

WYKŁAD 8

7. Klasyczne związki Terzagiego i Biota w mechanice skał

Anna Uciechowska-Grakowicz

7.1 Wprowadzenie

Punktem wyjścia do prezentowanych poniżej rozważań jest oczywisty – acz często ignorowany – fakt, że skała jest materiałem nieciągłym, zawierającym oprócz tworzących ją stałych składników także obszary pustek o różnym kształcie i wymiarach. Pustki te, objęte wspólną nazwą *przestrzeni porowej*, mogą być wypełnione płynem, który może oddziaływać na skałę na różne sposoby. W szczególności oddziaływanie to może być czysto mechaniczne, polegające na zmianach naprężenia w skałe wskutek zmian ciśnienia płynu porowego, lub też fizykochemiczne a nawet chemiczne, zmieniające właściwości materii skalnej wskutek interakcji zachodzących między płynem a szkieletem skały (np. procesy sorpcyjne, reakcje chemiczne). W sytuacji najbardziej złożonej będziemy mieli do czynienia z oddziaływaniem będącym kombinacją powyższych czynników.

Niniejsza praca poświęcona jest granicom stosowalności pewnych metod opisu zjawisk zachodzących w izotropowym i jednorodnym ośrodku porowatym, którego przestrzeń porowa wypełniona jest płynem porowym pozostającym pod działaniem ciśnienia porowego p_p , podczas gdy sam ośrodek poddany jest działaniu naprężenia makroskopowego σ_{ij} . Aby uniknąć komplikacji związanych ze szczegółowym opisem matematycznym struktury i tekstury takiego ośrodka postuluje się, że związki opisujące zachodzące nim zależności między naprężeniami a odkształceniami formułowane są dla pewnego naprężenia zastępczego σ'_{ij} , dla którego przyjęto nazwę *naprężenie efektywne*. Zakłada się również, że naprężenie efektywne jest pewną funkcją naprężenia makroskopowego i ciśnienia porowego, czyli że:

$$\sigma'_{ij} = f(\sigma_{ij}, p_p) \quad (1)$$

Warto jeszcze w tym miejscu zauważyć, że w literaturze anglosaskiej powyższy związek nosi czasem nazwę *prawa naprężeń efektywnych*¹ (por. np. Patterson i Wong, 2005; s. 148 i nast.) i termin ten będzie dalej używany w tym sensie w niniejszej pracy.

7.2 Konwencjonalne naprężenie efektywne.

Pierwsze poważne badania nad wpływem ciśnienia porowego na właściwości mechaniczne ośrodka porowatego miały miejsce na Politechnice Wiedeńskiej na początku XX w., a ich autorem był Paul Fillunger. Artykuł de Boer'a i Ehlersa (1990) przypomina nazwisko tego uczonego oraz tytuły jego najważniejszych prac (Fillunger, 1913, 1914, 1915) dotyczących tej tematyki. Niestety cechy charakteru Paula Fillungera, jego długoletni i tragicznie zakończony konflikt z Karlem von Terzaghim oraz popularność tego ostatniego na arenie międzynarodowej (por. de Boer, 2005) spowodowały, że osoba Paula Fillungera pozostaje praktycznie całkowicie zapomniana i za jedynego twórcę koncepcji naprężeń efektywnych powszechnie uważany jest Karl von Terzaghi.

7.3 Prawo naprężeń efektywnych Terzagiego

Stworzenie przez Karla von Terzagiego koncepcji naprężeń efektywnych datuje się na rok 1923 (Terzaghi, 1923) choć sama *zasada naprężeń efektywnych*² została przezeń sformułowana *explicité*

¹ ang.: *the effective stress law*.

² ang.: *the principle of effective stress*.

dopiero podczas wykładu wygłoszonego na Pierwszej Międzynarodowej Konferencji Mechaniki Gruntów, która odbyła się na uniwersytecie Harvard w 1936 r. (Terzaghi, 1936). Stosując współczesną notację tensorową, przyjmując oznaczenia przyjęte wyżej w rozdz. 1, oraz wprowadzając do zapisu tzw. tensor Kroneckera³ δ_{ij} można prawo naprężeń efektywnych Terzaghiego zapisać w formie:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij} \quad (2)$$

Dla tak zdefiniowanej zasady naprężeń efektywnych stosuje się obecnie nazwę **zasada konwencjonalnego naprężenia efektywnego**⁴ (por. Paterson i Wong, 2005, s. 148).

Sama koncepcja „naprężeń efektywnych” została po raz pierwszy sformułowana przez von Terzaghiego podczas prac nad problemem konsolidacji ilastych warstw gruntu i – jak się wydaje – miała pierwotnie charakter wyłącznie intuicyjny⁵ oraz nie zawierała wskazówek dotyczących granic jej stosowalności. Ta „intuicyjność” i matematyczna prostota związku (2) sprzyjały próbom jego wykorzystywania nie tylko w odniesieniu do gruntów, ale także do innego typu materiałów, takich jak skała czy beton. Tymczasem zarówno prace teoretyczne jak i eksperymentalne wskazują, że stosowanie zasady konwencjonalnego ciśnienia efektywnego podlega dość istotnym ograniczeniom.

