania zachowania się ośrodka w przypadku obciążenia zmiennego w czasie jest możliwe przy wykorzystaniu całki Duhamela, co przedstawimy na wybranych przykładach. Pierwsze rozwiązanie zagadnienia jednowymiarowego uzyskał Jasiewicz [1]. Schemat rozwiązywanego przez nas zagadnienia przedstawiono na rys. 8.1.



Rys. 8.1. Schemat zagadnienia jednowymiarowego konsolidacji ciała Biota.

Zakładając w rozważanym zagadnieniu, że składowe wektora przemieszczenia \vec{u} :

$$u_1 = u_2 = 0,$$

oznaczywszy składową $u_3 = u$. Dla przypadku jednowymiarowego związki fizyczne mają postać:

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= (2N + M)\varepsilon + \frac{Q}{R}\sigma, \\ \sigma &= Q\varepsilon + R\theta, \end{aligned} \quad (9.1)$$

gdzie związek geometryczny ma postać: $\varepsilon = \varepsilon_{33} = u_{,3}$.

Równania procesu konsolidacji upraszczają się w tym przypadku do układu dwóch równań z dwoma niewiadomymi:

- równania równowagi w przemieszczeniach:

$$(M + 2N)u_{,33} = -\frac{H}{R}\sigma_{,3} + W_s, \quad (9.2)$$

gdzie W_s jest funkcją źródła odniesioną do szkieletu gruntowego (może to być na przykład funkcja ciężaru ośrodka z uwzględnieniem wyporu $\Delta^* = (1-f)g\rho_{os}$).

- równanie przepływu Darcy – Biota:

$$K\sigma_{,33} = \frac{1}{R}\dot{\sigma} - \frac{H}{R}\dot{u}_{,3} + W_l, \quad (9.3)$$

gdzie W_l jest funkcją źródła odniesioną do szkieletu gruntowego (może to być na przykład funkcja ciężaru cieczy $fg\rho$).

W większości zadań przyjmujemy $W_s = W_l = 0$ i będziemy rozważać ośrodek jako nieważki.

Zajmiemy się konsolidacją wywołaną działaniem obciążenia zewnętrznego i gradientu ciśnień hydrostatycznych.

Warunki graniczne zagadnienia:

Warunki brzegowe:

1. warunek obciążenia brzegu górnego:

$$\sigma_{33}(h,t) + \sigma(h,t) = -p\eta(t); \quad (9.4)$$

2. warunek naprężeń w cieczy na brzegu górnym:

$$\sigma(h,t) = -p_a\eta(t); \quad (9.5)$$

3. warunek naprężeń na brzegu dolnym:

$$\sigma(0,t) = -p_b\eta(t); \quad (9.6)$$

4. warunek przemieszczeń na brzegu dolnym

$$u(0,t) = 0. \quad (9.7)$$

Warunek początkowy:

Zakładamy, że w chwili $t = +0$ funkcje $\sigma^{(0)}$ i $u^{(0)}$ spełniają układ równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} (M + 2N)u_{,33}^{(0)} &= -\frac{H}{R}\sigma_{,3}^{(0)}, \\ \frac{1}{R}\sigma^{(0)} - \frac{H}{R}u_{,3}^{(0)} &= 0. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Dokonajmy na funkcjach naprężenia w cieczy, naprężenia w szkielecie, przemieszczenia i odkształcenia prostego przekształcenia Laplace'a. Funkcje obrazu w przestrzeni Laplace'a oznaczmy:

$$(\tilde{\sigma}_{33}, \tilde{\sigma}, \tilde{u}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{\theta}) = L(\sigma_{33}, \sigma, u, \varepsilon, \theta). \quad (9.9)$$

Uwzględniając warunek początkowy układ równań porosprężystości Biota-Darcy'ego w przestrzeni Laplace'a ma postać:

$$(M + 2N)\tilde{u}_{,33} = -\frac{H}{R}\tilde{\sigma}_{,3}, \quad (9.10)$$

$$K\tilde{\sigma}_{,33} = \frac{s}{R}\tilde{\sigma} - \frac{Hs}{R}\tilde{u}_{,3}. \quad (9.11)$$

Zróźniczkujemy równanie przepływu (9.11) po ∂x_3 a następnie uwzględniając w nim równanie (9.10), otrzymamy równanie trzeciego rzędu:

$$\tilde{\sigma}_{,333} - se\tilde{\sigma}_{,3} = 0, \quad (9.12)$$

gdzie $e = \frac{R(M + 2N) + H^2}{KR^2(M + 2N)}$.

Rozwiązaniem tego równania w przestrzeni Laplace'a zgodnie z pracą [Ditkina, Prudnikowa, 1964] jest funkcja:

$$\tilde{\sigma} = A \exp(x_3 \sqrt{es}) + B \exp(-x_3 \sqrt{es}) + C. \quad (9.13)$$

Korzystając z równania (9.10) i kładąc w nim rozwiązanie (9.13), otrzymamy funkcję przemieszczenia \tilde{u} w postaci:

$$\tilde{u} = \frac{\zeta}{\sqrt{es}} \left[B \exp(-x_3 \sqrt{es}) - A \exp(x_3 \sqrt{es}) \right] + Dx_3 + E, \quad (9.14)$$

gdzie $\zeta = \frac{H}{R(M + 2N)}$

Z pierwszego związku fizycznego (9.1) obliczmy naprężenie $\tilde{\sigma}_{33}$:

$$\tilde{\sigma}_{33} = - \left[A \exp(x_3 \sqrt{es}) + B \exp(-x_3 \sqrt{es}) \right] + (2N + M)D + \frac{Q}{R}C. \quad (9.15)$$

Podstawiając powyższe funkcje do warunków brzegowych, dostajemy układ równań:

$$\begin{aligned} (2N + M)D + \frac{H}{R}C &= -\frac{P}{s}, \\ A \exp(h\sqrt{es}) + B \exp(-h\sqrt{es}) + C &= -\frac{fp_a}{s}, \\ A + B + C &= -\frac{fp_b}{s}, \\ \frac{\zeta}{\sqrt{es}}(B - A) + E &= 0. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Powyższy układ równań składa się z czterech równań i pięciu niewiadomych. Brakujące równanie dostaniemy wstawiając funkcje naprężenia $\tilde{\sigma}$ (9.13) i funkcję przemieszczenia \tilde{u} (9.16) do równania przepływu (9.11). Stąd dostajemy brakujące równanie:

$$C = HD. \quad (9.17)$$

Rozwiązaniem algebraicznego układu równań (9.16) są stałe:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{s} \frac{\Lambda_4 - \Lambda_3 \exp(-h\sqrt{es})}{\sinh(h\sqrt{es})}, \\
B &= \frac{1}{s} \frac{\Lambda_3 \exp(h\sqrt{es}) - \Lambda_4}{\sinh(h\sqrt{es})}, \\
C &= \frac{\Lambda_2}{s}, \\
D &= \frac{\Lambda_1}{s}, \\
E &= \frac{2\zeta\Lambda_4}{s\sqrt{es}} \frac{1}{\sinh(h\sqrt{es})} - \frac{\zeta\Lambda_3}{s\sqrt{es}} \frac{\cosh(h\sqrt{es})}{\sinh(h\sqrt{es})},
\end{aligned} \tag{9.18}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= -\frac{pR}{(M+2N)R+H^2}, \\
\Lambda_2 &= H\Lambda_1, \\
\Lambda_3 &= -fp_a - \Lambda_2, \\
\Lambda_4 &= -fp_b - \Lambda_2.
\end{aligned}$$

Postać rozwiązań w przestrzeni Laplace'a jest następująca:
równanie naprężenia hydrostatycznego w cieczy:

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{s} \Lambda_4 \frac{\sinh(x_3\sqrt{es})}{\sinh(h\sqrt{es})} + \frac{1}{s} \Lambda_3 \frac{\sinh((h-x_3)\sqrt{es})}{\sinh(h\sqrt{es})} + \frac{1}{s} \Lambda_2, \tag{9.19}$$

równanie naprężeń w szkielecie:

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{33} &= -\frac{1}{s} \Lambda_4 \frac{\sinh(x_3\sqrt{es})}{\sinh(h\sqrt{es})} - \frac{1}{s} \Lambda_3 \frac{\sinh((h-x_3)\sqrt{es})}{\sinh(h\sqrt{es})} + \\
&+ \frac{1}{s} (M+2N)\Lambda_1 + \frac{1}{s} \frac{Q\Lambda_2}{R},
\end{aligned} \tag{9.20}$$

równanie przemieszczeń szkieletu gruntowego:

$$\begin{aligned}
\tilde{u} &= -\frac{\zeta\Lambda_4}{s\sqrt{es}} \frac{\cosh(x_3\sqrt{es})}{\sinh(h\sqrt{es})} + \frac{\zeta\Lambda_3}{s\sqrt{es}} \frac{\cosh((h-x_3)\sqrt{es})}{\sinh(h\sqrt{es})} + \\
&+ \frac{2\zeta\Lambda_4}{s\sqrt{es}} \frac{1}{\sinh(h\sqrt{es})} - \frac{\zeta\Lambda_3}{s\sqrt{es}} \frac{\cosh(h\sqrt{es})}{\sinh(h\sqrt{es})} + \frac{1}{s} \Lambda_1 x_3.
\end{aligned} \tag{9.21}$$

Sposób uzyskania retransformat rozwiązania pokażemy na przykładzie pierwszego członu funkcji naprężeń hydrostatycznych $\tilde{\sigma}$, który roboczo nazwiemy \tilde{I}_1 , a który można zapisać w postaci:

$$s\tilde{I}_1 = \Lambda_4 \frac{\sinh(x_3\sqrt{es})}{\sinh(h\sqrt{es})}$$

(9.22)

Zgodnie z pracą [Ditkina – Prudnikowa, 1964] (tablice transformacji Laplace'a) można stwierdzić, że ułamek o postaci (9.22) wyraża się w przestrzeni rzeczywistej w sposób następujący:

$$L^{-1}\left(\frac{\sinh(\hat{x}_3\sqrt{s})}{\sinh(\hat{h}\sqrt{s})}\right) = \frac{1}{\hat{h}} \left(\frac{\partial \vartheta_3\left(\frac{\hat{h}-\hat{x}_3}{2\hat{h}}, \frac{t}{\hat{h}^2}\right)}{\partial x_3} \right) \quad (9.23)$$

oraz

$$L^{-1}\left(\frac{\sinh((\hat{h}-\hat{x}_3)\sqrt{s})}{\sinh(\hat{h}\sqrt{s})}\right) = -\frac{1}{\hat{h}} \left(\frac{\partial \vartheta_3\left(\frac{\hat{x}_3}{2\hat{h}}, \frac{t}{\hat{h}^2}\right)}{\partial x_3} \right), \quad (9.24)$$

przy czym ϑ_3 jest funkcją Jacobiego i zapisuje się wzorem:

$$\vartheta_3(v, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(2ni\pi v - n^2\pi^2 t). \quad (9.25)$$

Korzystając z powyższych wzorów dostajemy:

$$\frac{\partial I_1}{\partial t} = -\frac{\Lambda_4}{\hat{h}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sin\left(2\pi n \frac{\hat{h}-\hat{x}_3}{2\hat{h}}\right) - \cos\left(2\pi n \frac{\hat{h}-\hat{x}_3}{2\hat{h}}\right) \right] \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 t}{\hat{h}^2}\right). \quad (9.26)$$

Powyższy wzór po wykonaniu różniczkowania po ∂x_3 :

$$\frac{\partial I_1}{\partial t} = -\frac{\Lambda_4}{\hat{h}^2} \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[n \sin\left(2\pi n \frac{\hat{h}-\hat{x}_3}{2\hat{h}}\right) + n \cos\left(2\pi n \frac{\hat{h}-\hat{x}_3}{2\hat{h}}\right) \right] \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 t}{\hat{h}^2}\right). \quad (9.27)$$

Powyższy wzór można zapisać inaczej:

$$\frac{\partial I_1}{\partial t} = -\frac{2\Lambda_4}{\widehat{h}^2} \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left[n * \sin \left(2\pi n \frac{\widehat{h} - \widehat{x}_3}{2\widehat{h}} \right) \right] \exp \left(-\frac{\pi^2 n^2 t}{\widehat{h}^2} \right). \quad (9.28)$$

Obliczmy funkcję I_1 całkując równanie w przedziale od 0 do t :

$$I_1 = \frac{2\Lambda_4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} * \sin \left(2\pi n \frac{\widehat{h} - \widehat{x}_3}{2\widehat{h}} \right) \right] \exp \left(-\frac{\pi^2 n^2 t}{\widehat{h}^2} \right) \Big|_0^t. \quad (9.29)$$

Podstawiając granice całkowania dostajemy:

$$I_1 = \Lambda_4 \left[\frac{h - x_3}{h} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} * \sin \left(\pi n \frac{h - x_3}{h} \right) \right] \exp \left(-\frac{\pi^2 n^2 t}{h^2 e} \right) \right]. \quad (9.30)$$

Postępując analogicznie i korzystając ze wzorów (9.23), (9.24), dostajemy:

$$I_2 = \Lambda_3 \left[\frac{x_3}{h} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} * \sin \left(\pi n \frac{x_3}{h} \right) \right] \exp \left(-\frac{\pi^2 n^2 t}{h^2 e} \right) \right]. \quad (9.31)$$

Trzeci człon wyraża się przy pomocy funkcji Heaviseida:

$$I_3 = \Lambda_2 \eta(t). \quad (9.32)$$

Funkcja naprężenia hydrostatycznego wyraża się w tym przypadku wzorem:

$$\sigma = I_1 + I_2 + I_3. \quad (9.33)$$

Jak łatwo sprawdzić dla $x_3 = 0$:

$$\sigma = \Lambda_4 + \Lambda_2 = -fp_b, \quad (9.34)$$

a dla $x_3 = h$:

$$\sigma = \Lambda_3 + \Lambda_2 = -fp_a. \quad (9.35)$$

Jak widać funkcja σ spełnia warunki brzegowe (9.5) i (9.6).

