

WYKŁAD 6

5. Teoria Filtracji – Część I

Michał Strzelecki

5.1 Prawa rządzące przesączaniem wody przez pory ośrodka dwufazowego

Wszystkie skały, w tym w szczególności grunty posiadają własności filtracyjne, dzięki którym ciecze i gazy mogą się przez nie przedostawać pod wpływem pola grawitacyjnego, różnicy potencjału elektrycznego lub chemicznego, różnicy temperatur. Podstawowe prawo przepływu wody przez grunty zostało sformułowane przez Darcy'ego w latach 1852-1855 [Darcy H., 1956]. Darcy nie uwzględnił wcześniejszych prac Poiseuille'a [Strzelecki i inni., 2008]., który rozważając teoretycznie przepływ laminarny wody przez rurkę kapilarną uzyskał uśrednione równanie ruchu analogiczne do równania Darcy'ego. Jak wiadomo prawo Darcy'ego w oryginalnej postaci wyraża się wzorem:

$$\vec{v} = k\vec{J} \quad (5.1)$$

gdzie k oznacza współczynnik filtracji, \vec{v} pole wektorowe prędkości filtracji, a J to spadek hydrauliczny wyrażający się wzorem:

$$\vec{J} = \text{grad}(H) \quad (5.2)$$

przy czym H oznacza wysokość hydrauliczną wyrażoną uproszczonym wzorem Bernoulliego:

$$H = \frac{P}{\rho g} + x_i \delta_{i3} \quad (5.3)$$

W wielu pracach [12,22,24] przedstawiono krytyczne uwagi do przedstawionego przez Darcy'ego prawa, które można streścić w następujących тезach:

- Darcy nie uwzględnił faktu, że gradient wysokości hydraulicznej H ma przeciwny zwrot niż wektor prędkości filtracji \vec{v} więc podstawowe prawo Darcy'ego powinno mieć postać:

$$\vec{v} = -k\vec{J} \quad (5.4)$$

- Kröber w 1884 [Wieczysty, 1982] podniósł problem granic stosowalności prawa Darcy'ego
- Forchheimer w 1914 r. [Forchheimer, 1914] podał zależność definiującą równanie przepływu filtracyjnego w przypadku, gdy ruch cieczy przepływającej przez pory ma charakter turbulentny w postaci:

$$\vec{J} = a\vec{v} + b\vec{v}\vec{v} \quad (5.5)$$

Przedstawione szczegółowe omówienie wszelkich aspektów i uwag związanych z prawem Darcy'ego można znaleźć w pracach Połubarinowej-Kocziny [Połubarinowa-Koczina P., 1977], Wieczystego [Wieczysty A, 1982], Strzeleckiego i inni [Strzelecki T., Żak S., Kostecki S. 2008] i wielu innych autorów.

Zagadnieniem przepływu laminarnego przez pory ośrodka gruntowego zajmowano się również w poszukiwaniu makroskopowego prawa przepływu filtracyjnego drogą uśrednienia procesów zachodzących w skali por przyjętej jako skala niejednorodności ośrodka periodycznego z zastosowaniem metody asymptotycznej homogenizacji. W skali niejednorodności proces laminarnego przepływu cieczy opisują zgodnie z pracami Bensoussana [Bensoussan i inni, 1978], Auriault'a [Auriault i inni, 1980, 1990] Strzeleckiego i

innych [Strzelecki T., Auriault JL., Bauer J., Kostecki S., Puła W., 1996], Łydzby [Łydzba D., 2002] równania Naviera Stockesa z równaniem ciągłości przepływu cieczy nieściśliwej, dla której $div(\vec{v}) = 0$. Uwzględniając warunek brzegowy $\vec{v} = 0$ na kontakcie płynu z ciałem stałym oraz warunki okresowości dla pola wektorowego prędkości i funkcji ciśnienia w płynie uzyskuje się układ równań różniczkowych, który jest punktem wyjścia do rozpoczęcia procesu homogenizacji. W wyniku przeprowadzonego rozwiązania uzyskujemy liniowe prawo Darcy'ego z opisem matematycznym w jaki sposób można wyznaczać numerycznie wartość tensora przepuszczalności, jeżeli potrafimy określić strukturę ośrodka porowatego i znamy lepkość przepływającego przez pory ośrodka płynu. Uzyskane w cytowanych wyżej pracach rozwiązanie jest istotnym osiągnięciem fizyki teoretycznej. Używając tylko narzędzi matematycznych uzyskano przy przejściu ze skali mikroskopowej do makroskopowej zupełnie odmienny charakter równań opisujących proces przepływu w obydwu skalach, oraz udało się określić rząd wielkości tensora przepuszczalności w skali makroskopowej. Należy przy tym podkreślić, że uzyskany wynik jest w pełni zgodny z wynikami doświadczeń, a zależność współczynnika filtracji od stosunku l^2/μ , gdzie l określa wielkość rozmiaru komórki reprezentacyjnej REV i μ oznacza lepkość płynącego przez pory ośrodka płynu została potwierdzona licznymi eksperymentami.

5.1.1 Klasyczny model matematyczny teorii filtracji

Równania hydrodynamiki wód podziemnych zostały określone przy przyjęciu następujących założeń:

- ośrodek porowaty tworzy strukturę ciała stałego traktowanego jako ośrodek ciągły, wewnątrz którego istnieje sieć kanalików filtracyjnych wzajemnie połączonych,
- nie występują pory zamknięte zawierające ciecz lub gaz,
- sieć kanalików jest na tyle regularna, że można określić elementarną objętość reprezentatywną RVE, która reprezentować będzie wyodrębniony prostopadłościan o nieskończenie małych wymiarach,
- pory ośrodka wypełnione są cieczą,
- proces przepływu cieczy odbywa się w stałej temperaturze (proces izotermiczny),
- na proces filtracji nie ma wpływu pole elektryczne i magnetyczne ziemi,
- nie uwzględniamy wpływu potencjału chemicznego,
- ruch cieczy rozpatrujemy obserwując go względem nieruchomego układu odniesienia x_i , a więc w układzie Lagrange'a.

Proces zachowywania się cieczy opisują równania:

- konstytutywne równania stanu,
- równania ciągłości przepływu,
- równania ruchu cieczy przez ośrodek porowaty.

Jak wykażemy, powyższy układ równań pozwolił określić model matematyczny przepływu cieczy przez ośrodek porowaty. Uzyskane równania muszą być uzupełnione przez warunki brzegowe i początkowe.

5.1.1.1 Konstytutywne równania stanu

Przez pory ośrodka porowatego może przepływać płyn o dużej ściśliwości objętościowej (np. gaz, mieszaniny cieczy i gazu) lub ciecz wykazująca się bardzo małą ściśliwością. Mówimy wtedy o liniowo sprężystym reżimie filtracji. *Ograniczymy się do dwóch przypadków*

GEOTECHNIKA KIERUNEK GEODEZJA I KARTOGRAFIA

równania stanu: pierwszy gdy mamy w porach ośrodka dwufazowego ciec i drugi gdy pory wypełnione są gazem.

W obydwu przypadkach panujące w cieczy ciśnienie lub jego przyrost powoduje odkształcenia objętościowe zarówno płynu jak i fazy stałej ośrodka. Uwzględniając zmiany objętościowe cieczy i szkieletu, mówimy o reżimie sprężystym przepływu filtracyjnego. Gdy pomijamy efekty sprężystości objętościowej, mówimy o tzw. sztywnym reżimie filtracji.