7.3 Granice stosowalności związku Terzaghiego w świetle rozważań teoretycznych

Autorem pierwszych rozważań teoretycznych na temat granic stosowalności związku (2) był wspomniany już wyżej Paul Fillunger, który wychodząc z równań dwuskładnikowego ośrodka zbudowanego z nieściśliwego materiału wypełnionego całkowicie nieściśliwym płynem porowym niejako wyprowadził równanie von Terzaghiego (Fillunger, 1936). Natomiast za podsumowanie rozważań teoretycznych w tej dziedzinie można chyba uznać pracę Bluhma i de Boera (1996). Autorzy ci, analizując równania teorii mieszanin doszli do wniosku, że zasada naprężeń efektywnych w postaci zaproponowanej przez von Terzaghiego jest ważna tylko dla specjalnego przypadku nieściśliwego ośrodka porowatego, którego przestrzeń porowa wypełniona jest całkowicie nieściśliwym i nielepkim płynem porowym. Warto w tym momencie zastanowić się, jakie są konsekwencje powyższych ograniczeń dla przedmiotu badań mechaniki skał? Dotyczą one bowiem dwóch odrębnych faz analizowanego ośrodka (czyli skały): jego fazy stałej (nieściśliwość) oraz wypełniającego przestrzeń porową płynu (nieściśliwość i nielepkość).

Biorąc pod uwagę dzisiejszy stan wiedzy mechaniki skał nie sposób uznać, że skała jest ośrodkiem nieściśliwym, przy czym z prac eksperymentalnych wiadomo, że ściśliwość skały rośnie wraz z jej porowatością (por. np. Fabre i Gustkiewicz, 1997). Jeśli natomiast chodzi o płyn porowy to warunek nieściśliwości wyklucza spośród nich gazy (np. powietrze, gaz ziemny czy gazy kopalniane) a warunek nielepkości eliminuje występujące w rzeczywistości w skale ciecze (woda, ropa naftowa). Jeśliby zatem trzymać się *stricte* tego, co wynika z cytowanych wyżej rozważań teoretycznych to zasada konwencjonalnego naprężenia efektywnego nie miałaby w odniesieniu do skał praktycznie żadnego zastosowania.

7.4 Granice stosowalności związku Terzaghiego w świetle wyników badań laboratoryjnych

Granice stosowalności wzoru (2) dla skał w oparciu o wyniki badań laboratoryjnych określone zostały bardzo wyraźnie w pracy Handina i in. (1963). Zespół ten, opierając się na laboratoryjnych badaniach próbek pięciu skał: dolomitu, wapienia, piaskowca, łupku i pyłowca⁶ sformułował w swojej publikacji trzy następujące warunki, których spełnienie pozwala na stosowanie wobec materiału porowatego zasady konwencjonalnych naprężeń efektywnych:

³ Tensor ten znany jest także pod nazwą „delta Kroneckera”.

⁴ ang. *conventional effective stress principle*.

⁵ De Boer i Ehlers (1990) potwierdzają w swoim artykule to przypuszczenie.

⁶ Ang. odpowiednio: *dolomite, limestone, sandstone, shale and siltstone*.

- (a) płyn porowy jest fi zykochemicznie obojętny wobec składników skały tak, że ciśnienie porowe działa wyłącznie mechanicznie,
- (b) przepuszczalność skały jest wystarczająca dla przenikania płynu porowego a co więcej pozwala na wolny przepływ płynu porowego podczas procesu deformacji skały do wewnątrz i na zewnątrz skały tak, że ciśnienie porowe pozostaje podczas deformacji stałe i równomierne (test jest „drenowany”),
- (c) skała jest agregatem podobnym do piasku z połączonymi między sobą porami, których konfiguracja zabezpiecza pełne przejmowanie ciśnienia porowego („neutralnego”) przez fazę stałą.

Powyższe warunki (a), (b) i (c) w dalszej części niniejszej pracy autor nazywał będzie – dla uproszczenia – „warunkami Handina”. Należy zatrzymać się nad nimi nieco dłużej.

Odnoszący się na pierwszy rzut oka jedynie do płynu porowego warunek (a) nie dotyczy właściwości mechanicznych płynu porowego, ale fi zykochemicznych. W praktyce mówi on, że zasadę konwencjonalnego naprężenia efektywnego stosować można do opisu zjawisk zachodzących w wypełnionych płynem ośrodkach porowatych wtedy i tylko wtedy, gdy między płynem a ośrodkiem nie zachodzą procesy sorpcyjne bądź też reakcje chemiczne. Rozważmy pod tym kątem właściwości najpowszechniej spotykanych w przyrodzie w skałach płynów porowych, zarówno cieczy jak i gazów.