Postępując analogicznie znajdziemy pozostałe funkcje rozwiązania.

Funkcja naprężeń w szkielecie ośrodka porowatego jest równa:

$$\sigma_{33} = -I_1 - I_2 + \left[(M + 2N) + \frac{QH}{R} \right] \Lambda_1 \eta(t), \quad (9.36)$$

ale ponieważ:

$$-\frac{pR}{(M+2N)R+H^2} * \left[(M+2N) + \frac{QH}{R} \right] = -p \left[1 - \frac{R}{(M+2N)R+H^2} \right] = -p - \Lambda_2$$

funkcję naprężeń w szkielecie można wyrazić wzorem:

$$\sigma_{33} = -I_1 - I_2 - (p + \Lambda_2)\eta(t). \quad (9.37)$$

Sumując (9.34) i (9.36) dostajemy:

$$\sigma_{33} + \sigma = -p\eta(t). \quad (9.38)$$

Związek (9.38) pokazuje, że na brzegu górnym spełniony jest warunek brzegowy (9.4). Odwracając funkcję obrazu (9.21), otrzymamy funkcję przemieszczeń u :

$$\begin{aligned} u = & -\zeta [(\Lambda_4 - \Lambda_2)x_3 + (\Lambda_3 - \Lambda_4)\frac{x_3^2}{2h} + \\ & + \Lambda_4 \frac{2h}{\pi^2} \sum_1^\infty \frac{(-1)^n - \cos\left(\pi n \frac{h-x_3}{h}\right)}{n^2} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 t}{h^2 e}\right) + \\ & - \Lambda_3 \frac{2h}{\pi^2} \sum_1^\infty \frac{1 - \cos\left(\pi n \frac{x_3}{h}\right)}{n^2} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 t}{h^2 e}\right)]. \end{aligned} \quad (9.39)$$

Znając funkcję σ możemy obliczyć funkcję prędkości filtracji v wzorem:

$$\begin{aligned} v = & -\frac{k}{\rho g f} \sigma_{,3} = -\frac{k}{\rho g f} \left[(\Lambda_3 - \Lambda_4) + \Lambda_4 \frac{2}{h} \sum_1^\infty \cos\left(\pi n \frac{h-x_3}{h}\right) \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 t}{h^2 e}\right) + \right. \\ & \left. - \Lambda_3 \frac{2}{h} \sum_1^\infty \cos\left(\pi n \frac{x_3}{h}\right) \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 t}{h^2 e}\right) \right] \end{aligned} \quad (9.40)$$

oraz funkcje dylatacji szkieletu ε i cieczy θ :

$$\begin{aligned} \varepsilon = & -\zeta [(\Lambda_4 + \Lambda_2) + (\Lambda_3 - \Lambda_4)\frac{x_3}{h} + \\ & + \Lambda_4 \frac{2}{\pi} \sum_1^\infty \frac{\sin\left(\pi n \frac{h-x_3}{h}\right)}{n} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 t}{h^2 e}\right) + \\ & - \Lambda_3 \frac{2}{\pi} \sum_1^\infty \frac{\sin\left(\pi n \frac{x_3}{h}\right)}{n} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 t}{h^2 e}\right)], \\ \theta = & \frac{1}{R} \sigma - \frac{Q}{R} \varepsilon. \end{aligned} \quad (9.41)$$

8.5.1.1 Przykład liczbowy dla zagadnienia jednowymiarowego.

Do obliczeń przyjęto stałe materiałowe dla kaolinitu z kopalni „Nowogrodziec”, określone przez [Bauera i innych, 1981].

Przyjęto mianowicie:

porowatość ośrodka - $f = 0,3$;

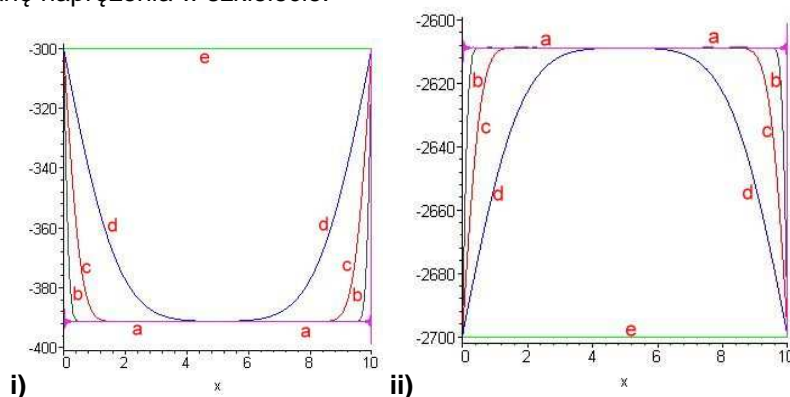
stałe Biota: $H = 7 \cdot 10^6 \text{ Pa}$, $R = 1.5 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}$, $M = 2.5 \cdot 10^6 \text{ Pa}$, $N = 1.2 \cdot 10^6 \text{ Pa}$;

$$k = 1.5 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

współczynnik filtracji:

Rozważmy na początku konsolidację wywołaną tylko przyłożonym do słupa gruntu obciążeniem zewnętrznym zakładając, że ciśnienie przyłożone do górnej granicy słupa $p = 3 \text{ kPa}$, natomiast ciśnienie hydrostatyczne przyłożone do dolnej i górnej powierzchni tłoka jest jednakowe i wynosi: $p_a = p_b = 1 \text{ kPa}$. Przyjęto wysokość słupa ośrodka porowatego równą 10m.

Na rys. 8.2 przedstawiono zmianę w czasie naprężenia hydrostatycznego σ i w tych samych momentach zmianę naprężenia w szkielecie.



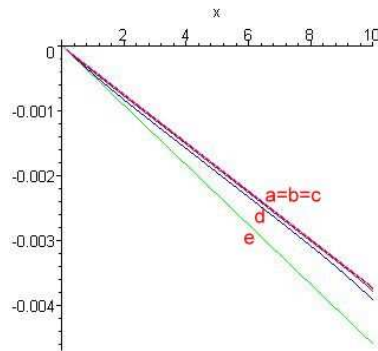
Rys. 8.2. Wykres naprężeń:

i) σ w cieczy, ii) σ_{33} w szkielecie;

(Wykresy wykonano dla czasów a) $t = 0 \text{ s}$, b) $t = 1 \cdot 10^5 \text{ s}$ c) $t = 5 \cdot 10^5 \text{ s}$ d) $t = 10^6 \text{ s}$ e) $t = 5 \cdot 10^6 \text{ s}$).

Jak widać, w chwili $t = 0$ powstaje w cieczy określone stałe ściskające naprężenie hydrostatyczne cieczy wewnątrz ośrodka większe od przyłożonego do granic zewnętrznych ośrodka i przyjmującego wartości równe $p_a = p_b = -f \cdot 1 \text{ kPa}$ na brzegach słupa ośrodka porowatego. Również w szkielecie powstaje w momencie początkowym stała wielkość naprężenia wewnątrz słupa ośrodka porowatego, różna od wstępnie przyjętej na brzegach , równa, co do wartości obciążeniu minus naprężenie początkowe w cieczy. $p(1-f) - fp_a$. W procesie konsolidacji ustala się po odpowiednio długim czasie stałą wartość naprężeń hydrostatycznych, równych naprężeniom na brzegach oraz stałą wartość naprężeń w szkielecie równą co do wartości $p(1-f)$.

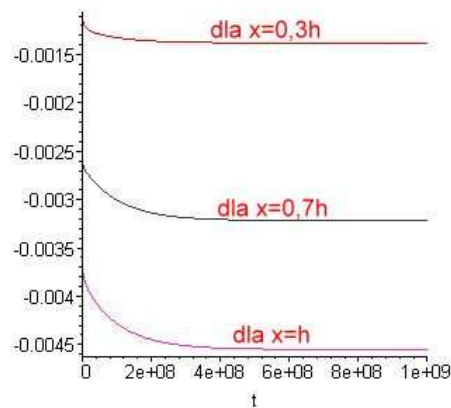
Przyjrzyjmy się rozkładowi przemieszczeń wzdłuż próbki dla danych podanych wyżej. Przebieg krzywej przemieszczeń wzdłuż próbki pokazano na rys 8.3 dla kilku czasów t.



Rys. 8.3. Funkcja przemieszczeń w profilu słupa ośrodka porowatego dla czasów:
a) $t=0s$, b) $t=1 \cdot 10^5 s$ c) $t=5 \cdot 10^5 s$ d) $t= 10^6 s$ e) $t=5 \cdot 10^6 s$.

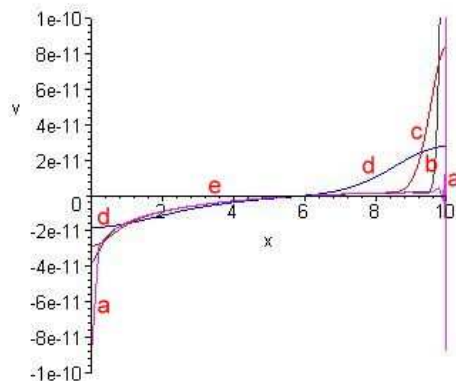
Jak widać z wykresu 8.3, spełniony jest warunek brzegowy, dotyczący zerowych przemieszczeń w dole próbki. Przedstawiony wykres pokazuje, że w chwili $t=+0$ mamy do czynienia z znacznymi osiadaniami natychmiastowymi. Jak to omówiono poprzednio, efekt ten wynika z faktu, że obciążenie zostało przyłożone w sposób gwałtowny w momencie początkowym, oraz z faktu, że model porosprężystości zawiera cechę sprężystości zarówno w odniesieniu do fazy stałej, jak i ciekłej ośrodka.

Poniżej na rys.8.4 przedstawiono wykres ewolucji pełzania próbki w czasie na trzech poziomach: osiadań słupa ośrodka – poziom $x_3 = h$ oraz przemieszczenia na poziomach $x_3 = 0,7h$ i $x_3 = 0,3h$.



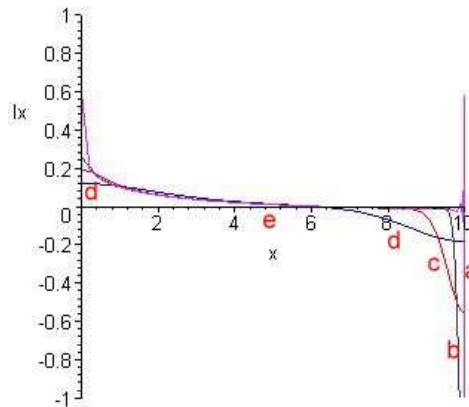
Rys. 8.4. Wykres pełzania słupa ośrodka porowatego pod działaniem obciążenia zewnętrznego. Przedstawiony powyżej wykres jest, jak wiadomo z literatury [Kisiel i inni, 1982], [Bauer i inni, 1980a, 1980b], [Strzelecki, Zak, 1980] , klasycznym przebiegiem procesu doświadczalnego obserwowanego w laboratorium przy obserwacji próbek gruntu umieszczonych w edometrze.