Zakładamy, że faza stała ośrodka nie ulega odkształceniom postaciowym i dopuszczamy w tej fazie rozważań jedynie zmiany objętościowe, wyrażające się zmianą porowatości matrycy ciała stałego.

Sprężystość objętościową cieczy opisuje prawo Hooke'a, według którego względna zmiana gęstości objętościowej płynu ρ jest proporcjonalna do zmiany ciśnienia w nim panującego:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \beta_w dp \quad (5.6)$$

gdzie: β_w - oznacza współczynnik objętościowej ściśliwości cieczy, definiowany jako względna zmiana objętości cieczy przy zmianie ciśnienia o 1 bar . Przykładowo dla wody β_w jest rzędu wielkości $10^{-10} 1/Pa$

Równanie (5.6) prowadzi do nieliniowego związku pomiędzy gęstością płynu i ciśnieniem cieczy w postaci:

$$\rho = \rho_a \exp(\beta_w p) \quad (5.7)$$

gdzie ρ_a oznacza gęstość płynu w warunkach ciśnienia atmosferycznego.

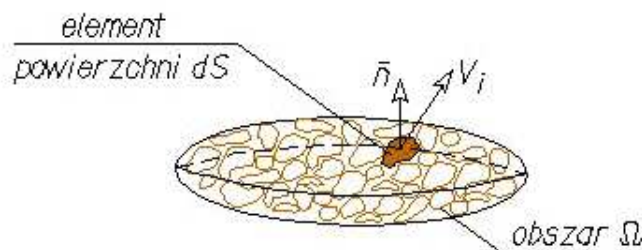
Przy niewielkich wielkościach ciśnienia (do 100 bar) można przyjąć, że zmiany gęstości są nieznaczne i wówczas można przyjąć $\rho = const$.

5.1.1.2 Równanie ciągłości przepływu

Niech Ω określa obszar elementarny wypełniony ośrodkiem dwufazowym. Oznaczmy S powierzchnię ograniczającą, przez którą odbywa się przepływ filtracyjny cieczy. Niech \vec{n} oznacza wektor normalny do S i skierowany na zewnątrz obszaru Ω .

Przepływ cieczy przez powierzchnię S ograniczającą obszar Ω rys. 1 określa równanie:

$$\int_S \rho v_i dS + \int_{\Omega} \frac{\partial(\rho)}{\partial t} d\Omega = 0. \quad (5.8)$$



Rys. 6.1. Przepływ medium przez powierzchnię S ograniczającą obszar Ω .

Korzystając z twierdzenia Gaussa – Ostrogradzkiego, możemy zamienić całkę powierzchniową na objętościową. Dostajemy, więc:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial(\rho)}{\partial t} d\Omega = 0. \quad (5.9)$$

Powyższe równanie pozwala zapisać związek lokalny w postaci:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \text{div}(\vec{v}) = 0 \quad (5.10)$$

gdzie

$$\frac{d\bullet}{dt} = \frac{\partial\bullet}{\partial t} + v_i \frac{\partial\bullet}{\partial x_i} \quad (5.11)$$

Określa pochodną materialną gęstości objętościowej płynu.

5.1.1.3 Klasyczny model matematyczny procesu filtracji

Zakładając, w pierwszym przypadku, że ośrodek gruntowy jest ciałem idealnie sztywnym, a ciecz przepływająca przez siatkę kanalików filtracyjnych jest nieściśliwa, układ równań opisujący proces przepływu laminarnego sprowadza się do równania stanu: $\rho = \text{const}$, równania ciągłości przepływu: $\text{div} \vec{v} = 0$, równań ruchu wyrażonych poprzez prawo Darcy'ego: $\vec{v} = -\tilde{k} \text{grad}(H)$ gdzie \tilde{k} oznacza tensor przepuszczalności. Podstawiając równania ruchu do równania ciągłości przepływu dostajemy równanie różniczkowe opisujące proces przepływu cieczy nieściśliwej przez jednorodny, izotropowy, nieodkształcalny ośrodek porowaty w postaci:

$$\text{div}(\tilde{k} \text{grad}(H)) = 0 \quad (5.12)$$

Równanie (5.12) jest podstawowym równaniem teorii filtracji dla przypadku gdy ośrodek gruntowy jest ciałem idealnie sztywnym.

W drugim przypadku zakładamy, że ośrodek gruntowy wykazuje się odkształcalnością objętościową zarówno w zakresie fazy stałej i ciekłej, nie wykazuje jednakże odkształcalności postaciowej. Równanie ciągłości w tym przypadku wyraża się równaniem (5.10). Podstawiając do równania (5.10) równanie ruchu Darcy'ego oraz uwzględniając, że $\rho = \rho_c f$ dostajemy klasyczne równanie przepływu nieustalonego w postaci:

GEOTECHNIKA
KIERUNEK GEODEZJA I KARTOGRAFIA

$$\operatorname{div}(\rho_c f \tilde{k} \operatorname{grad}(H)) = \frac{\partial(\rho_c f)}{\partial t} \quad (5.13)$$

Pochodna po prawej stronie równania ciągłości (5.13) jest iloczynem dwóch funkcji: ρ_c i f , więc:

$$\frac{\partial(\rho_c f)}{\partial t} = \rho_c \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial \rho_c}{\partial t}. \quad (5.14)$$

Wprowadzając następnie założenia, że prędkość zmiany gęstości płynu w czasie jest zależna od iloczynu gęstości i prędkości zmiany ciśnienia:

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} = \rho_c \beta_w \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.15)$$

co można by uznać, że jest zgodne ze związkiem konstytutywnym (5.6) zakładając, że zmiana gęstości jest zmianą gęstości w czasie. Zakładając następnie, że prędkość zmian porowatości jest wprost proporcjonalna do prędkości zmian ciśnienia cieczy w klasycznym ujęciu teorii filtracji wprowadza się związek konstytutywny w postaci:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \beta_s \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.16)$$

Powyższy związek trudno uzasadnić jakimkolwiek związkiem fenomenologicznym mechaniki gruntów i skał. W teorii konsolidacji Biota zakłada się wprost, że porowatość w procesie odkształceń szkieletu gruntowego jest wielkością stałą, co też nie jest założeniem zgodnym z rzeczywistością, ale nie wpływa w znaczący sposób na poprawność rozwiązań tej teorii. Związek (5.14) można korzystając ze wzorów (5.15) i (5.16) przedstawić w postaci:

$$\frac{\partial(\rho_c f)}{\partial t} = \rho_c^2 g \beta_s \frac{\partial H}{\partial t} + f \rho_c^2 g \beta_w \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (5.17)$$

W klasycznym modelu matematycznym przyjmuje się następnie, że

$$\frac{\partial p}{\partial t} = f \rho_c g \frac{\partial H}{\partial t} \quad (5.18)$$