Najpowszechniej spotykanymi w skałach gazami są: powietrze, dwutlenek węgla, metan i gaz ziemny (mieszanka, której zasadniczą część stanowi metan). Spośród tych gazów (lub ich składników) znaczące właściwości sorpcyjne mają dwutlenek węgla i metan. Spośród składników powietrza tlen jest gazem aktywnym chemicznie a azot można uznać za fi zykochemicznie obojętny. Należy też pamiętać, że intensywność procesów sorpcyjnych zależy nie tylko od sorbatu (w tym przypadku gazu) ale także od sorbentu. W szczególności węgiel kamienny jest sorbentem, na którym większość gazów (w tym także wspomniany wyżej azot) sorbuje dość silnie. Przykład interesujących wyników pokazujących wpływ zjawisk sorpcyjnych na postać prawa naprężeń efektywnych znaleźć można u St. George’a i Bakarata (2001).

Jeśli chodzi o ciecz, to w naturze w przestrzeni porowej skał najczęściej można spotkać trzy: wodę, solankę (wodny roztwór soli) oraz ropę naftową (mieszanka głównie różnych węglowodorów ciekłych i gazowych). Zespół Handina uznał, że wodę można uznać za fi zykochemicznie obojętną wobec skał i choć autorowi twierdzenie to wydaje się dyskusyjne to jednak skłonny jest je zaakceptować gdyż dyskusja nad tym, jaką wodę i w jakich warunkach można uznać za fi zykochemicznie obojętną zdecydowanie wykracza poza ramy artykułu. Solanka jest cieczą bardzo agresywną chemicznie, natomiast w przypadku ropy naftowej nie sposób dać jednoznacznej odpowiedzi z uwagi na jej bardzo złożony i różnorodny skład chemiczny. Zapewne niektóre składniki ropy można by uznać za fi zykochemicznie obojętne inne zaś nie, czyli, że wszystko sprowadzi się do pytania: jaka ropa i w jakich warunkach?

Warunek (b) wydaje się być intuicyjnie jasny i zrozumiały ale jego praktyczne konsekwencje już takie nie są. Sformułowania „wolny przepływ płynu porowego” i „test drenowany” implikują bowiem swobodę fi ltracji płynu porowego a wyrażenie „ciśnienie pozostaje podczas deformacji stałe i równomierne” oznacza, że ewentualne zmiany ciśnienia rozchodzą się w przestrzeni porowej natychmiast. Rzecz jasna odpowiedź na pytanie, co oznacza termin „natychmiast” otwiera kolejny obszar dyskusji wydaje się jednak, że z punktu widzenia przebiegu procesu fi ltracji w czasie – nawet przy czysto intuicyjnym rozumieniu słowa „natychmiast” – warunek (b) Handina po prostu nie jest możliwy do spełnienia poza pewnym szczególnym stanem równowagi, w którym... fi ltracja nie zachodzi. Stan taki może mieć miejsce, gdy przestrzeń porowa skały wypełniona jest szczelnie płynem porowym, którego ciśnienie pozostaje stałe, zaś proces deformacji skały jest na tyle wolny, a sama deformacja na tyle mała, że ewentualne zmiany ciśnienia płynu porowego wynikające z deformacji porów są kompensowane ściśliwością tegoż płynu i/lub jego bardzo niewielkimi przemieszczeniami.

W początkowej fazie badań kierowany przez Handina zespół sformułował jedynie warunki (a) i (b). Do sformułowania warunku (c) doszło, gdy autorzy zaczęli się zastanawiać, dlaczego niektóre spośród badanych skał zachowują się podczas testów w sposób niezgodny z równaniem (2) pomimo

faktu, że spełnione są warunki (a) i (b)? Okazało się, że odpowiedzi na to pytanie dostarczają wcześniejsze prace Hubberta i Rubeya (1959, 1960). Pokazali oni, że jeżeli ciśnienie porowe przenieszone jest jako naprężenie normalne w całości i równomiernie przez szkielet skały, to zasada konwencjonalnego ciśnienia efektywnego obowiązuje dla naprężeń normalnych w każdym punkcie takiej skały niezależnie od wartości jej porowatości. Jeżeli natomiast z jakichś powodów (np. szczególnej konfiguracji przestrzeni porowej) takie równomierne przeniesienie ciśnienia porowego nie jest możliwe to ciśnienie efektywne nie może być zdefiniowane równaniem (2). To spostrzeżenie Hubberta i Rubeya jest praktycznie tożsame z zacytowanym wyżej warunkiem (c), który bywa czasem nazywany warunkiem Hubberta i Rubeya⁷.

Niestety praktyczna przydatność warunku (c) do oceny *a priori*, czy dla danej skały można stosować zasadę konwencjonalnego ciśnienia efektywnego (2) jest wątpliwa gdyż, po pierwsze – dokładny opis matematyczny konfiguracji przestrzeni porowej ciała jest praktycznie niemożliwy a po drugie – tak naprawdę nie wiemy jak powinna wyglądać ta konfiguracja, aby zapewnić owo równomierne przeniesienie ciśnienia porowego. W rzeczywistości warunek (c) wykorzystuje się raczej w odwrotną stronę: wiemy, że spełnione są warunki (a) i (b) a jednak skała nie zachowuje się zgodnie z prawem Terzagiego *ergo* sądzymy, że mamy do czynienia z materiałem o pewnych szczególnych cechach przestrzeni porowej.