W wyniku rozwiązania uzyskaliśmy zmianę prędkości filtracji w czasie, co przedstawiono na rys. 8.5



Rys. 8.5. Zmiana prędkości filtracji dla różnych czasów pełzania próbki:
a) $t=0s$, b) $t=1 \cdot 10^5 s$, c) $t=5 \cdot 10^5 s$, d) $t= 10^6 s$, e) $t=5 \cdot 10^6 s$.

Jak widać z rys. 8.86, prędkość filtracji ma przeciwny zwrot na obu końcach słupa ośrodka. Najmniejsze prędkości obserwujemy w strefie środkowej słupa. Bardziej interesującym może być dla nas wykres spadków hydraulicznych przepływu filtracyjnego generowany podczas ściskania próbki, co pokazano na rys.8.6.



Rys. 8.6. Wykresy spadku hydraulicznego dla różnych czasów pełzania próbki:
a) $t=0s$, b) $t=1 \cdot 10^5 s$, c) $t=5 \cdot 10^5 s$, d) $t= 10^6 s$, e) $t=5 \cdot 10^6 s$.

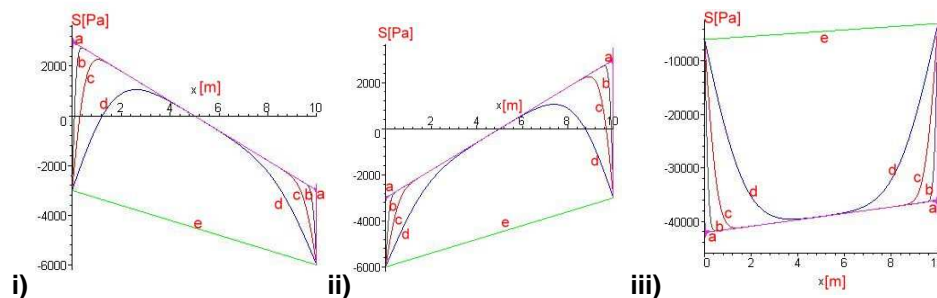
Niebezpieczny ze względu na upłynnienie jest spadek hydrauliczny przy powierzchni działania obciążenia i osiąga znaczną wartość w chwili $t=+0$. Rozważmy obecnie wpływ gradientu hydraulicznego na konsolidację słupa ośrodka porowatego, co wyrażać się będzie przyłożeniem różnych wartości naprężenia hydrostatycznego do dwóch granic ośrodka.

Rozpatrzmy trzy przypadki:

- 1) do powierzchni górnej przykładamy ciśnienie hydrostatyczne równe 20kPa, natomiast na powierzchni dolnej przyłożone ciśnienie wynosi 10kPa, obciążenie $p=0kPa$;
- 2) do powierzchni dolnej przykładamy ciśnienie hydrostatyczne równe 1kPa, a na powierzchni górnej ciśnienie hydrostatyczne wynosi 20kPa, obciążenie $p=0kPa$;
- 3) do powierzchni górnej przykładamy ciśnienie hydrostatyczne równe 10kPa, natomiast na powierzchni dolnej przyłożone ciśnienie wynosi 20kPa, a obciążenie $p=300kPa$.

Porównanie zachowania funkcji naprężeń, przemieszczeń i spadku hydraulicznego pozwoli nam zrozumieć lepiej proces konsolidacji i wpływ na ten proces spadku hydraulicznego.

Zmianę naprężeń w cieczy w czasie dla przedstawionych powyżej przypadków obrazuje rys. 8.7 dla czasów: **a) $t=0s$, b) $t=1 \cdot 10^5 s$, c) $t=5 \cdot 10^5 s$, d) $t= 10^6 s$, e) $t=5 \cdot 10^6 s$.**



Rys. 8.7. Funkcja naprężeń w cieczy dla przypadku:

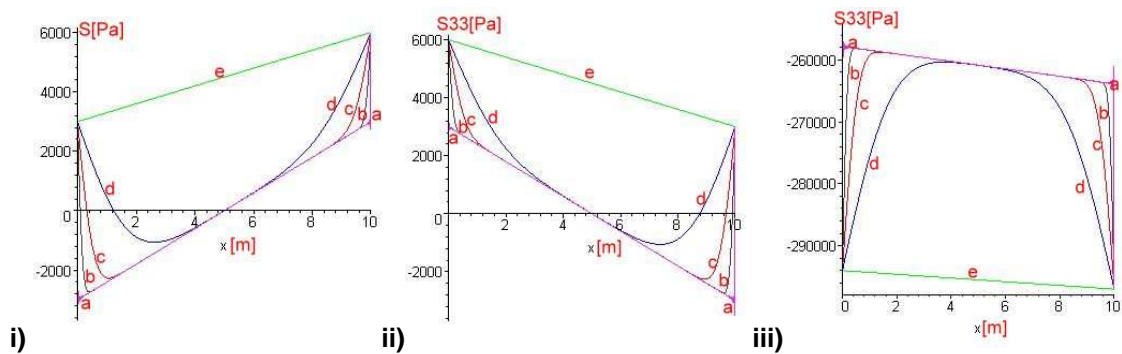
i) filtracja góra \Rightarrow dół $p = 0kPa$, $p_a = 20kPa$, $p_b = 10kPa$;

ii) filtracja dół \Rightarrow góra $p = 0kPa$, $p_a = 10kPa$, $p_b = 20kPa$;

iii) filtracja dół \Rightarrow góra $p = 300kPa$, $p_a = 10kPa$, $p_b = 20kPa$.

Z wykresów 8.7 widać, że przyłożenie gradientu ciśnień na brzegach słupa ośrodka porowatego bez obciążenia zewnętrznego powoduje w chwili $t=+0$ powstanie liniowej funkcji ciśnienia asymetrycznej względem osi $\sigma = 0$, przy czym naprężenie ściskające występuje po stronie mniejszego ciśnienia

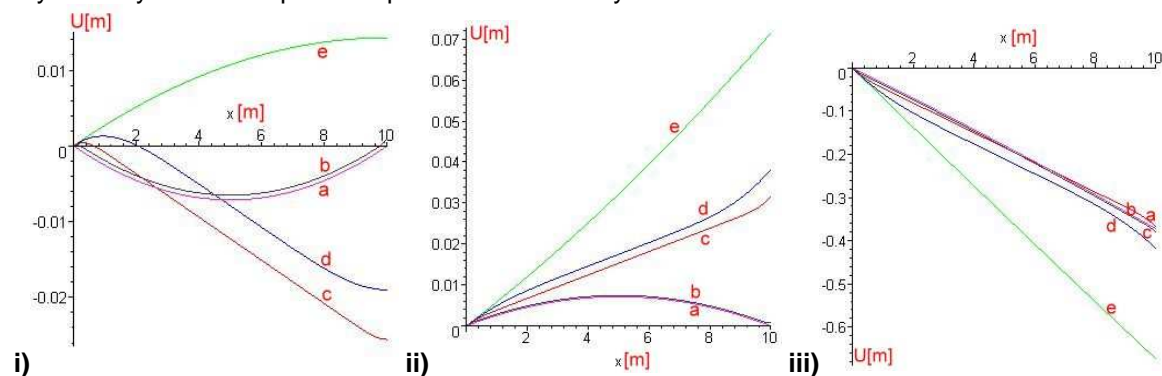
przyłożonego do brzegu. Oczywiście, wartości na brzegach są równe wartościom przyłożonym do tych brzegów. Następnie w procesie konsolidacji wartości naprężeń zmierzają do rozkładu liniowego przechodzącego przez punkty $(0, -fp_b)$, przy czym w obydwu przypadkach po odpowiednio długim czasie dostajemy naprężenia hydrostatyczne ściskające, chociaż w początkowej fazie mieliśmy po jednej stronie słupa naprężenia ściskające, a po drugiej stronie rozciągające. Wykres zmian naprężeń hydrostatycznych pod działaniem obciążenia zewnętrznego $p = 300kPa$ i przy występowaniu gradientu ciśnień hydrostatycznych znacznie różni się od przebiegu analogicznych zmian, gdy gradient ciśnień nie występuje (porównajmy rys. 8.2-i oraz 8.7-iii). Zmianę naprężeń w szkielecie ośrodka porowatego dla tych samych czasów pełzania przedstawiono na rys 8.8:



Rys. 8.8. Funkcja naprężeń w szkielecie ośrodka porowatego dla kilku czasów pełzania w przypadku :

- i) filtracja góra \Rightarrow dół** $p = 0kPa, p_a = 20kPa, p_b = 10kPa$;
- ii) filtracja dół \Rightarrow góra** $p = 0kPa, p_a = 10kPa, p_b = 20kPa$;
- iii) filtracja dół \Rightarrow góra** $p = 300kPa, p_a = 10kPa, p_b = 20kPa$.

Ja widać z rys.8.8, po odpowiednio długim czasie naprężenia w szkielecie są dodatnie, czyli bez względu na kierunek filtracji (górze \rightarrow dół lub z dół \rightarrow góra) szkielet po ustaniu procesu konsolidacji poddany jest rozciąganiu. W przypadku trzecim, gdy na próbkę działa obciążenie zewnętrzne i gradient ciśnienia hydrostatycznego dostajemy naprężenie w szkielecie ściskające, ale znacznie mniejsze od naprężeń, gdy nie występuje gradient ciśnień hydrostatycznych. Można stąd wywnioskować, że w warunkach filtracji naprężenia w szkielecie maleją w odniesieniu do przypadku, gdy filtracja nie występuje. W przypadku zarówno naprężeń hydrostatycznych, jak i naprężeń w szkielecie nie uwzględniliśmy ciężaru własnego fazy stałej i ciekłej ośrodka. Rozkład przemieszczeń szkieletu ośrodka w procesie konsolidacji wzdłuż słupa ośrodka porowatego dla tych samych czasów pełzania przedstawiono na rys. 8.9.

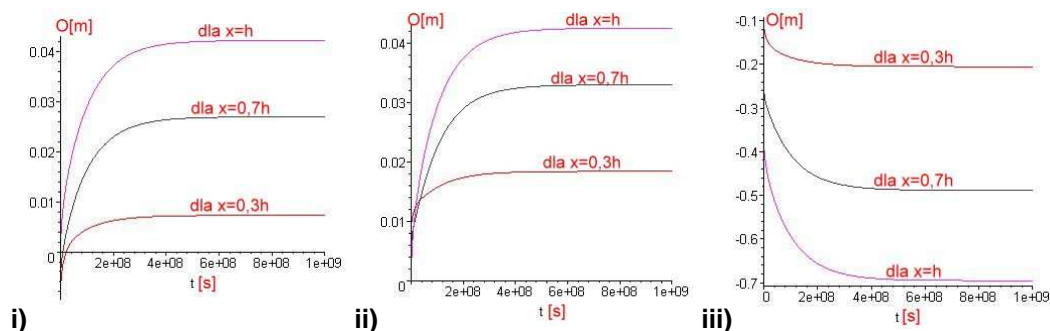


Rys. 8.9. Funkcja przemieszczeń w szkielecie ośrodka porowatego dla kilku czasów pełzania w przypadku:

- i) filtracja góra \Rightarrow dół** $p = 0kPa, p_a = 20kPa, p_b = 10kPa$;
- ii) filtracja dół \Rightarrow góra** $p = 0kPa, p_a = 10kPa, p_b = 20kPa$;
- iii) filtracja dół \Rightarrow góra** $p = 300kPa, p_a = 10kPa, p_b = 20kPa$.

W przypadku filtracji z góry do dołu widać, że przemieszczenia zmieniają znak w czasie. Oznacza to, że w pewnym okresie czasu słup ośrodka porowatego ulega osiadananiu, a następnie następuje proces odwrotny rozrzedzania. Inaczej sprawa ma się w przypadku filtracji z dołu do góry. Jak widać z wykresów, słup cały czas podlega rozrzedzaniu i nie występują osiadanania w całym obszarze ośrodka porowatego.

Proces osiadań lub pęcznienia w czasie dla różnych poziomów słupa ośrodka przedstawiono na rys.8.10.