Co oczywiście jest nieściśle, gdyż przyjmując za słuszną definicję wysokości hydraulicznej dla przepływu filtracyjnego:

$$H = \frac{p}{f \rho_c g} + x_i \delta_{i3} \quad (5.19)$$

Pochodna względem czasu wynosi:

$$\frac{\partial(\rho_c f g H)}{\partial t} = \rho_c g f \frac{\partial H}{\partial t} + H g f \frac{\partial \rho_c}{\partial t} + H \rho_c g \frac{\partial f}{\partial t} \quad (5.20)$$

więc prędkość zmian ciśnienia wyraża się wzorem:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = f \rho_c g \frac{\partial H}{\partial t} + g f H \frac{\partial \rho_c}{\partial t} + g H \rho_c \frac{\partial f}{\partial t} - x_i \delta_{i3} \frac{\partial \rho_c}{\partial t} \quad (5.21)$$

co prowadzi do zależności:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\rho_c g \frac{\partial H}{\partial t}}{1 - \rho_c g \beta_w H - \rho_c g \beta_s H + x_i \delta_{i3} \rho_c g \beta_w} \quad (5.22)$$

Tymczasem mimo istotnej niezgodności, klasyczne równanie przepływu nieustalonego przyjmuje się w postaci:

$$\operatorname{div}(\rho \tilde{k} \operatorname{grad}(H)) = \rho \eta_{spr} \frac{\partial H}{\partial t} \quad (5.23)$$

Gdzie η_{spr} określone jest mianem pojemności sprężystej warstwy i wynosi:

$$\eta_{spr} = \rho g (\beta_s + f \beta_w) \quad (5.24)$$

Zakładając, że zmiany gęstości cieczy w zależności od zmiennych przestrzennych są małe, przyjęto, że nie zależą od zmiennych przestrzennych. Równanie upraszcza się wówczas do postaci:

$$\operatorname{div}(\tilde{k} \operatorname{grad}(H)) = \eta_{spr} \frac{\partial H}{\partial t} \quad (5.25)$$

Powyższe równanie, mimo wykazanych nieprawidłowości od strony matematycznej i fizycznej uważa się jako podstawowe równanie hydrodynamiki wód podziemnych dla ośrodka ściśliwego, przez który przepływa ściśliwa ciecz i w oparciu o nie wykonuje się obliczenia numeryczne stosując profesjonalne programy do obliczeń hydrogeologicznych jak na przykład powszechnie stosowany program ModFlow [25].

5.1.2 Model matematyczny teorii filtracji zgodny z teorią konsolidacji Biota

5.1.2.1 Założenia wstępne

Przyjęte w poprzednim rozdziale założenia wstępne do teorii filtracji uzupełnimy o dodatkowe definicje wynikające z teorii konsolidacji Biota [Biot M.A., 1941, 1956] oraz na podstawie prac Coussy'ego [Coussy O., 2007, 2010] dla ośrodka dwufazowego. Stosując oznaczenia zgodne z pracami Strzeleckiego i inni [Strzelecki T., Żak S., Kostecki S. 2008]

- Niech Ω jest prostopadłościenną przestrzenią o nieskończenie małych krawędziach wypełnioną ośrodkiem dwufazowym złożonym: z porowatego szkieletu sprężystego i cieczy wypełniającej jego pory. Określimy przez S powierzchnię ściany elementu przestrzennego Ω , a wektor \bar{n} jest jednostkowym wektorem normalnym do powierzchni S , skierowanym na zewnątrz elementu Ω . Przez \bar{v}^l i \bar{v}^s oznaczamy odpowiednio wektory prędkości filtracji płynu i prędkości szkieletu ośrodka, a $v_i^r = v_i^l - v_i^s$ określa składowe względnej prędkości przepływu filtracyjnego cieczy przez ośrodek porowaty. Jeżeli ρ_s i ρ_l oznaczają kolejno gęstość właściwą szkieletu i cieczy, to możemy określić wielkość gęstości objętościowe szkieletu ρ_1 i cieczy ρ_2 , odniesione każda z nich do objętości całkowitej obszaru Ω . Oznaczając przez f porowatość objętościową, możemy obliczyć te gęstości: $\rho_1 = (1 - f)\rho_s$ i $\rho_2 = f\rho_l$. Przez ρ oznaczamy gęstość ośrodka dwufazowego równą, co do wartości sumie: $\rho = \rho_1 + \rho_2$. Wartość $\bar{\rho}$ oznaczamy gęstość płynu przepływającego przez ścianę S : $\bar{\rho} = f_A \rho_l$, gdzie f_A oznacza porowatość powierzchniową.
- energię kinetyczną ośrodka dwufazowego możemy wyrazić wzorem:

$$2K = \int_{\Omega} (\rho_{11} v_i^s v_i^s + 2\rho_{12} v_i^s v_i^l + \rho_{22} v_i^l v_i^l) d\Omega \quad (5.26)$$

z warunkami:

GEOTECHNIKA KIERUNEK GEODEZJA I KARTOGRAFIA

$$\rho_{11} + \rho_{12} = \rho_1 > 0; \quad \rho_{22} + \rho_{21} = \rho_2 > 0; \quad \rho_{12} < 0,$$

gdzie ρ_{12} jest nowym parametrem o wymiarze gęstości określającym dynamiczne sprzężenie pomiędzy dwoma fazami ośrodka;

- funkcja dyssypacji jest formą kwadratową zależną od prędkości względnej przepływu filtracyjnego, co można wyrazić w następujący sposób:

$$2W_d = \int_{\Omega} b v_i^r v_i^r d\Omega, \quad (5.27)$$

gdzie b jest współczynnikiem oporu filtracyjnego spełniającym warunek $b > 0$;

- korzystając z równania (5.27) można określić objętościowe siły wewnętrzne wynikające z oporu lepkiego przepływającej cieczy przez pory ośrodka. Siły działające na szkielet ośrodka wynoszą:

$$M_i^s = \frac{\partial W_d}{\partial v_i^s} = - \int_{\Omega} b v_i^r d\Omega \quad (5.28)$$

i na ciecz

$$M_i^l = \frac{\partial W_d}{\partial v_i^l} = \int_{\Omega} b v_i^r d\Omega, \quad (5.29)$$

- składowe lokalnego wektora pędu szkieletu i cieczy można obliczyć ze wzoru:

$$P_i^s = \int_{\Omega} (\rho_{11} v_i^s + \rho_{12} v_i^l) d\Omega, \quad (5.30)$$

$$P_i^l = \int_{\Omega} (\rho_{12} v_i^s + \rho_{22} v_i^l) d\Omega. \quad (5.31)$$

5.1.2.2 Równania ciągłości przepływu ośrodka dwufazowego

5.1.2.2.1 Przepływ łączny szkieletu i płynu

Bilans łączny przepływu masy szkieletu i płynu przez element reprezentatywny VER ma zgodnie z pracą Kisiel i inni [15] postać:

$$\int_s \rho v_i^s n_i dS + \int_s \bar{\rho} (v_i^l - v_i^s) n_i dS + \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega = 0. \quad (5.32)$$

Stąd korzystając z twierdzenia Gaussa – Ostrogradskiego równanie ciągłości przepływu ośrodka dwufazowego złożonego z płynu i szkieletu ma postać:

$$\frac{d^s \rho}{dt} + \rho \dot{\epsilon} = -[\rho v_i^r]_i, \quad (5.33)$$

gdzie $\frac{d^s}{dt}$ oznacza pochodną materialną wyrażoną wzorem:

$$\frac{d^s \bullet}{dt} = \frac{\partial \bullet}{\partial t} + v_i^s \frac{\partial \bullet}{\partial x_i}, \quad (5.34)$$

a $\dot{\epsilon}$ oznacza prędkość zmiany dylatacji szkieletu równa co do wartości $v_i^s \cdot v_i^s$.