7.5 Naprężenie efektywne w teorii konsolidacji Biota

Opisane powyżej ograniczenia prawa konwencjonalnego ciśnienia efektywnego skłoniły badaczy do poszukiwania jego bardziej uniwersalnej formy. Szczególną popularność zdobyła modyfikacja wzoru (2) do postaci:

$$\sigma'_{ij} = \alpha I p p_{ij} \quad (3)$$

w której α jest pewnym bezwymiarowym współczynnikiem określającym jaka część ciśnienia porowego powinna być brana pod uwagę aby równanie (3) można było uznać za związek opisujący ciśnienie efektywne. Rzecz jasna przyjęcie dla prawa naprężenia efektywnego związku (3) postawiło przed badaczami pytanie o wartość współczynnika α . Różne możliwe warianty postaci tego współczynnika dla gruntu, betonu i skały pokazali w swojej pracy Lade i de Boer (1997). Warto w tym miejscu podkreślić, iż autorzy ci sygnalizują również, że wzór na współczynnik α w równaniu (3) może mieć różną postać w zależności od panującego w ośrodku stanu naprężenia.

7.5.1 Prawo naprężeń efektywnych Biota

Maurice Anthony Biot to człowiek, którego prace wpłynęły na rozwój mechaniki gruntów i skał w stopniu nie mniejszym niż prace Karla von Terzagiego czy sir Aleca Wesley Skemptona. W szeregu swoich prac opublikowanych w latach 1935-1962 zawarł prof. Biot podstawy dziedziny nauki, której nazwę na język polski można przetłumaczyć niezbyt zrecznie jako „porosprężystość”⁸. Podstawy „porosprężystości” wyłożył jej twórca w dwóch swoich pracach (Biot, 1941, 1955), a aktualny obszerny wykład zarówno samej teorii jak i jej zastosowań znaleźć można np. w książce Wang (2000). Poniższe rozważania nie mają na celu wyprowadzenie równań porosprężystości a jedynie pokazanie istoty zaproponowanej przez Biota koncepcji naprężeń efektywnych.

Punktem wyjścia do sformułowania prawa naprężeń efektywnych wg Biota są równania jednorodnego i izotropowego ośrodka sprężystego (tzw. ośrodka Hooke’a), które można zapisać w postaci:

$$1 \ddot{H} \text{ ——— } \ddot{H}$$

⁷ Należy podkreślić, że zespół Handina cytuje w swojej pracy wnioski Hubberta i Rubeya i powołuje się na ich publikacje (Handin i in., 1963; s. 745).

⁸ Angielski termin „poroelasticity” brzmi tylko trochę lepiej.

$$\dot{I}_{ij} = \frac{v_{ij} - I_{ii} \dot{I}_{ij}}{E} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (4)$$

gdzie E i ν to odpowiednio moduł Younga i współczynnik Poissona. Przyjmując teraz, że:

n – jest porowatością ośrodka,

K – jego modułem ściśliwości objętościowej,

K_s – modułem ściśliwości fazy stałej ośrodka, ζ – zmianą objętości przestrzeni porowej ośrodka, H, R – pewnymi stałymi materiałowymi, oraz wprowadzając naprężenie średnie σ_m jako:

$$V_m = \frac{V_{ii}}{3} \quad (5)$$

podał Biot układ równań sprężystego, jednorodnego i izotropowego ośrodka porowatego w postaci (por.: Paterson i Wong, 2005 – s. 149-152; Fabre i Gustkiewicz, 1998; Gustkiewicz, 1989):

$$H_{ij} = \frac{V_{ij} V_{ii} G_{ij}}{E} + \frac{p_p G_{ij}}{3H} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (6)$$

$$\left. \begin{matrix} V_p \\ H \\ R \end{matrix} \right\}^{m, p} \quad (7)$$

w którym między stałymi n, K, K_s a H i R zachodzą następujące związki:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \end{matrix} \quad (8)$$

$$\begin{matrix} H & K & K_s \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} n \quad (9)$$

$$\begin{matrix} 1 & Q & Q \\ R & K & K_s \end{matrix} \quad 1$$

$$\begin{matrix} 3 & 1 & Q & \dots & 3 & Q \\ H_{ii} & V_{ii} & V_{ii} & p_p & i & 1, 2, 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ E & E & H \end{matrix} \quad (10)$$

Uwzględniając w (10) związek (5) oraz stosując podstawienia:

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 1 & 2 & Q \\ K & E \end{matrix} \quad (11)$$

$$e \in H \quad i = 1, 2, 3 \quad (12)$$

gdzie e jest zmianą objętości ośrodka, można równanie (10) doprowadzić do postaci:

$$\frac{\nabla p}{e^{m \cdot p}} \quad (13)$$

$K \quad H$ i dalej

$$\frac{1}{K} \frac{\nabla p}{e^{m \cdot p}} = H^1 \quad (14)$$

Dokonując teraz podstawienia

$$\frac{\nabla p}{e^{m \cdot p}} = H \quad (15)$$

Układ równań (6) i (7) w połączeniu ze stałymi materiałowymi (8) i (9) jest prawem materiałowym dla jednorodnego i izotropowego ośrodka porowatego, którego przestrzeń porowa wypełniona jest płynem pozostającym pod ciśnieniem p_p i nie zawiera bezpośrednich odniesień do zasady naprężeń efektywnych. Natomiast, rozwijając myśl Biota, Nur i Byerlee (1971) zaproponowali następujący sposób przekształcenia równań teorii Biota: przyjmijmy, że w układzie równań (4) $i = j$; otrzymujemy wówczas trzy równania ośrodka Biota dla kierunków głównych. Sumując te równania stronami otrzymujemy:

można doprowadzić związek (14) do postaci

$$\frac{\nabla p}{e^{m \cdot p}} = H \quad (16)$$

w którym σ dane wzorem (15) jest poszukiwanym naprężeniem efektywnym. Wprowadzając teraz podstawienie:

$$\frac{\nabla p}{e^{m \cdot p}} = H \quad (17)$$

otrzymujemy postać uogólnioną równania (15) w formie:

$$\nabla_{ij} \nabla_{ij} D_1 p_p G_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (18)$$

Równanie (18) definiuje naprężenie efektywne dla ośrodka porowatego spełniającego związki (6)-(9).

Kolejnym krokiem w rozumowaniu Nura i Byerlee jest przekształcenie równania (7) w sposób analogiczny do równania (6). Doprowadzając je do postaci

$$\frac{1}{H} \frac{\nabla p}{e^{m \cdot p}} = R^1 \quad (19)$$

i podstawiając

$$\nabla V_m = \frac{H}{R} p_p \quad (20)$$

otrzymujemy równanie (7) w formie

$$\nabla] = \frac{H}{H} \quad (21)$$

Wykonując w równaniu (20) podstawienie

$$D = \frac{H}{2R} = \frac{nK}{K_S K} \quad (22)$$

otrzymuje się związek

$$\nabla_{ij} V_{ij} D_2 p_p G_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (23)$$

definiujący naprężenia efektywne dla przestrzeni porowej ośrodka porowatego spełniającego równania (6)-(9).

Podsumowując powyższe rozważania należy stwierdzić, że Nur i Byerlee wykazali, iż – wychodząc z równań teorii konsolidacji Biota dla jednorodnego, izotropowego i sprężystego ośrodka porowatego można naprężenie efektywne zdefiniować związkiem postaci:

$$\nabla_{ij} V_{ij} D p_p G_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (24)$$

w którym wartość współczynnika ciśnienia efektywnego α dana jest wzorem (17) gdy przedmiotem rozważań jest ośrodek porowaty jako całość, lub też wzorem (22) gdy analizowana jest jedynie deformacja przestrzeni porowej tego ośrodka. Biorąc pod uwagę postać związków (17) i (22) oraz zależności zachodzące między n , K i K_S , Gustkiewicz (1989) wykazuje, że prawdziwe jest

$$0 < D_1 < 1 \quad 0 < D_2 < 1 \quad (25)$$

7.5.2 Granice stosowalności związku Biota

Podobnie jak diskutowana wcześniej koncepcja von Terzagiego również pomysł Biota wywodzi się zasadniczo z mechaniki gruntów i został sformułowany początkowo dla gruntu wypełnionego wodą, przy czym odnośnie gruntu i wody Maurice Biot poczynił następujące założenia (cytując):

„Założono następujące podstawowe właściwości gruntu: (1) izotropia materiału, (2) odwracalność zależności naprężenie-odkształcenie w końcowych warunkach równowagi, (3) liniowość zależności naprężenie-odkształcenie, (4) małe odkształcenia, (5) woda zawarta w porach jest nieściśliwa, (6) woda ta może zawierać pęcherzyki powietrza, (7) woda przepływa przez porowaty szkielet zgodnie z prawem Darcy’ego.” (cytat za Biot, 1941; tłum. autora).

Zobaczymy teraz, co te założenia oznaczają dla prawa naprężeń efektywnych.

Z punktu widzenia teorii konsolidacji warunek izotropii materiału (1) stracił znaczenie bardzo szybko. Prace Biota (1955) oraz Biota i Willisa (1957), rozszerzyły teorię konsolidacji Biota na

⁹ „The following basic properties of the soil are assumed: (1) isotropy of the material, (2) reversibility of stress-strain relations under final equilibrium conditions, (3) linearity of stress-strain relations, (4) small strains, (5) the water contained in the pores is incompressible, (6) the water may contain air bubbles, (7) the water flows through the porous skeleton according to Darcy’s law.”

materiały anizotropowe aczkolwiek autorzy ci nie formułowali dla takich materiałów zasady naprężeń efektywnych *explicité*. Zrobił to natomiast Carroll (1979), który sformułował postać prawa naprężeń efektywnych dla materiału transwersalnie izotropowego o anizotropii strukturalnej wynikającej z ukierunkowania porów oraz dla materiału ortotropowego. O modyfikacjach prawa naprężeń efektywnych dla ośrodka anizotropowego pisali także Cheng (1997) oraz Roegiers i in. (1998) dokonując pewnego podsumowania możliwości, jakie daje teoria Biota przy opisie zjawisk zachodzących w skale traktowanej jako dwufazowy ośrodek porowaty.