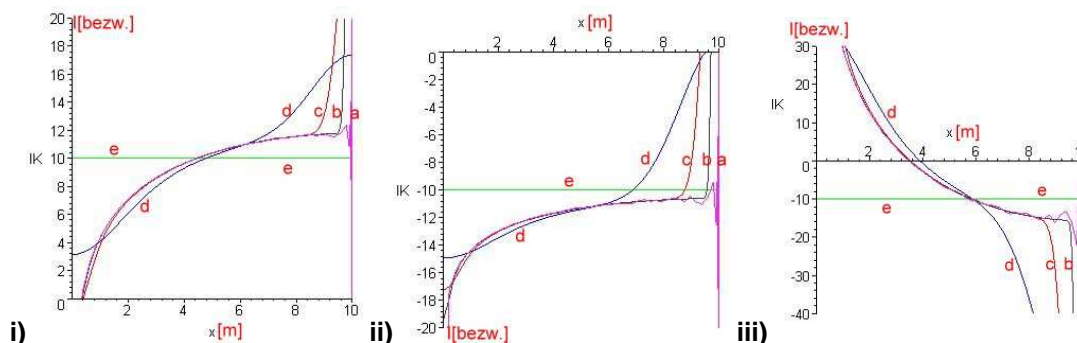


Rys. 8.10. Zmiana przemieszczeń w szkielecie ośrodka porowatego dla kilku czasów pełzania w przypadku:

- i) filtracja góra \Rightarrow dół $p = 0kPa$, $p_a = 20kPa$, $p_b = 10kPa$;
- ii) filtracja dół \Rightarrow góra $p = 0kPa$, $p_a = 10kPa$, $p_b = 20kPa$;
- iii) filtracja dół \Rightarrow góra $p = 300kPa$, $p_a = 10kPa$, $p_b = 20kPa$.

Dla odpowiednio długiego czasu górna powierzchnia słupa ośrodka zmierza w obu przypadkach filtracji do tej samej wielkości pęcznienia próbki. Jednakże, jeżeli dobrze przyjrzymy się wykresom 8.10-i, 8.10-ii zauważymy, że przypadku filtracji z dołu do góry próbka jest ostatecznie bardziej rozrzedzona w dolnej części w porównaniu z filtracją z góry do dołu . Porównując wykresy 8.10-iii i 8.10-i zauważymy, że osiadanania próbki poddanej procesowi filtracji różnią się znacznie od osiadań wywołanych obciążeniem w warunkach braku filtracji. Wartość bezwzględna osiadań jest też znacznie mniejsza od osiadań w warunkach równowagi ciśnień hydrostatycznych na brzegach słupa.

Dla porównania przedstawiono funkcję spadku hydraulicznego wytworzonego przez gradient hydrauliczny i obciążenie dla tych samych przedziałów czasu na rys.8. 11.



Rys. 8.11. Funkcja spadku hydraulicznego dla kilku czasów pełzania w przypadku:

- i) filtracja góra \Rightarrow dół $p = 0kPa$, $p_a = 20kPa$, $p_b = 10kPa$;
- ii) filtracja dół \Rightarrow góra $p = 0kPa$, $p_a = 10kPa$, $p_b = 20kPa$;
- iii) filtracja dół \Rightarrow góra $p = 300kPa$, $p_a = 10kPa$, $p_b = 20kPa$.

Zmiana spadku hydraulicznego obrazuje również zmianę prędkości filtracji, oczywiście ze znakiem przeciwnym. Filtracja w pierwszym przypadku odbywa się w prawie całym przedziale czasowym z góry do dołu, jedynie w pobliżu dolnego brzegu słupa w czasach początkowych konsolidacji obserwuje się przepływ w kierunku przeciwnym. Inaczej wygląda przebieg zmienności spadku hydraulicznego i prędkości w drugim przypadku, tzn. przepływu filtracyjnego z dołu do góry. Obszar słupa ośrodka w części górnej, gdzie występuje przepływ w kierunku odwrotnym, jest większy. Wykresy na rys.8.11

obrazują również, w jakim stopniu przyjmowane w teorii przepływów przez ośrodki nieodkształcalne równania różnią się od modelu przepływu przez ośrodki odkształcalne.

8.5.2 Zagadnienie konsolidacji jednowymiarowej wywołanej działaniem obciążenia, potencjału hydraulicznego i działania pola elektrycznego.

Poniżej przeanalizujemy proces konsolidacji słupa ośrodka porowatego, którego cząstki stałe zawierają niezrównoważony ładunek elektryczny poddanego działaniu obciążenia i gradientu potencjału elektrycznego. Ośrodkiem takim mogą być grunty spoiste zbudowane z minerałów wtórnych, jak illit, montmorylonit lub kaolinit. Mogą to być również materiały biologiczne, jak np. kości, w których na skutek gradientu koncentracji jonów wytwarza się niezrównoważony ładunek elektryczny. Badania dotyczące tych problemów w zastosowaniu do nauk medycznych, także do badań trwałości materiałów budowlanych stanowią obecnie tematykę budzącą duże zainteresowanie inżynierów, technologów i badaczy. Zagadnieniem rozwiązania zagadnień brzegowych teorii konsolidacji elektrohydrodynamicznej metodami analitycznymi zajmował się [Strzelecki, 1982], [Auriault i inni, 1981][Emmrich, 1984], [Bauer i inni, 1980a, 1980b, 1980c, 1981].

Model konsolidacji elektrohydrodynamicznej został omówiony szczegółowo w podrozdziale IV.3.3.2.4 Przypomnijmy, że równania wyjściowe przepływu cieczy i prądu elektrycznego mają postać:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= L_{11}gradp + L_{12}grad\epsilon, \\ \vec{j} &= L_{21}gradp + L_{22}grad\epsilon,\end{aligned}\tag{9.42}$$

gdzie:

- p oznacza ciśnienie hydrostatyczne w cieczy;
- ϵ oznacza potencjał elektryczny;
- \vec{v} jest wektorem prędkości filtracji;
- \vec{j} jest wektorem gęstości przepływającego prądu elektrycznego;
- L_{11} jest współczynnikiem przepuszczalności o wymiarze $\left[\frac{m^4}{Ns}\right]$;
- L_{12} jest współczynnikiem Helmholtza – Smoluchowskiego o wymiarze $\left[\frac{A}{Nm^2}\right]$;
- L_{21} jest współczynnikiem przewodności prądu na skutek gradientu ciśnienia cieczy równy co do wartości współczynnikowi Helmholtza – Smoluchowskiego o wymiarze $\left[\frac{A}{Nm^2}\right]$;
- L_{22} jest współczynnikiem przewodności elektrycznej cieczy w porach o wymiarze $\left[\frac{A}{Vm}\right]$.

Układ równań konsolidacji elektrohydrodynamicznej z pominięciem sił bezwładności i sił ciężkości ośrodka jest następujący:

$$\begin{aligned}N\nabla^2 u_i + (M + N)\epsilon_{,i} &= -\frac{H}{R}\sigma_{,i}, \\ K\nabla^2\sigma - \frac{L_{12}}{L_{21}}D_f\nabla^2\epsilon &= \frac{1}{R}\dot{\sigma} - \frac{H}{R}\dot{\epsilon}, \\ \nabla^2\left(\frac{L_{21}}{f^2}\sigma + \frac{L_{22}}{f}\epsilon + D_f\dot{\epsilon}\right) &= 0,\end{aligned}\tag{9.43}$$

gdzie

- $K = \frac{1}{f^2} \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}}{L_{22}};$
- $L_{11} = -\frac{k}{\rho g}$ przy czym k jest współczynnikiem filtracji, ρg oznacza ciężar właściwy cieczy;
- $L_{12} = k_e = \frac{1}{f} \frac{b_{12}}{b_{11}b_{22} - b_{12}^2};$ przy czym k_e jest współczynnikiem przepuszczalności elektrokinetycznej określonej przez Helmholtza – Smoluchowskiego, b_{11} określa współczynnik oporu hydraulicznego filtracji, b_{22} jest oporem właściwym cieczy dla przepływu prądu elektrycznego, a b_{12} jest stałą sprzężenia pomiędzy przepływem hydraulicznym cieczy i jonów uwodnionych w cieczy.

Wprowadzając nowe oznaczenia:

$$\hat{L}_{21} = \frac{L_{12}}{f^2}; \hat{L}_{12} = -\frac{L_{12}}{f}; \hat{L}_{22} = -\frac{L_{22}}{f}; \hat{L}_{11} = \frac{L_{11}}{f^2}, \quad (9.44)$$

obliczymy $K = \frac{\hat{L}_{11}\hat{L}_{22} - \hat{L}_{12}\hat{L}_{21}}{\hat{L}_{22}}$ i układ równań konsolidacji elektrohydrodynamicznej ma postać:

$$\begin{aligned} N\nabla^2 u_i + (M + N)\varepsilon_{,i} &= -\frac{H}{R}\sigma_{,i}, \\ K\nabla^2 \sigma - \frac{\hat{L}_{12}}{\hat{L}_{21}} D_f \nabla^2 \varepsilon &= \frac{1}{R}\dot{\sigma} - \frac{H}{R}\dot{\varepsilon}, \\ \nabla^2 (\hat{L}_{21}\sigma + \hat{L}_{22}\varepsilon + D_f \dot{\varepsilon}) &= 0. \end{aligned} \quad (9.45)$$

Związki fizyczne są identyczne jak w przypadku klasycznego modelu Biota i wyrażają się wzorami:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2N\varepsilon_{ij} + (A\varepsilon + Q\theta)\delta_{ij}, \\ \sigma &= Q\varepsilon + R\theta. \end{aligned} \quad (9.46)$$

Podobnie jak w poprzednim przypadku wszelkie rodzaje obciążenia przykładane są w sposób natychmiastowy w chwili $t = +0$, co odpowiada funkcji Heaviseida. Uzyskanie rozwiązania zachowania się ośrodka w przypadku obciążenia zmiennego w czasie jest możliwe przy wykorzystaniu całki Duhamela.

Zakładając w rozważanym zagadnieniu, że składowe wektora przemieszczenia \vec{u} :

$$u_1 = u_2 = 0,$$

oznaczymy składową $u_3 = u$. Dla przypadku jednowymiarowego związki fizyczne mają postać:

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= (2N + M)\varepsilon + \frac{Q^2}{R}\sigma, \\ \sigma &= Q\varepsilon + R\theta, \end{aligned} \quad (9.47)$$

gdzie związek geometryczny ma postać: $\varepsilon = \varepsilon_{33} = u_{,3}$.

Równania procesu konsolidacji upraszczają się w tym przypadku do układu dwóch równań z dwoma niewiadomymi:

- równania równowagi w przemieszczeniach:

$$(M + 2N)u_{,33} = -\frac{H}{R}\sigma_{,3}; \quad (9.48)$$

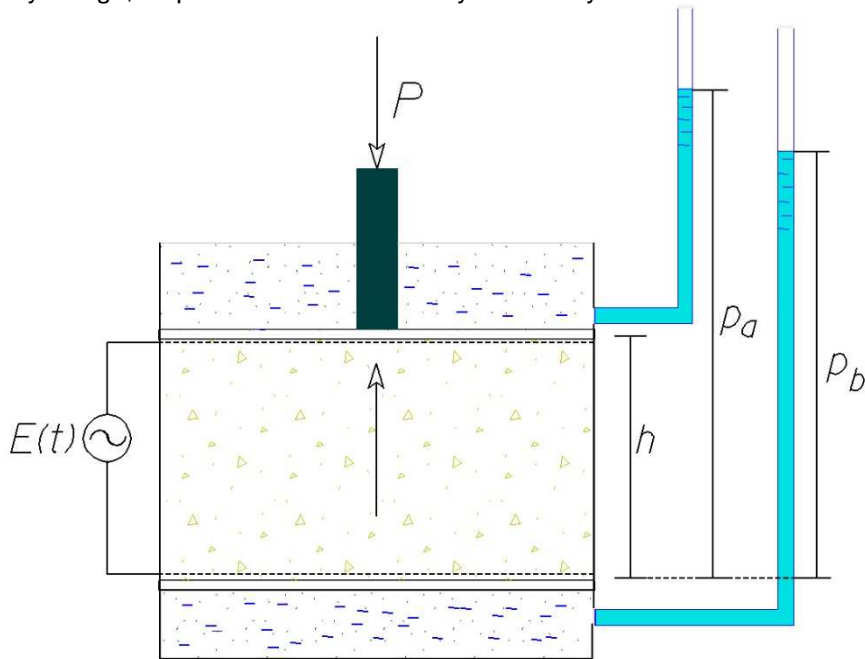
- równanie przepływu Darcy – Biota:

$$K\sigma_{,33} = \frac{1}{R}\dot{\sigma} - \frac{H}{R}\dot{u}_{,3} + \frac{\hat{L}_{12}}{\hat{L}_{22}}D_f\dot{\epsilon}_{,33}; \quad (9.49)$$

- uogólnione równanie przepływu prądu elektrycznego:

$$\hat{L}_{21}\sigma_{,33} + \hat{L}_{22}\epsilon_{,33} + D_f\dot{\epsilon}_{,33} = 0. \quad (9.50)$$

W przypadku niektórych zadań w równaniach (9.48) do (9.50) uwzględniane są funkcje źródła, ale ze wzgl. na komplikacje rachunkowe pominiemy je w rozważaniach. Będziemy rozważać konsolidację wywołaną działaniem obciążenia zewnętrznego i gradientu ciśnień hydrostatycznych oraz gradientu potencjału elektrycznego, co przedstawiono schematycznie na rys. 8.12.