5.1.2.2.2 Równanie ciągłości przepływu płynu.

Bilans masy płynu przepływającego przez RVE ma postać:

**GEOTECHNIKA
KIERUNEK GEODEZJA I KARTOGRAFIA**

$$\int_S \rho_2 v_i^r n_i dS + \int_{\Omega} \frac{\partial \rho_2}{\partial t} d\Omega = 0 \quad (5.35)$$

Stąd korzystając z twierdzenia Gaussa – Ostrogradskiego równanie ciągłości przepływu płynu ma postać:

$$\frac{d^r \rho_2}{dt} + \rho_2 (\theta - \dot{\epsilon}) = 0, \quad (5.36)$$

gdzie $\frac{d^r}{dt}$ jest pochodną materialną wyrażoną wzorem $\frac{d^r}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (v_i^l - v_i^s) \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Zakładając, że faza stała jest nieruchoma ($v_i^s = 0$), a przez pory przesącza się ściśliwa ciecz, równanie ciągłości przepływu ma sens tylko w odniesieniu do fazy ciekłej ośrodka i sprowadza się do postaci:

$$\text{div}(\rho_2 \vec{v}^l) = -\frac{\partial(\rho_2)}{\partial t}. \quad (5.37)$$

Taką postać równania ciągłości uzyskaliśmy w poprzednim rozdziale – wzór (5.10) dla klasycznego modelu hydrodynamicznego przepływu filtracyjnego.

5.1.2.3 Równania zachowania pędu dla fazy płynnej

Dla fazy płynnej ośrodka prawo zachowania pędu sprowadza się do postaci:

$$\int_S \sigma n_i dS + \int_{\Omega} b(v_i^s - v_i^l) d\Omega + \int_{\Omega} \rho_2 X_i d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial P_i^l}{\partial t} d\Omega, \quad (5.38)$$

σn_j oznacza naprężenie rozmyte tzn. odniesione do całej powierzchni przekroju obejmującej szkielet + płyn, a nie tylko do powierzchni zajmowanej przez płyn. Naprężenie σ równa się co do wartości:

$$\sigma = -pf, \quad (5.39)$$

przy czym p oznacza ciśnienie efektywne w płynie.

Równanie (5.38) po wykorzystaniu twierdzenia Gaussa - Ostrogradzkiego pozwala na uzyskanie lokalnego równania ruchu fazy ciekłej ośrodka w postaci:

$$\sigma_{,i} + X_i \rho_2 = b v_i^r + \rho_{12} \frac{\partial v_i^s}{\partial t} + \rho_{22} \frac{\partial v_i^l}{\partial t} \quad (5.40)$$

Dla przypadku przepływu quasi – statycznego można pominąć człony reprezentujące siły bezwładności cieczy i równania ruchu dla fazy płynnej można zapisać w postaci:

$$\sigma_{,i} + X_i \rho_2 = b v_i^r \quad (5.41)$$

Powyższe równanie prowadzi do klasycznego zapisu prawa Darcy'ego w postaci:

$$\vec{v}^r = k \text{grad} \left(-\frac{\sigma}{\rho_2 f g} - x_i \delta_{i3} \right) \quad (5.42)$$

Powyższe równanie (5.42) prowadzi do równania Darcy'ego, przy czym k określa współczynnik przewodności filtracyjnej Darcy,ego:

$$\vec{v} = -k \text{grad}(H) \quad (5.43)$$

Przy czym współczynnik filtracji $k = \rho_2 f g / b$.

GEOTECHNIKA KIERUNEK GEODEZJA I KARTOGRAFIA

Wykonując operację dywergencji na równaniu (5.41) równanie zachowania pędu możemy zapisać w postaci:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(\sigma)) = (\dot{\theta} - \dot{\varepsilon}) / k_w \quad (5.44)$$

znane jako równanie przepływu Darcy – Biota. W równaniu tym $\dot{\theta}$ określa prędkość zmiany dylatacji cieczy, $\dot{\varepsilon}$ określa prędkość zmiany dylatacji szkieletu, a k_w wyraża się wzorem:

$$k_w = \frac{k}{f \rho_2 g} = \frac{k}{f^2 \rho_1 g} \quad (5.45)$$

5.1.2.4 Równania konstytutywne

Związki konstytutywne ośrodka dwufazowego można uzyskać stosując prawa termodynamiki procesów nieodwracalnych. Pierwsze prawo termodynamiki można zapisać w postaci:

$$\dot{L} + \dot{Q} = \frac{\partial}{\partial t} (U + K) \quad (5.46)$$

gdzie \dot{L} oznacza moc sił powierzchniowych, masowych i oporu lepkiego cieczy, \dot{Q} ilość energii cieplnej przepływającej przez ciało, U określa energię wewnętrzną, a K energię kinetyczną. Po przeprowadzeniu postępowania zgodnego z zasadami termodynamiki uzyskuje się dla procesu izotermicznego na podstawie pracy Strzeleckiego i inni [Strzelecki T., Żak S., Kostecki S. 2008] związki konstytutywne dla szkieletu gruntowego i płynu przepływającego przez grunt w postaci:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= c_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \beta_{ij} \theta \\ \sigma - \sigma_a &= \beta_{ij} \varepsilon_{ij} + \gamma \theta \end{aligned} \quad (5.47)$$

gdzie c_{ijkl} to tensor sprężystości czwartego rzędu odniesiony do odkształceń szkieletu ośrodka dwufazowego, β_{ij} jest tensorem sprzężenia wynikające wzajemnego oddziaływania fazy stałej i ciekłej ośrodka, γ określa współczynnik ściśliwości płynu, σ_{ij} oznacza tensor naprężeń w szkielecie, σ to naprężenie w płynie, a σ_a to naprężenie w atmosferyczne równe 1 bar, ε_{ij} określa tensor odkształcenia szkieletu i θ to dylatacja płynu.

Powyższe związki konstytutywne stanowią po wprowadzeniu uproszczeń, gdy zakładamy izotropię szkieletu :

$$c_{ijkl} = A \delta_{ij} \delta_{kl} + N (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (5.48)$$

oraz przy założeniu, że tensor drugiego rzędu β_{ij} wzajemnego oddziaływania szkieletu ośrodka na płyn wyraża się związkiem:

$$\beta_{ij} = Q \delta_{ij} \quad (5.49)$$

oraz przyjmując za Biotem oznaczenie stałej ściśliwości cieczy, mamy:

$$\gamma = R \quad (5.50)$$

związki konstytutywne zaproponowane przez Biota w pracach [Biot M. A. 1941, 1956] :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2N \varepsilon_{ij} + (A\varepsilon + Q\theta) \delta_{ij} \\ \sigma - \sigma_a &= Q\varepsilon + R\theta \end{aligned} \quad (5.51)$$

gdzie: N, A to stałe sprężystości Lamego przy zastosowaniu oznaczeń M.A. Biota [Biot M. A., 1956] oraz R to moduł ściśliwości płynu, a Q oznacza współczynnik wzajemnego oddziaływania faz na siebie.