Natomiast sformułowane przez Biota założenia (2) i (3) nakładają na stosowalność sformułowanego w rozdz. (3.1) prawa naprężeń efektywnych istotne ograniczenia. Są one tym bardziej widoczne gdy weźmiemy pod uwagę, że równania Biota (6) to w istocie równania Hooke'a uzupełnione o składnik odpowiadający za objętościową deformację porów. Oznacza to, że prawa naprężeń efektywnych w postaci danej wzorami (24), (17) i (22) można używać do opisu zjawisk zachodzących w skale wtedy i tylko wtedy, gdy skałę tę można uznać za materiał Hooke'a. Rozwiązuje to jednocześnie problem założenia (4) gdyż dla materiału Hooke'a z tzw. małymi odkształceniami mamy do czynienia niejako *ex defī nitio*.

Następna grupa założeń dotyczy płynu porowego, a pierwszym z nich jest założenie jego nieściśliwości (5). Założenie to nie jest konieczne, gdyż jeżeli moduł ściśliwości płynu porowego ma definiujący moduł R związek (9) ma postać:

$$\text{wartość } K_f \text{ to } \frac{1}{R} \frac{1}{K_s} \frac{1}{K_f} \frac{1}{K_s} \frac{n}{K_f} \quad (26)$$

(por. Paterson i Wong, 2005, s. 150). Zauważmy, iż jeśli przyjąć, że płyn porowy jest nieściśliwy (co z dobrym przybliżeniem można odnieść do cieczy) to można również przyjąć, że $K_f \rightarrow \infty$ czyli $K_f^{-1} \rightarrow 0$ i związek (26) przyjmuje postać (9). Natomiast dla płynów ściśliwych (gazów) modułu R należałoby poszukiwać w oparciu o związek (26). Biorąc jednak pod uwagę, że w związku na współczynnik α_1 moduł R nie występuje w ogóle (por. wzór (17) z podstawieniem (8)) wydaje się, iż można uznać, że postać prawa naprężeń efektywnych dla ośrodka porowatego od ściśliwości płynu porowego nie zależy.

Inaczej jest w przypadku przestrzeni porowej tegoż ośrodka. Uwzględniając w podstawieniu (22) moduł R w postaci (26) otrzymujemy wzór na współczynnik α_2 w następującej postaci:

$$D_2 = \frac{1}{R} \frac{1}{K_s} \frac{1}{K_f} \frac{1}{K_s} \frac{n}{K_f} \quad (27)$$

I znów – jak wyżej – jeśli płyn porowy jest nieściśliwy to $K_f \rightarrow \infty$, czyli $K_f^{-1} \rightarrow 0$, a związek (27) przyjmuje postać (22).

Założenie (6) mówiące o dopuszczalnej obecności w wodzie pęcherzyków powietrza jest w istocie akceptacją sytuacji, w której przestrzeń porowa skały jest wypełniona cieczą jedynie częściowo i nie można go traktować jako ograniczenie. Natomiast dużo wątpliwości budzi przyjęcie, że ewentualny przepływ płynu porowego w ośrodku następuje zgodnie z prawem Darcy'ego. W swoim wywodzie na temat równań równowagi ośrodka porosprężystego przez który przepływa płyn porowy Jaeger i in. (2007, s. 183-189) pokazują, że jeśli przyjąć, że skała jest izotropowa, sztywna i nieodkształcalna, to przepływ płynu porowego opisywany jest nie równaniem Darcy'ego a równaniem dyfuzji. Jeśli natomiast dopuścić odkształcalność skały, to w równaniu dyfuzji pojawia się składnik uzależniający wartość ciśnienia porowego od naprężenia średniego. Pojawienie się tego składnika w tym równaniu to matematyczne odzwierciedlenie obserwowanego w laboratorium efektu Skempton'a, polegającego na wzroście ciśnienia porowego wskutek spadku objętości przestrzeni porowej

wywołanego ściśliwością skały. Efekt ten jest szczególnie widoczny, gdy płynem porowym jest nieściśliwa ciecz. Należy w tym miejscu podkreślić, iż w przy budowie modeli matematycznych i numerycznych ośrodków porowatych zdarza się, iż jako równania konstytutywne ośrodka stosuje się równania Biota a przepływ płynu modeluje się stosując zamiast związku Darcy'ego np. równanie Forchheimera.

Podsumowując powyższe rozważania należy stwierdzić, że teoria Biota – pomimo swojej niewątpliwej matematycznej elegancji – może być stosowana do wyprowadzenia związków opisujących zasadę naprężeń efektywnych dla zakresu naprężeń i odkształceń ograniczonego zakresem stosowalności prawa Hooke'a. Teoria ta nie działa już na przykład wtedy, gdy naprężenia w skale zbliżają się bądź osiągają wartość granicy wytrzymałości. Dla takich stanów naprężenia większość autorów sugeruje stosowanie równania Terzagiego (por. Lade i de Boer, 1997).

7.6 Uwagi końcowe

Powyższe omówienie klasycznych wersji praw naprężeń efektywnych von Terzagiego i Biota pozwala na sformułowanie pewnych ogólnych wątpliwości i zastrzeżeń, które powinny być brane pod uwagę podczas wykorzystywania koncepcji naprężeń efektywnych do opisu właściwości mechanicznych skał.