Rys. 8.12. Schemat zagadnienia jednowymiarowej konsolidacji elektrohydrodynamicznej.

Warunki graniczne zagadnienia:

Warunki brzegowe:

- warunek obciążenia brzegu górnego:

$$\sigma_{33}(h,t) + \sigma(h,t) = -(p + p_a)\eta(t); \quad (9.51)$$

- warunek naprężeń w cieczy na brzegu górnym:

$$\sigma(h,t) = -p_a\eta(t); \quad (9.52)$$

7. warunek naprężeń na brzegu dolnym:

$$\sigma(0, t) = -p_b \eta(t); \quad (9.53)$$

8. warunek przemieszczeń na brzegu dolnym

$$u(0, t) = 0; \quad (9.54)$$

9. warunek potencjału przyłożonego do brzegu górnego (założenie działania prądu pulsującego jest bliższe zastosowaniom inżynierskim wzmacniania gruntów metodą elektroosmozy niż stosowanie prądu stałego):

$$\epsilon(h, t) = u(t) = u_0 \sin(\omega t) + u_1 \eta(t); \quad (9.55)$$

10. warunek potencjału przyłożonego do brzegu dolnego

$$\epsilon = 0. \quad (9.56)$$

Warunek początkowy:

Zakładamy, że w chwili $t = +0$ funkcje $\sigma^{(0)}$ i $u^{(0)}$ spełniają układ równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} (M + 2N)u_{,33}^{(0)} &= -\frac{H}{R}\sigma_{,3}^{(0)} \\ \frac{1}{R}\sigma^{(0)} - \frac{H}{R}u_{,3}^{(0)} + \frac{\hat{L}_{12}}{\hat{L}_{22}}D_f \epsilon_{,33}^{(0)} &= 0 \\ \epsilon_{,33}^{(0)} &= 0 \end{aligned} \quad (9.57)$$

Jak widać warunek początkowy sprowadza się do podobnej postaci jak w przypadku klasycznego modelu Darcy-Biota:

$$\begin{aligned} (M + 2N)u_{,33}^{(0)} &= -\frac{H}{R}\sigma_{,3}^{(0)} \\ \frac{1}{R}\sigma^{(0)} - \frac{H}{R}u_{,3}^{(0)} &= 0 \end{aligned} \quad (9.58)$$

Rozwiązaniem zagadnienia wpływu na konsolidację gruntu spoistego prądu pulsującego zajmował się w swojej pracy doktorskiej [Emmrich, 1984].

Dokonajmy na funkcjach naprężenia w cieczy, naprężenia w szkielecie, przemieszczenia, potencjału elektrycznego i odkształcenia prostego przekształcenia Laplace'a. Funkcje obrazu w przestrzeni Laplace'a oznaczmy:

$$(\tilde{\sigma}_{33}, \tilde{\sigma}, \tilde{u}, \tilde{\epsilon}, \tilde{\theta}, \tilde{\epsilon}) = L(\sigma_{33}, \sigma, u, \epsilon, \theta, \epsilon). \quad (9.59)$$

Uwzględniając warunek początkowy układ równań konsolidacji elektrohydrodynamicznej w przestrzeni Laplace'a ma postać:

$$(M + 2N)\tilde{u}_{,33} = -\frac{H}{R}\tilde{\sigma}_{,3}, \quad (9.60)$$

$$K\tilde{\sigma}_{,33} = \frac{s}{R}\tilde{\sigma} - \frac{Hs}{R}\tilde{u}_{,3} + \frac{\hat{L}_{12}}{\hat{L}_{22}}D_f s\tilde{\epsilon}_{,33}, \quad (9.61)$$

$$\hat{L}_{21}\tilde{\sigma}_{,33} + \hat{L}_{22}\tilde{\epsilon}_{,33} + D_f s\tilde{\epsilon}_{,33} = 0. \quad (9.62)$$

Związki fizyczne w przestrzeni Laplace'a mają postać:

$$\tilde{\sigma}_{33} = (2N + M)\tilde{\epsilon} + \frac{Q}{R}\tilde{\sigma}, \quad (9.63)$$

$$\tilde{\sigma} = Q\tilde{\epsilon} + R\tilde{\theta}.$$

Warunki brzegowe po wykonaniu operacji przekształcenia Laplace'a mają postać:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{33}(h,t) + \tilde{\sigma}(h,t) &= -\frac{(p+p_a)}{s}, \\ \tilde{\sigma}(h,t) &= -\frac{p_a}{s}, \\ \tilde{\sigma}(0,t) &= -\frac{p_b}{s}, \\ \tilde{u}(0,t) &= 0, \\ \tilde{\epsilon}(h,t) &= \frac{u_0\omega}{s^2 + \omega^2} + \frac{u_1}{s}, \\ \tilde{\epsilon} &= 0. \end{aligned} \quad (9.64)$$

Różniczkując równanie przepływu (9.61) po ∂x_3 i uwzględniając w nim równanie (9.60) i (9.62) otrzymamy równanie różniczkowe zwyczajne trzeciego rzędu:

$$\tilde{\sigma}_{,333} - P(s)e\tilde{\sigma}_{,3} = 0, \quad (9.65)$$

gdzie:

$$e = \frac{R(M + 2N) + H^2}{KR^2(M + 2N)},$$

$$P(s) = \frac{s(\hat{L}_{22} + D_f s)}{K\hat{L}_{22} + \hat{L}_{11}D_f s}.$$

Równania (9.65) jest typu Eulera i rozwiązanie ma postać:

$$\tilde{\sigma} = A\exp(x_3\sqrt{eP(s)}) + B\exp(-x_3\sqrt{eP(s)}) + C, \quad (9.66)$$

gdzie A, B, C są funkcjami parametru różniczkowania s .

Różniczkując rozwiązanie (9.66) po ∂x_3 i wstawiając je do równania (9.60) otrzymuje się po dwukrotnym całkowaniu obraz funkcji przemieszczeń:

$$\tilde{u} = -\frac{\zeta}{\sqrt{eP(s)}} \left[A\exp(x_3\sqrt{eP(s)}) - B\exp(-x_3\sqrt{eP(s)}) \right] + Dx_3 + E, \quad (9.67)$$

gdzie: $\zeta = \frac{H}{R(M+2N)}$ oraz D i E są funkcjami parametru różniczkowania s .

Różniczkując rozwiązanie (9.67) dwukrotnie po ∂x_3 i wprowadzając je do równania (9.62) otrzymuje się po ponownym dwukrotnym całkowaniu obraz funkcji potencjału elektrycznego:

$$\tilde{\epsilon} = -\frac{\hat{L}_{21}}{\hat{L}_{22} + D_f s} \left[A \exp(x_3 \sqrt{eP(s)}) + B \exp(-x_3 \sqrt{eP(s)}) \right] + Gx_3 + \hat{L}, \quad (9.68)$$

gdzie G i L są funkcjami parametru różniczkowania s .

Podstawiając rozwiązania (9.67) i (9.68) do równania przepływu (9.61) otrzymuje się dodatkowy związek pomiędzy stałymi:

$$C = HD. \quad (9.69)$$

Podstawiając do warunków brzegowych (9.64) uzyskane funkcje rozwiązania (9.66), (9.67) i (9.68) dostajemy układ równań algebraicznych z których możemy wyznaczyć stałe A, B, C, D, E, G, L :

$$\begin{aligned} A &= \frac{HD \left[\exp(-h\sqrt{eP(s)}) - 1 \right] + \frac{p_b}{s} \exp(-h\sqrt{eP(s)}) - \frac{p_a}{s}}{2 \sinh(h\sqrt{eP(s)})}, \\ B &= \frac{-HD \left[\exp(-h\sqrt{eP(s)}) - 1 \right] - \frac{p_b}{s} \exp(-h\sqrt{eP(s)}) + \frac{p_a}{s}}{2 \sinh(h\sqrt{eP(s)})}, \\ C &= -H \left[\frac{p}{s} + \frac{p_a}{s} \frac{H-Q}{R} \right] \hat{g}, \\ D &= - \left[\frac{p}{s} + \frac{p_a}{s} \frac{H-Q}{R} \right] \hat{g}, \\ E &= \frac{\zeta}{\sqrt{eP(s)}} \frac{HD \left[\cosh(h\sqrt{eP(s)}) - 1 \right] + \frac{p_b}{s} \cosh(h\sqrt{eP(s)}) - \frac{p_a}{s}}{\sinh(h\sqrt{eP(s)})}, \\ G &= \frac{1}{h} \left[-\frac{\hat{L}_{21}}{\hat{L}_{22} + D_f s} \frac{p_a - p_b}{s} + u_0 \frac{\omega}{\omega^2 + s^2} + \frac{u_1}{s} \right], \\ \hat{L} &= -\frac{\hat{L}_{21}}{\hat{L}_{22} + D_f s} \left(HD + \frac{p_b}{s} \right). \end{aligned} \quad (9.70)$$

gdzie:

$$\zeta = \frac{H}{R(M+2N)}, \quad \hat{g} = \frac{R}{H^2 + R(M+2N)},$$

$$P(s) = \frac{s(\hat{L}_{22} + D_f s)}{K\hat{L}_{22} + \hat{L}_{11}D_f s}, \quad e = \frac{H^2 + R(M+2N)}{R^2(M+2N)}.$$

Po wprowadzeniu stałych (9.70) do rozwiązań (9.66) do (9.68) otrzymujemy obrazy poszukiwanych funkcji w przestrzeni Laplace'a w postaci:

1. obrazu funkcji naprężeń hydrostatycznych w cieczy:

$$\tilde{\sigma} = -HD \left\{ \frac{\sinh \left[(h-x_3)\sqrt{eP(s)} \right] + \sinh \left(x_3\sqrt{eP(s)} \right)}{\sinh \left(h\sqrt{eP(s)} \right)} - 1 \right\} +$$

$$-\frac{p_b}{s} \frac{\sinh \left[(h-x_3)\sqrt{eP(s)} \right]}{\sinh \left(h\sqrt{eP(s)} \right)} - \frac{p_a}{s} \frac{\sinh \left(x_3\sqrt{eP(s)} \right)}{\sinh \left(h\sqrt{eP(s)} \right)}; \quad (9.71)$$

2. obrazu funkcji przemieszczeń:

$$\tilde{u} = -\frac{\zeta}{\sqrt{eP(s)}} \left\{ \frac{HD \left[\cosh \left[(h-x_3)\sqrt{eP(s)} \right] - \cosh \left((x_3)\sqrt{eP(s)} \right) - \cosh \left((h)\sqrt{eP(s)} \right) + 1 \right]}{\sinh \left((h)\sqrt{eP(s)} \right)} + \right.$$

$$+ \frac{p_b}{s} \left[\frac{\cosh \left[(h-x_3)\sqrt{eP(s)} \right] - \cosh \left((h)\sqrt{eP(s)} \right)}{\sinh \left((h)\sqrt{eP(s)} \right)} \right] +$$

$$\left. - \frac{p_a}{s} \left[\frac{\cosh \left((x_3)\sqrt{eP(s)} \right) - 1}{\sinh \left((h)\sqrt{eP(s)} \right)} \right] \right\} - \left[\frac{p}{s} + \frac{p_a}{s} \frac{H-Q}{R} \right] \hat{g}x_3; \quad (9.72)$$