5.1.2.5 Równanie ruchu ściśliwego płynu przez nieodkształcalny szkielet ośrodka dwufazowego.

Przyjmując, że szkielet ośrodka jest nieodkształcalny, czyli zakładając, że $\varepsilon_{ij} = 0$, a co za tym idzie dylatacja szkieletu $\varepsilon = 0$, związki fizyczne (5.51) sprowadzają się do pojedynczego związku:

$$\sigma - \sigma_a = R\theta \quad (5.52)$$

Podstawiając powyższy związek fizyczny do równania ruchu cieczy (5.44) dostajemy równanie przepływu nieustalonego płynu przez nieodkształcalny szkielet ośrodka dwufazowego w postaci:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(\sigma)) = \frac{f \rho_2 g}{kR} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (5.53)$$

Jeżeli rozważamy przepływ ściśliwego gazu przez ośrodek porowaty to związek konstytutywny (5.52) po uwzględnieniu prawa Boyle'a Mariotta sprowadza się do postaci:

$$\sigma - \sigma_a = -\frac{\sigma_a}{(1+\theta)} \theta \quad (5.54)$$

Równanie przepływu gazu przez grunt przy założeniu nieściśliwości szkieletu gruntowego sprowadza się w tym przypadku do równania przepływu filtracyjnego w postaci:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(\sigma)) = -\frac{f^2 \rho_1 g \sigma_a}{k\sigma^2} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (5.55)$$

W przeciwieństwie do równania determinującego przepływ cieczy przez nieodkształcalny ośrodek porowaty równanie przepływu gazu jest nieliniowe.

5.1.2.6 Równania filtracji ściśliwego płynu przez ściśliwy szkielety ośrodka dwufazowego

Rozważamy proces filtracji w ośrodku dwufazowym, którego szkielet ulega odkształceniom objętościowym przy braku odkształceń postaciowych. Związki konstytutywne (5.51) w przypadku przepływu cieczy przez pory ośrodka dwufazowego sprowadzają się w tym przypadku do postaci:

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_{ii} = K_s \varepsilon + Q\theta \quad (5.56)$$

$$\sigma - \sigma_a = Q\varepsilon + R\theta$$

lub związki odwrotne:

$$\varepsilon = \frac{R}{K_s R - Q^2} \sigma_m - \frac{Q}{K_s R - Q^2} (\sigma - \sigma_a) \quad (5.57)$$

$$\theta = -\frac{Q}{K_s R - Q^2} \sigma_m + \frac{K_s}{K_s R - Q^2} (\sigma - \sigma_a)$$

Przy założeniu, że w ośrodku dwufazowym prędkość zmian ciśnienia porowego równe jest prędkości zmian naprężenia średniego w szkielecie ze znakiem przeciwnym, można przyjąć, że:

$$\dot{\sigma} = -\dot{\sigma}_m \quad (5.58)$$

Co prowadzi do układu równań:

**GEOTECHNIKA
KIERUNEK GEODEZJA I KARTOGRAFIA**

$$\begin{aligned} -\dot{\sigma} &= K_s \dot{\varepsilon} + Q \dot{\theta} \\ \dot{\sigma} &= Q \dot{\varepsilon} + R \dot{\theta} \end{aligned} \quad (5.59)$$

Skąd dostajemy związek:

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{Q+R}{Q+K_s} \dot{\theta} \quad (5.60)$$

Który prowadzi do związku:

$$\dot{\theta} = \frac{1}{R - Q \frac{Q+R}{Q+K_s}} \dot{\sigma} \quad (5.61)$$

W rezultacie dostajemy równanie przepływu nieustalonego w postaci:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(\sigma)) = \frac{(K_s - R) f^2 \rho_2 g}{(RK_s - Q^2) k} \dot{\sigma} \quad (5.62)$$

W przypadku przepływu gazu przez pory ośrodka dwufazowego, a szkielet ulega tylko odkształceniom objętościowym równania konstytutywne sprawdzają się do postaci:

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{1}{3} \sigma_{ii} = K_s \varepsilon + Q \theta \\ \sigma - \sigma_a &= Q \varepsilon - \frac{\sigma_a}{(1+\theta)} \theta \end{aligned} \quad (5.63)$$

Z pewnym uproszczeniem można przyjąć równanie filtracji nieustalonej gazu w postaci:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(\sigma)) = -\frac{(K_s \sigma_a + \sigma^2) f^2 \rho_2 g}{(\sigma^2 K_s + Q^2 \sigma_a) k_w} \dot{\sigma} \quad (5.64)$$

Przedstawiony w punkcie 6.1.2 model matematyczny procesu filtracji cieczy przez ośrodek porowaty różni się od stosowanego powszechnie równania filtracji nieustalonej.

Podstawowe różnice pozwalają stwierdzić:

- wyprowadzone powyżej równanie przepływu filtracyjnego (5.44) zostało zgodnie z zasadami stosowanymi w mechanice z zasady zachowania pędu, a nie z równania ciągłości przepływającej przez grunt cieczy,
- uzyskane równanie nieustalonego przepływu filtracyjnego zależy od przyjętych założeń dotyczących odkształceń fazy płynnej i stałej ośrodka dwufazowego,
- w przypadku przepływu gazu przez ośrodek porowaty równanie filtracji nieustalonej jest nieliniowe co pokazują równania (5.55) i (5.64),
- przyjęte w modelu klasycznym równanie ciągłości jest nieściśle bowiem zakłada, że gęstość cieczy jest funkcją czasu i nie zależy od zmiennych przestrzennych x_i i z tego powodu pochodna materialna $d\rho/dt$ jest równa pochodnej lokalnej $\partial\rho/\partial t$; pomija się więc człon konwekcyjny pochodnej materialnej,

- przyjęty związek konstytutywny określający zależność prędkości zmian porowatości od prędkości zmian ciśnienia porowego jako związek konstytutywny dla szkieletu gruntowego nie ma żadnego uzasadnienia w mechanice gruntów i skał i z tego względu należy go uznać jako niepoprawny,
- kolejnym istotnym błędem jest przyjęcie liniowej zależności pomiędzy prędkością zmian ciśnienia porowego i prędkością zmian wysokości hydraulicznej H ,

Jest jeszcze jeden istotny aspekt odrzucenia nieprawidłowo naszym zdaniem sformułowanej teorii ruchu nieustalonego przez pory ośrodka dwufazowego. Z punktu widzenia formalizmu matematycznego trudno rozszerzyć równanie ciągłości płynu o inne człony, gdy rozpatrujemy przepływ płynu wywołany działaniem pola elektrycznego lub gradientem stężenia jonów w płynie. Mechanizm budowy takiego modelu wymaga określenia funkcji dyssypacji prądu elektrycznego i dyssypacji w procesie przepływu osmotycznego oraz uwzględnienie tych funkcji w równaniach zachowania pędu, czyli przy zastosowaniu proponowanej metodyki definicji równań ruchu. Przyjmując jako punkt wyjścia klasyczny model matematyczny filtracji trudno również o jego rozbudowę o procesy nieizotermiczne. Jak pokazano to w pracy Strzeleckiego [Strzelecki M., 2013] model przepływu nieizotermicznego uzyskuje się z termodynamiki procesów nieodwracalnych poprzez uzyskanie dodatkowych członów w równaniach konstytutywnych. Uwzględniając dodatkowe człony zależne od temperatury w równaniach ruchu można uzyskać model termo-filtracji. Nie widzimy możliwości takiej rozbudowy modelu o kolejne zjawiska w przypadku klasycznego modelu teorii filtracji.