Przede wszystkim należy zwrócić uwagę na fakt, że różnice między wielkościami składowych tensora naprężenia σ_{ij} i tensora naprężenia efektywnego σ'_{ij} zachodzą wyłącznie dla składowych normalnych tych tensorów. W sensie fizycznym oznacza to, że sprężony płyn porowy wpływa tylko na deformacje objętościowe skały, natomiast z punktu widzenia deformacji postaciowych jego obecność pozostaje obojętna. Takie założenie sugeruje, że wpływ płynu porowego na deformacje skały jest wyłącznie mechaniczny (poprzez obecność ciśnienia p_p), co nie musi być prawdą. W szczególności Dutka i in. (2008) pokazali na drodze eksperymentalnej, że zachodzące między skałą a płynem porowym procesy fizykochemiczne mogą istotnie wpływać na wartość współczynników Biota, a co za tym idzie na postać odpowiedniego prawa naprężenia efektywnego.

Następnie zauważmy, iż choć von Terzaghi formułując związek (2) nie czynił żadnych założeń odnośnie panującego w materiale stanu naprężenia, to prace jego następców pokazują, że takie podejście trzeba uznać za błędne. Omówione powyżej prawo naprężeń efektywnych Biota, którego zakres stosowalności w zasadzie ogranicza się do zakresu stosowalności prawa Hooke'a, jest tego najlepszym przykładem. Wyraźnie widać, że postać związku (1) dla danego układu materiał – płyn porowy może być różna w różnych stanach naprężenia. Warto w tym kontekście raz jeszcze wskazać na uwagi poczynione na ten temat przez Lade'a i de Boera (1997).

Kolejne zastrzeżenie jest konsekwencją sposobu wyprowadzania równań (18) i (23). Zauważmy, że związki te uzyskane zostały poprzez przekształcenia równań opisujących zmianę objętości odpowiednio ośrodka (równanie (10)) i jego przestrzeni porowej (równanie (7)). Można zatem uznać, że równania (18) i (23) definiują ciśnienie efektywne sterujące zmianą objętości ośrodka lub jego przestrzeni porowej. Tymczasem w literaturze znaleźć można następującą definicję naprężenia efektywnego (cytuję):

„Naprężenie efektywne jest to naprężenie, które steruje zależnością naprężenie-odkształcenie, zmianą objętości i wytrzymałością (podkr. autora – A.N.) danego materiału porowatego niezależnie od magnitudy ciśnienia porowego¹⁰”. (cytat za Lade i de Boer, 1997; tłum. autora).

Powyższy cytat wskazuje, że zasada naprężeń efektywnych może obowiązywać nie tylko w odniesieniu do zmiany objętości analizowanego układu materiał – płyn porowy, ale także w przypadku parametrów opisujących jego zachowanie naprężeniowo-odkształceniowe (dla materiału Hooke'a będą to moduł Younga, współczynnik Poissona czy też granica liniowości odkształceń podłużnych lub

¹⁰ „The effective stress is the stress that controls the stress-strain, volume change, and strength behaviour of a given porous medium, independent of the magnitude of the pore pressure.”

poprzecznych) oraz zachowanie na granicy wytrzymałości (w tym przypadku funkcją ciśnienia efektywnego byłaby różnicowa granica wytrzymałości na ściskanie). W konsekwencji nie można wykluczyć sytuacji, że dla danego materiału, płynu porowego i stanu naprężenia postać związku (1) może być różna w zależności od tego jaki parametr charakteryzujący skałę będziemy analizowali. Pierwsze próby weryfikacji tej hipotezy na drodze eksperymentalnej znaleźć można u Nowakowskiego (2006, 2007) i choć wyniki są niejednoznaczne to jednak wydaje się, iż ten kierunek badań należy uznać za właściwy a ich podjęcie za celowe.

Powyższe rozważania pokazują, że tzw. prawo naprężeń efektywnych jest wprawdzie wygodnym narzędziem służącym do opisu zjawisk zachodzących w skałach traktowanych jako nasączone płynami ośrodki porowate, ale przy jego stosowaniu trzeba zachować pewną ostrożność. W szczególności należy brać pod uwagę właściwości fizykochemiczne zarówno skały jak i płynu porowego oraz pamiętać, że właściwości fizyczne skały zależą od panującego w niej stanu naprężenia

Praca została wykonana w roku 2015 w ramach prac statutowych realizowanych w IMG PAN w Krakowie, finansowanych przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