3. obrazu funkcji potencjału elektrycznego:

$$\tilde{\epsilon} = -\frac{\hat{L}_{21}}{\hat{L}_{22} + D_f s} \left\{ -HD \left[\frac{\sinh \left[(h-x_3)\sqrt{eP(s)} \right] + \sinh \left[(x_3)\sqrt{eP(s)} \right]}{\sinh \left[(h)\sqrt{eP(s)} \right]} - 1 \right] + \right.$$

$$\left. - \frac{p_b}{s} \left[\frac{\sinh \left[(h-x_3)\sqrt{eP(s)} \right]}{\sinh \left[(h)\sqrt{eP(s)} \right]} - 1 \right] - \frac{p_a}{s} \frac{\sinh \left[(x_3)\sqrt{eP(s)} \right]}{\sinh \left[(h)\sqrt{eP(s)} \right]} \right\} +$$

$$\frac{x_3}{h} \left[-\frac{\hat{L}_{21}}{\hat{L}_{22} + D_f s} \left(\frac{p_a}{s} - \frac{p_b}{s} \right) + \frac{u_0 \omega}{\omega^2 + s^2} + \frac{u_1}{s} \right]. \quad (9.73)$$

Aby znaleźć retransformaty powyższych obrazów funkcji, posłużymy się teorią residuów []. Przyjmujemy, że transformaty naszych rozwiązań są funkcjami wymiernymi właściwymi i mają postać:

$$\tilde{F}(s) = \frac{LI(s)}{MI(s)}, \quad (9.74)$$

gdzie $LI(s)$ i $MI(s)$ są wielomianami pierwszymi względem siebie i stopień $LI(s)$ jest mniejszy od stopnia $MI(s)$. Możemy więc, skorzystać z twierdzenia Cauchy'ego o residuach, oraz z lematu Jordana [], że oryginałem funkcji wymiernej o biegunach jednokrotnych s_k gdzie $k = 1, 2, \dots, n$ jest:

$$L^{-1} \left[\frac{LI(s)}{MI(s)} \right] = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{s \rightarrow s_k} \left[\frac{LI(s)}{MI(s)} \exp(st) \right] = \sum_{k=1}^n \frac{LI(s_k)}{MI'(s_k)} e^{s_k t} \quad (9.75)$$

Wśród pojedynczych biegunów funkcji wymiernej jest $s_0 = 0$. Stąd można przedstawić funkcję $\tilde{F}(s)$ w następującej postaci:

$$\tilde{F}(s) = \frac{LI(s)}{sMI(s)} \quad (9.76)$$

gdzie dla wszystkich transformacji rozwiązań stopień wielomianu $MI(s)$ jest mniejszy lub równy stopniowi wielomianu $LI(s)$. Oryginał funkcji rozwiązań wyrazi się z terii residuów wzorem:

$$L^{-1} [\tilde{F}(s)] = \frac{LI(0)}{MI(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{LI(s_k)}{s_k MI'(s_k)} e^{s_k t} \quad (9.77)$$

Przy czym kolejne bieguny otrzymuje się z przyrównania $MI(s_k)$ do zera.

Rozważmy dla przykładu funkcją naprężenia hydrostatycznego w cieczy $\tilde{\sigma}$. Funkcja w mianowniku ma postać:

$$MI(s) = \sinh(h\sqrt{eP(s)}). \quad (9.78)$$

Podstawiając

$$h\sqrt{eP(s_k)} = iB_k$$

otrzymujemy:

$$P(s_k) = -\frac{B_k^2}{h^2 e}$$

oraz korzystając z zależności:

$$\sinh(i\alpha x) = i \sin(\alpha x),$$

dostajemy równanie:

$$\sin(B_k) = 0.$$

Rozwiązanie tego równania ma postać:

$$B_k = n\pi . \quad (9.79)$$

Stąd dostajemy równanie:

$$P(s_k) = -\frac{(n\pi)^2}{h^2 e} . \quad (9.80)$$

Co sprowadza się do rozwiązania równania kwadratowego:

$$\frac{s_k (\hat{L}_{22} + D_f s_k)}{K\hat{L}_{22} + \hat{L}_{11} D_f s_k} = -\frac{(n\pi)^2}{h^2 e} . \quad (9.81)$$

Powyższe równanie można przedstawić w formie:

$$s_k^2 + r s_k + q = 0 , \quad (9.82)$$

gdzie:

$$r = \frac{\hat{L}_{22}}{D_f} + \frac{\hat{L}_{11} (n\pi)^2}{h^2 e} , \quad (9.83)$$

$$q = \frac{K\hat{L}_{22} (n\pi)^2}{D_f h^2 e} .$$

Rozwiązaniem tego równania są dwa bieguny:

$$s_{1/2} = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} - q} . \quad (9.84)$$

Uwzględniając, że:

$$P'(s_k) = \frac{\hat{L}_{22}^2 K + 2D_f K\hat{L}_{22} s_k + \hat{L}_{11} D_f^2 s_k^2}{(K\hat{L}_{22} + \hat{L}_{11} D_f s_k)^2} \quad (9.85)$$

możemy określić oryginały wszystkich funkcji rozwiązania:

1. funkcja naprężeń hydrostatycznych w cieczy $\sigma(x_3, t)$

$$\sigma(x_3, t) = H \left[p + p_a \frac{H - Q}{R} \right] \hat{g} S_1 - p_b \left[1 - \frac{x_3}{h} + S_2 \right] - p_a \left[\frac{x_3}{h} - S_3 \right]; \quad (9.86)$$

2. funkcja przemieszczeń szkieletu ośrodka porowatego $u(x_3, t)$

$$\begin{aligned}
u(x_3, t) = & \zeta \left\{ H \left[p + p_a \frac{H-Q}{R} \right] \hat{g}S_4 - p_b \left[\frac{x_3^2}{2h} - x_3 + S_5 \right] \right. \\
& \left. + p_a \left[\frac{x_3^2}{2h} + S_6 \right] \right\} - \frac{p + p_a \frac{H-Q}{R}}{(M + 2N)} x_3;
\end{aligned} \tag{9.87}$$

3. funkcja potencjału pola elektrycznego $\in(x_3, t)$

$$\begin{aligned}
\in(x_3, t) = & -\hat{L}_{21} \left\{ H \left[p + p_a \frac{H-Q}{R} \right] \hat{g}S_7 - p_b S_8 + p_a S_9 \right\} + \\
& + \frac{x_3}{h} [u_0 \sin(\omega t) + u_1];
\end{aligned} \tag{9.88}$$

4. funkcja naprężeń w szkielecie ośrodka porowatego $\sigma_{33}(x_3, t)$

$$\begin{aligned}
\sigma_{33}(x_3, t) = & \frac{H-Q}{R} \left\{ -H \left[p + p_a \frac{H-Q}{R} \right] \hat{g}S_1 - p_b \left[\frac{x_3}{h} - 1 - S_2 \right] + \right. \\
& \left. + p_a \left[\frac{x_3}{h} - S_3 \right] \right\} - p - p_a \frac{H-Q}{R};
\end{aligned} \tag{9.89}$$

5. funkcję gęstości prądu elektrycznego $j(x_3, t)$

$$\begin{aligned}
j(x_3, t) = & \hat{L}_{21} \left\{ H \left[p + p_a \frac{H-Q}{R} \right] \hat{g}S_{11} - p_b S_{12} + p_a S_{13} \right\} + \\
& \hat{L}_{22} [u_0 \sin(\omega t) + u_1] - \frac{\hat{L}_{21}}{h} (p_a - p_b);
\end{aligned} \tag{9.90}$$

6. funkcję prędkości filtracji $v(x_3, t)$

$$\begin{aligned}
v(x_3, t) = & H \left[p + p_a \frac{H-Q}{R} \right] \hat{g}S_{14} - p_b S_{15} + p_a S_{16} + \\
& + \hat{L}_{12} [u_0 \sin(\omega t) + u_1] \frac{1}{h} - \frac{\hat{L}_{11}}{h} (p_a - p_b);
\end{aligned} \tag{9.91}$$

7. funkcję dylatacji szkieletu ośrodka porowatego $\varepsilon(x_3, t)$

$$\begin{aligned}
\varepsilon(x_3, t) = & \zeta \left\{ -H \left[p + p_a \frac{H-Q}{R} \right] \hat{g}S_1 - p_b \left[\frac{x_3}{h} - 1 - S_2 \right] + \right. \\
& \left. p_a \left[\frac{x_3}{h} - S_3 \right] \right\} - \frac{p + p_a \frac{H-Q}{R}}{(M + 2N)}
\end{aligned} \tag{9.92}$$

8. funkcję dylatacji cieczy $\theta(x_3, t)$

$$\theta(x_3, t) = \frac{\sigma(x_3, t)}{R} - \frac{Q\varepsilon(x_3, t)}{R}; \quad (9.93)$$

9. funkcję osiadań $u(t)$

$$u(t) = \zeta \left\{ -H \left[p + p_a \frac{H-Q}{R} \right] \hat{g}S_{10} - p_b \left[-\frac{h}{2} - S_{10} \right] + \right. \\ \left. + p_a \left[\frac{h}{2} + S_{10} \right] \right\} - h \frac{p + p_a \frac{H-Q}{R}}{(M+2N)}. \quad (9.94)$$

W powyższych rozwiązaniach występują szeregi:

$$S_1 = \frac{2\pi}{h^2 e} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1-(-1)^n]n}{s_k(k)P'(s_k(k))} \sin\left(\pi n \frac{x_3}{h}\right) \exp(s_k(k)t),$$

$$S_2 = \frac{2\pi}{h^2 e} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{s_k(k)P'(s_k(k))} \sin\left(\pi n \frac{x_3}{h}\right) \exp(s_k(k)t),$$

$$S_3 = \frac{2\pi}{h^2 e} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{s_k(k)P'(s_k(k))} \sin\left(\pi n \frac{x_3}{h}\right) \exp(s_k(k)t),$$

$$S_4 = \frac{2}{he} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1-(-1)^n]n}{s_k(k)P'(s_k(k))} \left[\cos\left(\pi n \frac{x_3}{h}\right) - 1 \right] \exp(s_k(k)t)$$

$$S_5 = \frac{2}{he} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s_k(k)P'(s_k(k))} \left[\cos\left(\pi n \frac{x_3}{h}\right) - 1 \right] \exp(s_k(k)t)$$

$$S_6 = \frac{2}{he} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{s_k(k)P'(s_k(k))} \left[\cos\left(\pi n \frac{x_3}{h}\right) - 1 \right] \exp(s_k(k)t)$$

$$S_7 = \frac{2\pi}{h^2 e} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1-(-1)^n]n}{s_k(k)P'(s_k(k))} \frac{\sin\left(n\pi \frac{x_3}{h}\right)}{(\hat{L}_{22} + D_f s_k(k))} \exp(s_k(k)t)$$

$$S_8 = \frac{2\pi}{h^2 e} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{s_k(k)P'(s_k(k))} \frac{\sin\left(n\pi \frac{x_3}{h}\right)}{(\hat{L}_{22} + D_f s_k(k))} \exp(s_k(k)t)$$

$$S_9 = \frac{2\pi}{h^2 e} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{s_k(k)P'(s_k(k))} \frac{\sin\left(n\pi \frac{x_3}{h}\right)}{(\hat{L}_{22} + D_f s_k(k))} \exp(s_k(k)t)$$

$$S_{10} = \frac{2}{he} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1-(-1)^n]n}{s_k(k)P'(s_k(k))} \exp(s_k(k)t),$$

$$\begin{aligned}
S_{11} &= \frac{2\pi^2}{h^3 e} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n] n^2}{s_k(k) P'(s_k(k))} \cos\left(n\pi \frac{x_3}{h}\right) \left(1 - \frac{\hat{L}_{22}}{\hat{L}_{22} + D_f s_k(k)}\right) \exp(s_k(k)t), \\
S_{12} &= \frac{2\pi^2}{h^3 e} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{s_k(k) P'(s_k(k))} \cos\left(n\pi \frac{x_3}{h}\right) \left(1 - \frac{\hat{L}_{22}}{\hat{L}_{22} + D_f s_k(k)}\right) \exp(s_k(k)t), \\
S_{13} &= \frac{2\pi^2}{h^3 e} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{s_k(k) P'(s_k(k))} \cos\left(n\pi \frac{x_3}{h}\right) \left(1 - \frac{\hat{L}_{22}}{\hat{L}_{22} + D_f s_k(k)}\right) \exp(s_k(k)t), \\
S_{14} &= \frac{2\pi^2}{h^3 e} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n] n^2}{s_k(k) P'(s_k(k))} \cos\left(n\pi \frac{x_3}{h}\right) \left(\hat{L}_{11} - \frac{\hat{L}_{21} \hat{L}_{12}}{\hat{L}_{22} + D_f s_k(k)}\right) \exp(s_k(k)t), \\
S_{15} &= \frac{2\pi^2}{h^3 e} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{s_k(k) P'(s_k(k))} \cos\left(n\pi \frac{x_3}{h}\right) \left(\hat{L}_{11} - \frac{\hat{L}_{21} \hat{L}_{12}}{\hat{L}_{22} + D_f s_k(k)}\right) \exp(s_k(k)t), \\
S_{16} &= \frac{2\pi^2}{h^3 e} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{s_k(k) P'(s_k(k))} \cos\left(n\pi \frac{x_3}{h}\right) \left(\hat{L}_{11} - \frac{\hat{L}_{21} \hat{L}_{12}}{\hat{L}_{22} + D_f s_k(k)}\right) \exp(s_k(k)t).
\end{aligned}$$