5.2 Rozwiązania zagadnień przepływu filtracyjnego metodami analitycznym.

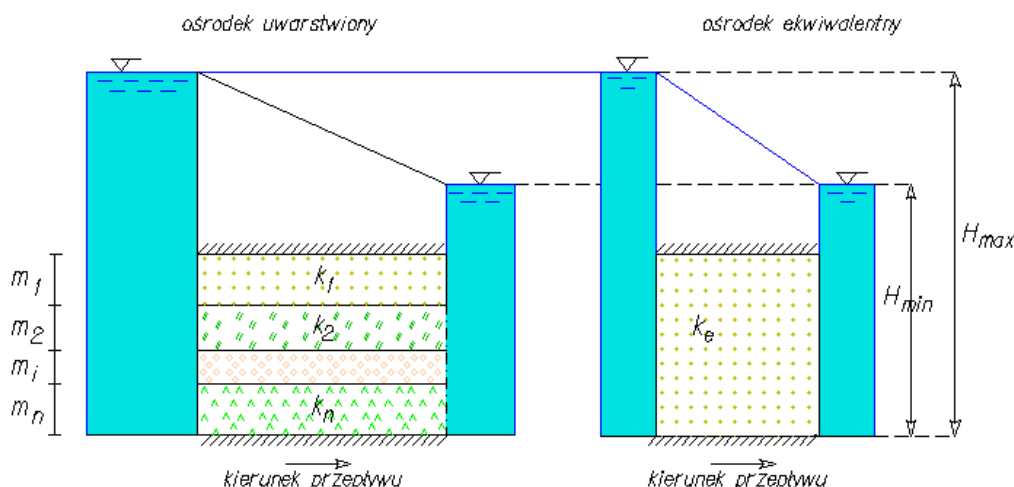
5.2.1 Zagadnienia jednowymiarowe filtracji.

5.2.1.1 Określenie średniego współczynnika filtracji dla przepływu przez ośrodek ekwiwalentny w odniesieniu do ośrodka uwarstwionego.

Przypadek I

Rozważmy poziomo uwarstwowaną warstwę przepuszczalną składającą się z n warstw o różnym współczynniku filtracji k – rys. 6.2

GEOTECHNIKA
KIERUNEK GEODEZJA I KARTOGRAFIA



Rys. 5.2 Przepływ przez ośrodek złożony z kilku warstw ułożonych równoległe do kierunku przepływu
a) ośrodek uwarstwiony, b) ośrodek ekwiwalentny.

Przepływ wywołany różnicą wysokości hydraulicznych ΔH pomiędzy przekrojami A i B odbywa się przez poszczególne warstwy w kierunku równoległym do warstw. Oznaczając m_1, m_2, \dots, m_n miąższość poszczególnych warstw oraz przez k_1, k_2, \dots, k_n ich współczynniki przepuszczalności, możemy korzystając z prawa Darcy'ego obliczyć wydatek przepływającej przez 1mb każdej z warstw wzorami.

$$\begin{aligned} Q_1 &= F_1 v_1 = m_1 k_1 i, \\ Q_2 &= F_2 v_2 = m_2 k_2 i, \\ &\vdots \\ Q_n &= F_n v_n = m_n k_n i. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Ponieważ, spadek hydrauliczny dla każdej z warstw jest jednakowy, równy $\frac{\Delta H}{L}$, gdzie L jest to odległość pomiędzy przekrojami A i B, wydatek dowolnej i -tej warstwy wynosi:

$$Q_i = m_i k_i i.$$

Rozważmy następnie ekwiwalentny ośrodek porowaty poddany działaniu takiego samego spadku hydraulicznego i oraz spełniającego warunek, że wydatek całkowity przepływający przez ten ośrodek jest równy sumie wydatków przepływających przez wszystkie n warstw ośrodka uwarstwowionego:

$$Q = \sum_1^n Q_i. \quad (6.1)$$

Ponieważ zgodnie z prawem Darcy'ego przepływ przez ten ośrodek możemy określić wzorem:

$$Q = i k_e \sum_1^m m_i, \quad (6.2)$$

można zapisać zależność:

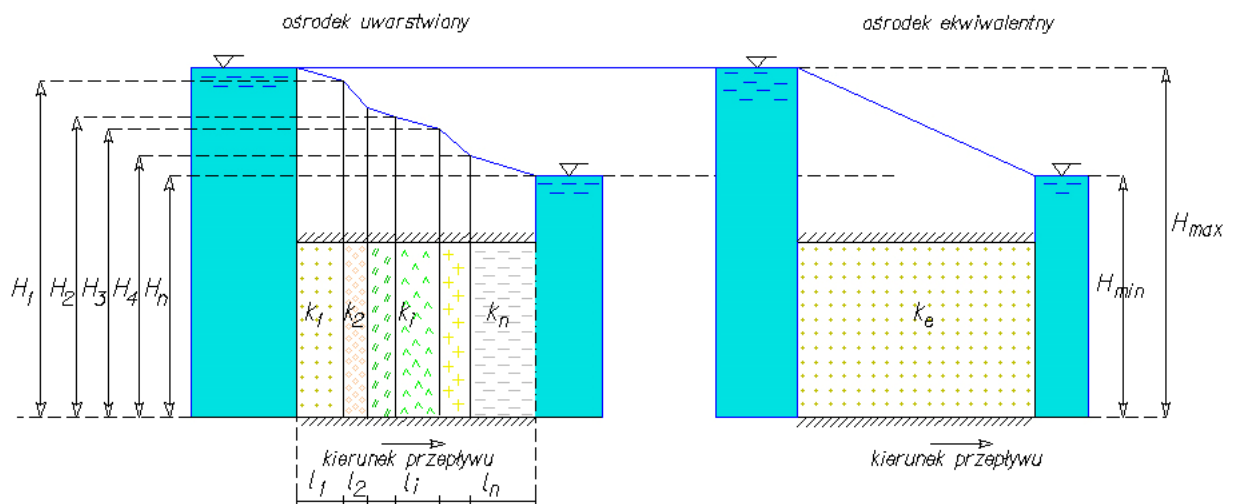
$$lk_e \sum_{i=1}^n m_i = l \sum_{i=1}^n m_i k_i. \quad (6.3)$$

Z zależności (6.3) można obliczyć wartość średnią współczynnika filtracji Darcy'ego k_e dla ośrodka ekwiwalentnego wzorem:

$$k_e = \frac{\sum_{i=1}^n m_i k_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (6.4)$$

Przypadek II.

Rozważmy pionowo uwarstwioną warstwę przepuszczalną składającą się z n warstw o różnym współczynniku filtracji k – rys. 5.3



Rys. 5.3 Przepływ przez ośrodek złożony z kilku warstw ułożonych równoległe do kierunku przepływu
a) ośrodek uwarstwiony, b) ośrodek ekwiwalentny.