7.7 Literatura

- Biot M.A., 1941: *General Theory of Three-Dimensional Consolidation*. J. Appl. Phys., Vol. 12, p. 155-164.
- Biot M.A., 1955: *Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid*. J. Appl. Phys., Vol. 26, p. 182-185.
- Biot M.A., Willis, D. G., 1957: *The Elastic Coefficients of the Theory of Consolidation*. J. Appl. Mech., Vol. 24, p. 594-601.
- Bluhm J., de Boer R., 1996: *Effective stress – clarification*. Arch. Appl. Mech., Vol. 66, p. 479-492.
- de Boer R., Ehlers W., 1990: *The development of the concept of effective stresses*. Acta Mechanica, Vol. 83, p. 77-92.
- de Boer R., 2005: *The Engineer and the scandal – a piece of science history*. Springer Verl., Berlin, 293 pages.
- Caroll M.M., 1979: *An Effective Stress Law for Anisotropic Elastic Deformation*. J. Geophys. Res., Vol. 84, No. B13, p. 7510-7512.
- Cheng A.H.-D., 1997: *Material coefficients of anisotropic poroelasticity*. Int. J. Rock Mech. Min. Sci., Vol. 34, p. 199-205
- Dutka B., Lizak Z., Nowakowski A., Nurkowski J., Wierzbicki M., 2008: *Zależność wartości współczynnika Biot'a od rodzaju medium porowego*. Prace IMG PAN, t. 10, nr 1-4, s. 3-16.
- Fabre D., Gustkiewicz J., 1998: *Influence of rock porosity on the Biot's coefficient*. In: "Poromechanics – A Tribute to Maurice A. Biot", Proc. of the Biot Conf. on Poromech., Louvain-la-Neuve (Belgium), 14-16 Sept. 1998, Thismus et al. (eds.), Balkema, Rotterdam.
- Fillunger P., 1913: *Der Auftrieb in Talsperren*. Österr. Wochenschrift für den öffentlichen Baudienst. Vol. 19, p. 532-556; 567-570.
- Fillunger P., 1914: *Neuere Grundlagen für die statische Berechnung von Talsperren*. Zeitschrift des Österr. Ing.- und Arch.- Vereines, Vol. 23, p. 441-447.
- Fillunger P., 1915: *Versuche über die Zugfestigkeit bei allseitigem Wasserdruck*. Österr. Wochenschrift für den öffentlichen Baudienst. Vol. 29, p. 443-448.
- Fillunger P., 1936: *Erdbaumechanik?* Selbstverlag des Verfassers, Wien.
- Gustkiewicz, J., 1989: *Objętościowe deformacje skały i jej porów*. Arch. Min. Sci., Vol. 34, Issue 3, 593-609.
- Handin J., Hager R.V., Friedman M., Feather J.N., 1963: *Experimental deformation of sedimentary rocks under confining pressure: pore pressure tests*. Bull. Am. Assoc. Petr. Geol., Vol. 47, p. 717-755.
- Hubbert M.K., Rubey W.W., 1959: *Role of fluid pressure in mechanics of overthrust faulting*. Bull. Geol. Soc. Am., Vol. 70, p. 115-203.
- Hubbert M.K., Rubey W.W., 1960: *Role of fluid pressure in mechanics of overthrust faulting: A reply*. Bull. Geol. Soc. Am., Vol. 71, p. 617-628.
- Jaeger J.C., Cook N G.W., Zimmerman R.W., 2007: *Fundamentals of Rock Mechanics. Fourth Edition*. Blackwell Publishing Ltd., USA-UK-Australia, 475 pages.

- Lade P.V., Boer de, R., 1997: *The concept of effective stress for soil, concrete and rock*. Géotechnique, Vol. 47, No. 1, p. 71-67.
- Nowakowski A., 2006: *Różne postacie równania ciśnienia efektywnego uzyskane podczas badań laboratoryjnych piaskowca "Tumlin"*. Prace IMG PAN, t. 8, nr 1-4, s. 193-201.
- Nowakowski A., 2007: *Różne postacie równania ciśnienia efektywnego uzyskane podczas badań laboratoryjnych piaskowca "Tumlin" (cz. II)*. Prace IMG PAN, t. 9, nr 1-4, s. 103-111.
- Paterson M. S., Wong T.-f., 2005: *Experimental Rock Deformation – The Brittle Field*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 347 pages.
- Roegiers J.-C., Cui L., Bai M., 1998: *Poroelasticity applications*. In: Mechanics of Jointed and Faulted Rocks, Proc. 3rd Int. Conf. Mech. Joint. & Fault. Rock – MJFR-3, Vienna, Austria, 6-9 April 1998, Hans-Peter Rossmannith (ed.), A.A. Balkema, Rotterdam, p. 39-48
- St. George J.D., Bakarat M.A., 2001: *The change in effective stress associated with shrinkage from gas desorption in coal*. International Journal of Coal Geology, Vol. 45, p. 105-113.
- von Terzaghi K., 1923: *Die Berechnung der Durchlässigkeitsziffer des Tonen aus dem Verlauf der Spannungserscheinungen*. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien Math.-Naturwiss. Kl., Abt. 2A, 132, 105.
- von Terzaghi K., 1936: *The shearing resistance of saturated soils and the angle between planes of shear*. In: Proc. Int. Conf. Soil Mech. And Found. Eng., Casagrande A. & Rutledge P. C. & Watson J. D. (eds), Harvard University, Vol. I, p. 54-56.
- Wang H.F., 2000: *Theory of Linear Poroelasticity with Applications to Geomechanics and Hydrogeology*. Princeton University Press, Princeton & Oxford, USA, 287 pages.