W celu sprawdzenia poprawności rozwiązań przeprowadzimy przejścia graniczne dla czasów $t \rightarrow \infty$ i $t \rightarrow 0$ funkcji (9.86) do (9.94). Zbadajmy wstępnie zachowanie się funkcji $\sigma(x_3, t)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(x_3, t) = -p_b \left(1 - \frac{x_3}{h}\right) - p_a \frac{x_3}{h} \quad (9.95)$$

oraz

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sigma(x_3, t) = \begin{cases} -p_a & \text{dla } x_3 = h, \\ -p_b & \text{dla } x_3 = 0. \end{cases} \quad (9.96)$$

Spełnione są więc warunki brzegowe (9.52) i (9.53). Rozważmy następnie funkcje osiadań $u(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = -\frac{p + \frac{H}{R} \frac{p_a - p_b}{2} - \frac{Q}{R} p_a}{(M + 2N)} h. \quad (9.97)$$

W przypadku, gdy $p_a = p_b = 0$ dostaniemy klasyczny wzór dla ośrodka sprężystego:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = -\frac{ph}{(M + 2N)} = -\frac{ph}{E_{oed}}. \quad (9.98)$$

Łatwo sprawdzić, że dla $t \rightarrow 0$ występują osiadania natychmiastowe, które dla przypadku prądu stałego lub wolnozmiennego wynoszą:

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(t) = -\frac{p + p_a \frac{H-Q}{R}}{\frac{H^2}{R} + (M + 2N)}. \quad (9.99)$$

Jak łatwo wykazać funkcja $u(x_3, t)$ przyjmuje dla $x_3 = 0$ wartość zerową, wobec tego spełniony jest warunek brzegowy (9.54).

Funkcja gęstości prądu przyjmuje wartość dla czasu dążącego do nieskończoności:

$$\lim j(t) = -\hat{L}_{22} \left[u_0 \sin(\omega t) + u_1 \right] \frac{1}{h} - \hat{L}_{21} \frac{p_a - p_b}{h} \quad (9.100)$$

W przypadku, gdy przez ośrodek płynie prąd stały funkcja $j(t)$ nie zależy od czasu i ma stałą wartość równą:

$$j(t) = -\hat{L}_{22} \frac{u_1}{h} - \hat{L}_{21} \frac{p_a - p_b}{h}. \quad (9.101)$$

W przypadku, gdy nie występuje przepływ wody wywołany gradientem hydraulicznym dostajemy klasyczne prawo Ohma:

$$j(t) = -\hat{L}_{22} \frac{u_1}{h}. \quad (9.102)$$

Jak łatwo sprawdzić funkcja naprężeń w szkielecie σ_{33} przyjmuje dla $x_3 = h$ i dowolnego czasu wartość:

$$\sigma_{33}(h, t) = -p \quad (9.103)$$

Spełniony jest więc warunek brzegowy (9.51). Można wykazać również, że funkcja potencjału elektrycznego spełnia również warunki brzegowe (9.55) i (9.56) gdyż:

$$\epsilon(x_3, t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x_3 = 0, \\ u_0 \sin(\omega t) + u_1 & \text{dla } x_3 = h. \end{cases} \quad (9.104)$$

8.5.2.1 Przykład liczbowy dla konsolidacji elektrohydrodynamicznej.

Rozważmy przepływ przez pionową kolumnę ciała porowatego o wysokości $h = 10m$, dla którego procesy mechaniczne opisane są modelem konsolidacji elektrohydrodynamicznej.

Parametry efektywne modelu przyjęto za pracę [Emmricha, 1984], który uzyskał je na podstawie badań próbek edometrycznych w warunkach uwzględniających występowanie podczas przepływu pola elektrycznego. Na podstawie cytowanej pracy przyjęto:

1. stałe przepływu elektrohydrodynamicznego:

$$\begin{aligned} L_{11} &= 3 * 10^{-12} m^4 / Ns, \\ L_{12} &= -5.2 * 10^{-8} A / mN, \\ L_{21} &= -5.2 * 10^{-8} A / mN, \\ L_{22} &= 3.5 * 10^{-3} A / mV, \end{aligned} \quad (9.105)$$

2. stałe modelu Biota:

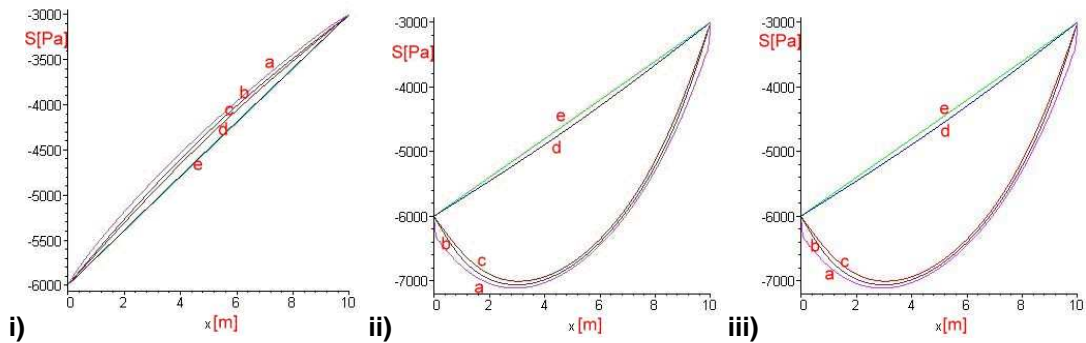
$$\begin{aligned} M &= 2.5 \cdot 10^6 \text{ Pa}, \\ N &= 1.2 \cdot 10^6 \text{ Pa}, \\ R &= 1.5 \cdot 10^6 \text{ Pa}, \\ H &= 7.0 \cdot 10^6 \text{ Pa}, \end{aligned} \tag{9.106}$$

3. parametry fizyczne:

$$\begin{aligned} \text{porowatość } f &= 0.3, \\ \text{ciężar właściwy wody } \rho g &= 10^4 \text{ N/m}^3, \\ \text{stała dielektryczna wody } D_f &= 78.39. \end{aligned}$$

Zgodnie z przyjętymi założeniami rozważamy zagadnienie słupa ośrodka porowatego poddanego działaniu obciążenia na jego górną powierzchnię P_1 , ciśnienia cieczy działającego na tę powierzchnię - P_a i dolną powierzchnię P_b oraz potencjału prądu elektrycznego pulsującego $u = u_0 \sin(\omega t) + u_1$ gdzie $\omega = 2\pi\nu$ (ν oznacza częstotliwość prądu pulsującego).

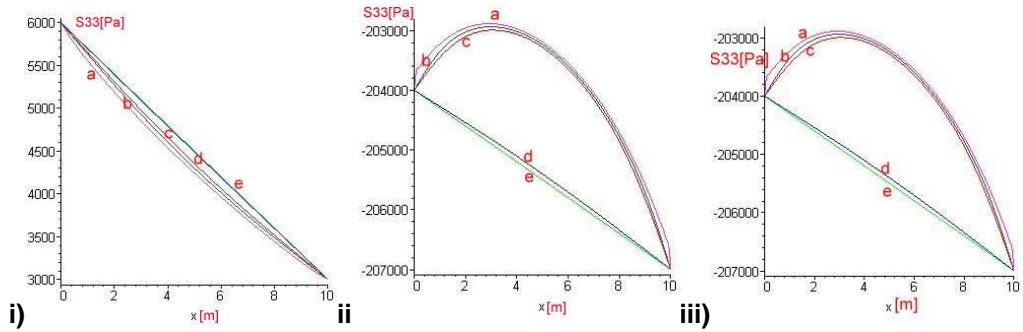
Na rysunkach 8.13 do 8.18 przedstawiono wykresy zmian w czasie naprężenia hydrostatycznego cieczy $\sigma(x, t)$, naprężeń $\sigma_{33}(x, t)$ w szkielecie ośrodka porowatego, osiadań lub pęcznienia słupa $u(h, t)$, potencjału prądu elektrycznego $\epsilon(x, t)$, natężenia prądu elektrycznego $j(x, t)$ oraz prędkości filtracji $v(x, t)$ dla czasów: **a)** $t_1 = 0 \text{ s}$, **b)** $t_2 = 10^4 \text{ s}$, **c)** $t_3 = 5 \cdot 10^5 \text{ s}$, **d)** $t_4 = 10^6 \text{ s}$, **e)** $t_5 = 10^9 \text{ s}$



Rys. 8.13. Wykresy naprężeń hydrostatycznych $\sigma(x, t)$ dla przypadku:

- i) filtracja góra \Rightarrow dół** $P_1 = 0 \text{ Pa}$, $P_a = 10^4 \text{ Pa}$, $P_b = 2 \cdot 10^4 \text{ Pa}$, $u_0 = 0 \text{ V}$, $u_1 = 0 \text{ V}$,
- ii) filtracja dół \Rightarrow góra** $P_1 = 3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $P_a = 10^4 \text{ Pa}$, $P_b = 2 \cdot 10^4 \text{ Pa}$, $u_0 = 0 \text{ V}$, $u_1 = 0 \text{ V}$,
- iii) filtracja dół \Rightarrow góra, prąd: góra \Rightarrow dół** $P_1 = 3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $P_a = 10^4 \text{ Pa}$, $P_b = 2 \cdot 10^4 \text{ Pa}$,
 $u_0 = 20 \text{ V}$, $u_1 = 100 \text{ V}$.

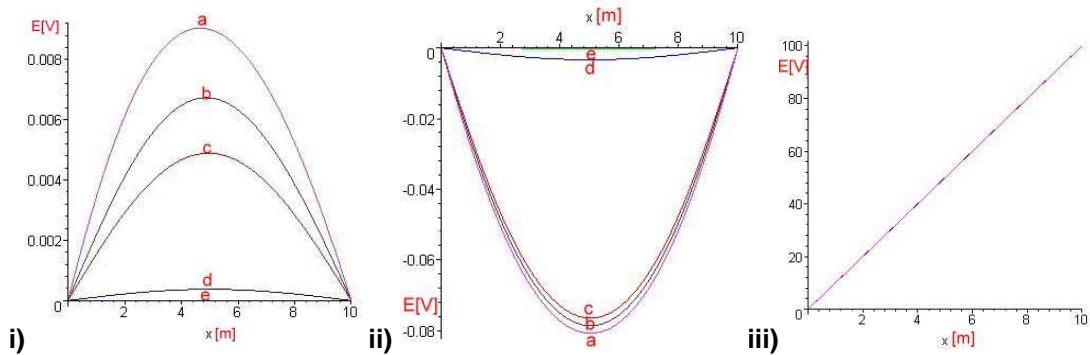
Wykresy naprężeń hydrostatycznych różnią się ilościowo, ale nie jakościowo od wykresów uzyskanych dla klasycznego modelu Biota (porównajmy wykres 8.13 i, ii z wykresami 8.7 i oraz ii. Uwzględnienie własności elektrycznych fazy ciekłej i stałej wpływa na „spłaszczenie wykresów” ewolucji w czasie naprężenia σ . Porównanie wykresów 8.13 ii oraz iii, pokazuje, że dla zadanych warunków brzegowych zagadnienia nie występuje istotna zmiana naprężeń hydrostatycznych w cieczy na skutek przyłożonego pola elektrycznego.



Rys. 8.14. Wykresy naprężenia $\sigma_{33}(x,t)$ dla przypadku:

- i) filtracja góra \Rightarrow dół $P_1 = 0 Pa$, $P_a = 10^4 Pa$, $P_b = 2 \cdot 10^4 Pa$, $u_0 = 0V$, $u_1 = 0V$,
- ii) filtracja dół \Rightarrow góra $P_1 = 3 \cdot 10^5 Pa$, $P_a = 10^4 Pa$, $P_b = 2 \cdot 10^4 Pa$, $u_0 = 0V$, $u_1 = 0V$,
- iii) filtracja dół \Rightarrow góra, prąd: góra \Rightarrow dół $P_1 = 3 \cdot 10^5 Pa$, $P_a = 10^4 Pa$, $P_b = 2 \cdot 10^4 Pa$,
 $u_0 = 20V$, $u_1 = 100V$.

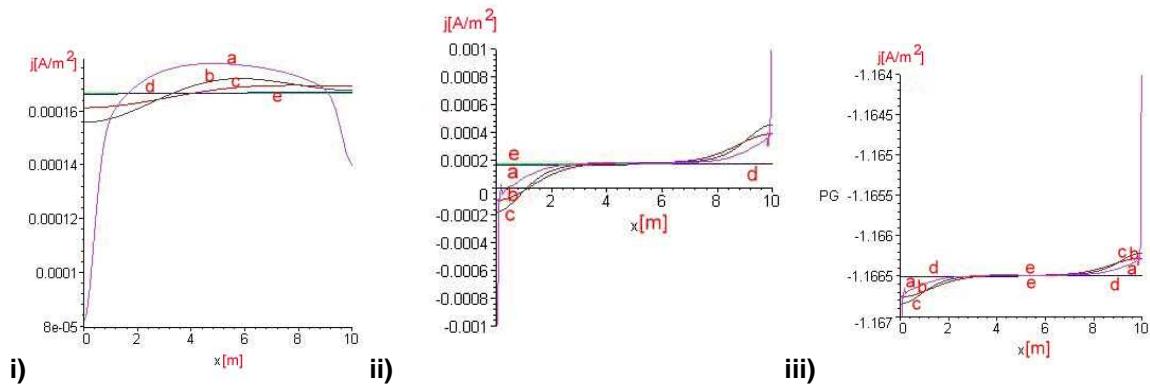
Przedstawione powyżej uwagi odniesione do naprężeń w cieczy σ odnoszą się również do naprężeń w szkieletcie ośrodka porowatego. Zmiana wartości tych naprężeń wynika z przekazywania naprężeń z cieczy na szkielet ośrodka. Nie obserwujemy również istotnych zmian naprężenia $\sigma_{33}(x,t)$ w czasie na skutek przyłożonego potencjału pola elektrycznego. Moim zdaniem wynika to z przyjętych warunków brzegowych zadania.



Rys. 8.15. Wykresy potencjału elektrycznego $\epsilon(x,t)$ dla przypadku

- i) filtracja góra \Rightarrow dół $P_1 = 0 Pa$, $P_a = 10^4 Pa$, $P_b = 2 \cdot 10^4 Pa$, $u_0 = 0V$, $u_1 = 0V$
- ii) filtracja dół \Rightarrow góra $P_1 = 3 \cdot 10^5 Pa$, $P_a = 10^4 Pa$, $P_b = 2 \cdot 10^4 Pa$, $u_0 = 0V$, $u_1 = 0V$,
- iii) filtracja dół \Rightarrow góra, prąd: góra \Rightarrow dół $P_1 = 3 \cdot 10^5 Pa$, $P_a = 10^4 Pa$, $P_b = 2 \cdot 10^4 Pa$,
 $u_0 = 20V$, $u_1 = 100V$

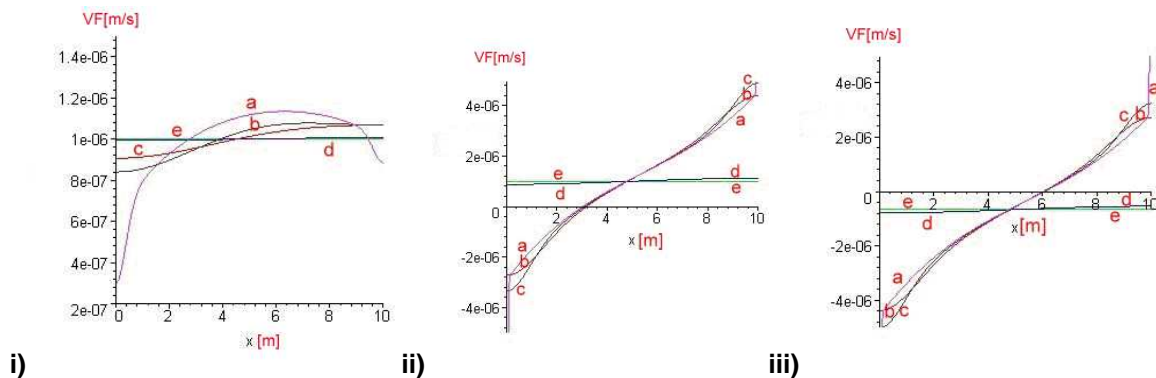
Nowym elementem uzyskanych rozwiązań jest rozkład pola potencjału elektrycznego. Jak pokazują to wykresy 8.15 i), ii) na skutek przyłożonego gradientu hydraulicznego oraz gradientu hydraulicznego i obciążenia generuje się w ośrodku pole elektryczne, które osiąga w drugim przypadku większe wartości pola i przeciwny znak potencjału. W trzecim przypadku, gdy do ośrodka przyłożony został gradient potencjału elektrycznego niewidoczne są efekty ewolucji wartości potencjału pola wywołane obciążeniem i gradientem hydraulicznym, co jest zrozumiałe ze względu na różnicę rzędu wielkości wartości obserwowanych na poprzednich wykresach (max. wartość: 0,08V) i wartością narzuconą przez warunek brzegowy odnoszący się do potencjału pola elektrycznego (max.: 100V).



Rys. 8.16. Wykresy gęstości prądu $j(x,t)$ dla przypadku:

- i) filtracja góra \Rightarrow dół** $P_1 = 0 Pa$, $P_a = 10^4 Pa$, $P_b = 2 \cdot 10^4 Pa$, $u_0 = 0V$, $u_1 = 0V$,
- ii) filtracja dół \Rightarrow góra** $P_1 = 3 \cdot 10^5 Pa$, $P_a = 10^4 Pa$, $P_b = 2 \cdot 10^4 Pa$, $u_0 = 0V$, $u_1 = 0V$,
- iii) filtracja dół \Rightarrow góra, prąd: góra \Rightarrow dół** $P_1 = 3 \cdot 10^5 Pa$, $P_a = 10^4 Pa$, $P_b = 2 \cdot 10^4 Pa$,
 $u_0 = 20V$, $u_1 = 100V$.

Przedstawione powyżej wykresy obrazujące ewolucję zmiany gęstości prądu w czasie pokazują, że we wszystkich rozpatrywanych warunków brzegowych wartości gęstości prądu dążą po odpowiednio długim czasie do wartości stałej, różnej co do wartości a zależności od przyczyny powodującej przepływ prądu elektrycznego.. W przypadku zagadnień przyływu bez narzuconej wartości potencjału wielkości $j(x,t)$ dążą do wartości $1,65 \cdot 10^{-3} A/m^2$, natomiast w przypadku przyłożonego dodatkowo potencjału pola elektrycznego (100V) wartości gęstości prądu elektrycznego wynosi $1,16 A/m^2$, chociaż jak widać to wykresów 8.16 iii, wartość tę uzyskuje po określonym czasie, gdy wygasają efekty wynikające ze sprzężonego prawa przepływu elektrokinetycznego. Na podkreślenie zasługuje fakt, że końcowa wartość gęstości prądu nie zależy od przyłożonego obciążenia, ale tylko od gradientu ciśnienia hydrostatycznego i gradientu potencjału elektrycznego, co zgodne jest z prawami przepływu elektrokinetycznego.

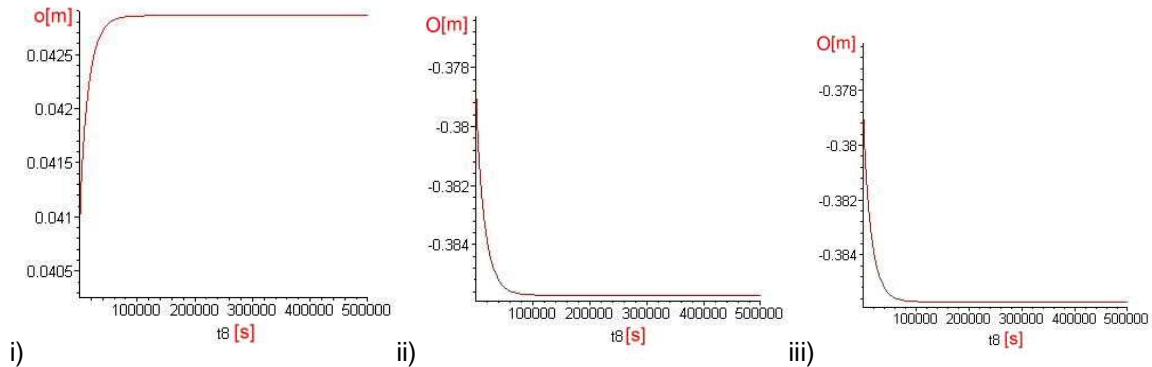


Rys. 8.17. Wykresy prędkości filtracji $v(x,t)$ dla przypadku:

- i) filtracja góra \Rightarrow dół** $P_1 = 0 Pa$, $P_a = 10^4 Pa$, $P_b = 2 \cdot 10^4 Pa$, $u_0 = 0V$, $u_1 = 0V$,
- ii) filtracja dół \Rightarrow góra** $P_1 = 3 \cdot 10^5 Pa$, $P_a = 10^4 Pa$, $P_b = 2 \cdot 10^4 Pa$, $u_0 = 0V$, $u_1 = 0V$,
- iii) filtracja dół \Rightarrow góra, prąd: góra \Rightarrow dół** $P_1 = 3 \cdot 10^5 Pa$, $P_a = 10^4 Pa$, $P_b = 2 \cdot 10^4 Pa$,
 $u_0 = 20V$, $u_1 = 100V$.

Powyższe wykresy przedstawiają ewolucję prędkości filtrującej wody w czasie. Mimo, że wartości prędkości w dwóch pierwszych przypadkach obciążenia gradientem hydraulicznym i łącznie gradientem

hydraulicznym i obciążeniem zewnętrznym dążą do tej samej wartości prędkości filtracji po odpowiednio długim czasie to charakter krzywych dla poszczególnych czasów konsolidacji jest zdecydowanie różny. W przypadku przepływu filtracyjnego wywołanego przepływem wywołanym działaniem zarówno pola elektrycznego, jak i gradientu hydraulicznego kierunek filtracji ulega zmianie, co wynika z działania pola elektrycznego.



Rys. 8.18. Wykres osiadań $u(h,t)$ dla przypadku:

- i) filtracja góra \Rightarrow dół** $P_1 = 0 Pa$, $P_a = 10^4 Pa$, $P_b = 2 \cdot 10^4 Pa$, $u_0 = 0V$, $u_1 = 0V$,
- ii) filtracja dół \Rightarrow góra** $P_1 = 3 \cdot 10^5 Pa$, $P_a = 10^4 Pa$, $P_b = 2 \cdot 10^4 Pa$, $u_0 = 0V$, $u_1 = 0V$,
- iii) filtracja dół \Rightarrow góra, prąd: góra \Rightarrow dół** $P_1 = 3 \cdot 10^5 Pa$, $P_a = 10^4 Pa$, $P_b = 2 \cdot 10^4 Pa$,
 $u_0 = 20V$, $u_1 = 100V$.

Wykresy osiadań powierzchni górnej słupa ośrodka porowatego dla przypadku, gdy na ośrodek działa jedynie gradient hydrauliczny wskazują na wzrost dylatacji ośrodka, ponieważ mamy do czynienia z przemieszczeniami w przeciwnym kierunku niż osiadania. W przypadku działania obciążenia z gradientem hydraulicznym i z potencjałem hydraulicznym lub przy jego braku – wykresy 8.18 ii oraz iii nie różnią się w znaczący sposób między sobą. Oznacza to, że przy przyjętych założeniach wstępnych zadania prąd elektryczny nie wpływa w istotny sposób na osiadania słupa ośrodka porowatego. Zadanie można oczywiście rozpatrywać w sposób bardziej precyzyjny i uwzględnić dodatkowe efekty wynikające na przykład z działania potencjału pulsującego pola elektrycznego.