Przepływ wywołany różnicą wysokości hydraulicznych ΔH pomiędzy przekrojami A i B odbywa się przez poszczególne warstwy w kierunku prostopadłym do warstw. Oznaczając l_1, l_2, \dots, l_n szerokości poszczególnych warstw oraz przez k_1, k_2, \dots, k_n ich współczynniki przepuszczalności, możemy korzystając z prawa Darcy'ego obliczyć prędkość filtracji przepływającej przez 1mb każdej z warstw wzorami:

GEOTECHNIKA
KIERUNEK GEODEZJA I KARTOGRAFIA

$$\begin{aligned}v_1 &= k_1 I_1, \\v_2 &= k_2 I_2, \\&\vdots \\v_n &= k_n I_n.\end{aligned}$$

Ponieważ w obszarze filtracji nie ma źródeł cieczy, a zakładamy, że zarówno ośrodek porowaty, jak i ciecz jest nieściśliwa, wydatek przepływający przez dowolny przekrój prostopadły do kierunku przepływu jest taki sam, więc:

$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n = Q.$$

Ponieważ miąższość wszystkich warstw jest stała, równa m , więc również prędkość przepływu przez każdą z warstw jest jednakowa:

$$v_1 = v_2 = \dots = v_n = v. \quad (6.1)$$

Przyjmując wartość prędkości przez poszczególne warstwy równą v możemy obliczyć spadek hydrauliczny przypadający na każdą z warstw:

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{v}{k_1}, \\I_2 &= \frac{v}{k_2}, \\&\vdots \\I_n &= \frac{v}{k_n}.\end{aligned} \quad (6.2)$$

Wiemy, że spadek całkowity pomiędzy przekrojami A i B wynosi I , więc:

$$I = \sum_{i=1}^n I_i. \quad (6.3)$$

Dla ośrodka ekwiwalentnego zakładamy taką samą prędkość filtracji cieczy przepływającej przez dowolny przekrój prostopadły do kierunku przepływu ośrodka uwarstwionego:

$$v = k_e I. \quad (6.4)$$

Stąd uzyskujemy równanie:

$$\frac{v}{k_e} = \sum_{i=1}^n \frac{v}{k_i}. \quad (6.5)$$

Na podstawie równania (6.5) możemy obliczyć wartość średnią współczynnika filtracji k_e dla ośrodka ekwiwalentnego wzorem:

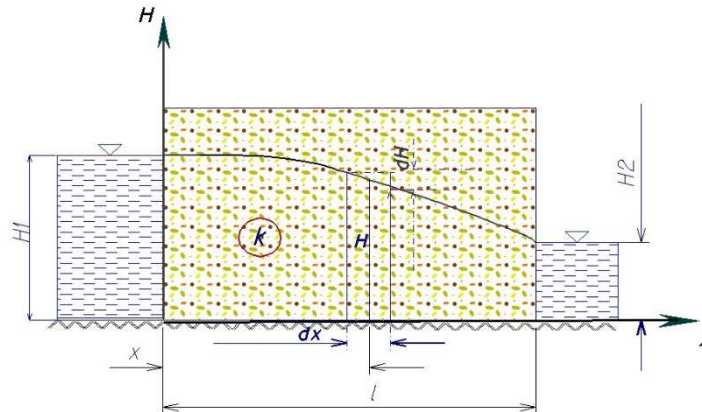
$$k_e = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}} \quad (6.6)$$

Jak widać, ekwiwalentny współczynnik filtracji jest średnią geometryczną z wartości współczynników filtracji ośrodka jednorodnego. Powyższy przykład jest analizowany metodą teorii homogenizacji w rozdziale VI. Dla przypadków ośrodka niejednorodnego, bardziej skomplikowanego niż przypadki analizowane powyżej, należy stosować bardziej złożone narzędzia matematyczne oparte na twierdzeniach teorii homogenizacji.

5.2.2 Przykłady rozwiązań zadań dwuwymiarowych w oparciu o aproksymację Dupuit .

5.2.2.1 Zagadnienia przepływu ustalonego przy zasilaniu bocznym - przepływ wody przez groblę.

Grobla zbudowana z gruntu jednorodnego i izotropowego o współczynniku filtracji k spoczywa na poziomo ułożonym stopniu warstwy nieprzepuszczalnej (rys. 5.4).

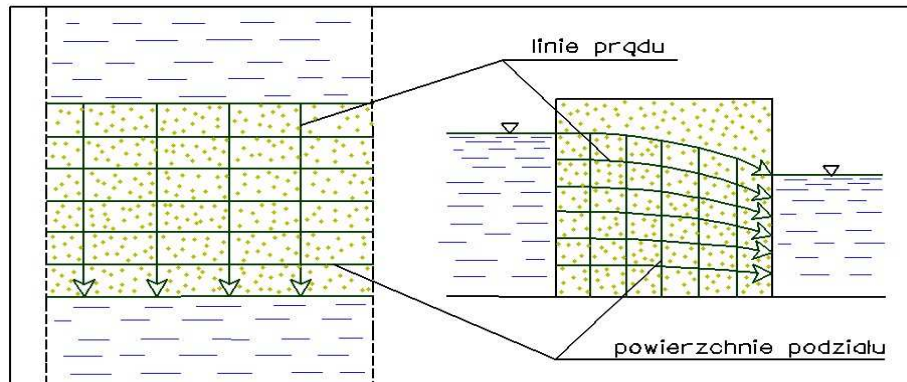


Rys. 5.4 Schemat zadania – przepływ wody przez groblę.

Szerokość grobli wynosi 1m, natomiast długość l . Poziom wody po jednej stronie grobli wynosi H_1 , natomiast po drugiej H_2 . Przepływ wody przez groblę jest ustalony. Wyznamy poziom zwierciadła wody w grobli oraz wydatek przepływającej przez groblę wody.

Linie prądu w tym przypadku wyglądają tak, jak to pokazano na (rys. 6.5).

**GEOTECHNIKA
KIERUNEK GEODEZJA I KARTOGRAFIA**



Rys. 5.5 Linie prądu i powierzchnie przekroju.

Widać więc, że podział obszaru filtracji przekrojami pionowymi prostopadłymi do brzegu nieprzepuszczalnego odpowiada założeniom teorii Dupuit. Prędkość filtracji w odległości x od początku układu współrzędnych wyniesie:

$$v = k \frac{dH}{dx} . \quad (6.7)$$

Wydatek przypadający na 1mb grobli jest równy:

$$q = Fv = kH \frac{dH}{dx} = const . \quad (6.8)$$

Rozwiązując powyższe równanie różniczkowe zwyczajne metodą rozdzielania zmiennych, otrzymamy:

$$H = \sqrt{\left(-\frac{2q}{k}x + c\right)} . \quad (6.9)$$

Uwzględniając warunek brzegowy:

dla $x = 0; H = H_1$

oraz $x = l; H = H_2,$

wyznamy stałą c oraz wydatek q w równaniu (6.9):

$$c = H_1^2 , \quad (6.10)$$

$$q = \frac{k}{2l} (H_1^2 - H_2^2) .$$

Równanie opisujące powierzchnię swobodną zwierciadła wody ma więc w postaci:

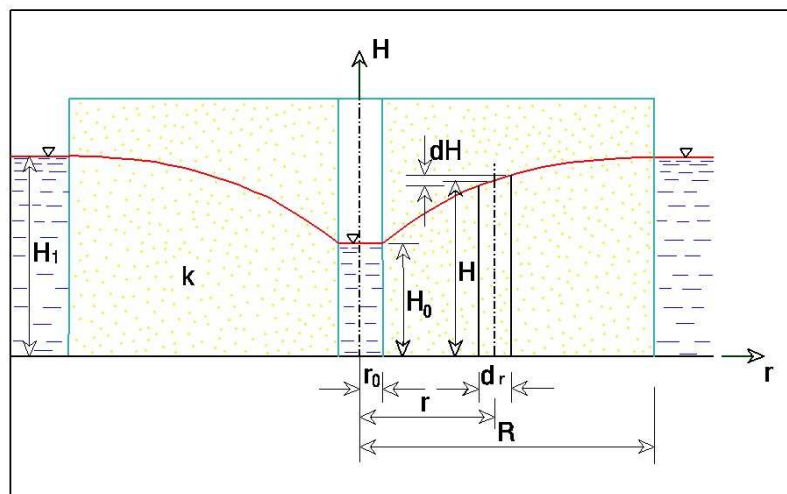
$$H = \sqrt{-(H_1^2 - H_2^2) \frac{x}{l} + H_1^2}. \quad (6.11)$$

Rozkład prędkości filtracji wzdłuż drogi przepływu przedstawia się następująco:

$$v = \frac{k}{2l} \frac{H_1^2 - H_2^2}{\sqrt{H_1^2 - (H_1^2 - H_2^2) \frac{x}{l}}}. \quad (6.12)$$

5.2.2.2 Dopływ do studni w warstwie o zwierciadle swobodnym przy zasilaniu bocznym.

Rozwiążemy dopływ do studni o zwierciadle swobodnym (rys.6.6) przy następujących założeniach:

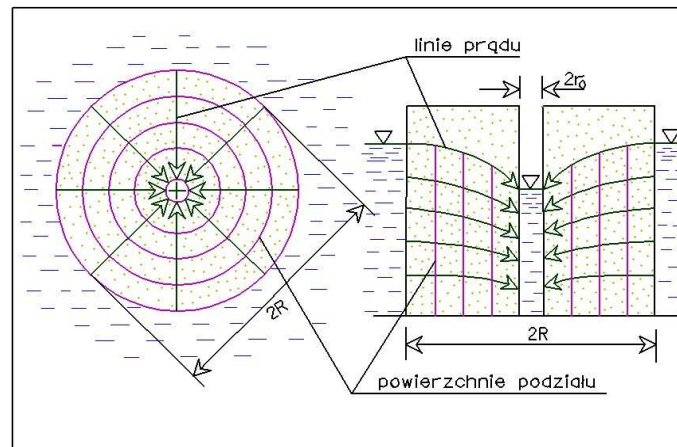


Rys. 6.6 Schemat zadania – dopływ cieczy nieściśliwej do studni.

- studnia o promieniu r leży na środku wyspy o promieniu R ,
- warstwa wodonośna o współczynniku filtracji k jest jednorodna i izotropowa,
- strop warstwy nieprzepuszczalnej jest ułożony poziomo,
- studnia sięga spągu warstwy przepuszczalnej (studnia zupełna) i jest do niej prostopadła,
- przed pompowaniem zwierciadło cieczy jest poziome,
- na brzegach wyspy poziom wody względem stropu warstwy nieprzepuszczalnej wynosi H_1 ,
- w studni H_0 ,
- przepływ jest ustalony i laminarny.

Zaznaczmy na rys. 6.7 przebieg linii prądu dla rozwiązywanego zadania.

**GEOTECHNIKA
KIERUNEK GEODEZJA I KARTOGRAFIA**



Rys 5.7. Przebieg linii prądu.

Obszar filtracji w tym przypadku podzielimy pionowymi, współosiowymi ze studnią powierzchniami. Prędkość filtracji w odległości r od osi studni wyniesie:

$$v = k \frac{dH}{dr},$$

wydatek natomiast będzie równy:

$$Q = 2\pi r H k \frac{dH}{dr}.$$

Rozwiązując powyższe równanie różniczkowe metodą rozdzielania zmiennych otrzymamy:

$$H = \sqrt{\frac{Q}{\pi k} \ln r + c}. \quad (6.13)$$

Warunki brzegowe dla rozpatrywanego przypadku są następujące:

dla $r = r_0; H = H_0$

oraz $r = R; H = H_1.$

Uwzględniając powyższe warunki uzyskujemy równanie opisujące powierzchnię zwierciadła wody w postaci:

$$H = \sqrt{H_1^2 - (H_1^2 - H_0^2) \frac{\ln \frac{r}{r_0}}{\ln \frac{R}{r_0}}} \quad (6.14)$$

oraz wzór na wydatek dopływającego do studni:

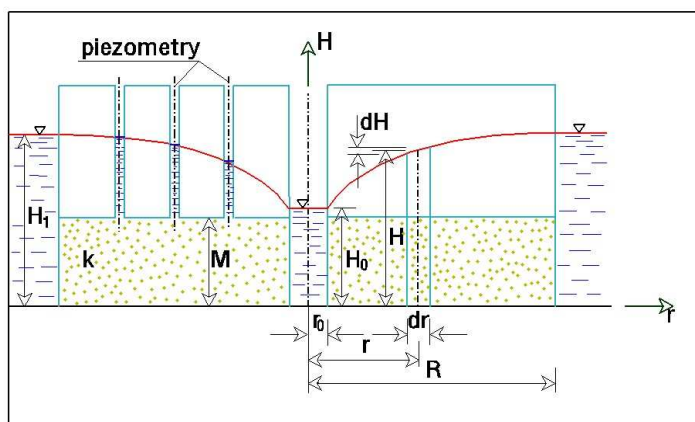
$$Q = \frac{\pi k (H_1^2 - H_0^2)}{\ln \frac{R}{r_0}}, \quad (6.15)$$

natomiast prędkość filtracji wyrazi się wzorem:

$$v = \frac{k(H_1^2 - H_0^2)}{2r \ln \frac{R}{r_0} \sqrt{H_1^2 - (H_1^2 - H_0^2) \frac{\ln \frac{R}{r}}{\ln \frac{R}{r_0}}}}. \quad (6.16)$$

5.2.2.3. Dopływ do studni w warstwie o zwierciadle napiętym.

Zadanie rozwiążemy przy założeniach z przykładu poprzedniego z tym, że w miejsce trzeciego założenia dajemy założenie następujące: warstwa wodonośna o stałej miąższości M jest ułożona poziomo (rys. 6.8).



Rys. 5.8 Schemat zadania – dopływ do studni w warstwie o zwierciadle napiętym.

Łatwo zauważyć, że, podobnie jak w przykładzie rozwiązanym poprzednio (podrozdz. VII. 2.2) obszar filtracji można podzielić pionowymi, współosiowymi powierzchniami (rys. 19). Prędkość filtracji w odległości r od studni napiszemy zgodnie z teorią Dupuit w postaci:

$$v = k \frac{dH}{dr}.$$

Równanie ciągłości przepływu ma postać:

$$Q = 2\pi r M k \frac{dH}{dr}. \quad (6.17)$$

GEOTECHNIKA
KIERUNEK GEODEZJA I KARTOGRAFIA

Rozwiązanie tego równania ma postać:

$$H = \frac{Q}{2\pi Mk} \ln r + c. \quad (6.18)$$

Warunki brzegowe dla rozpatrywanego przypadku są następujące:

dla $r = r_0$; $H = H_0$
oraz $r = R$; $H = H_1$.

Ostatecznie rozwiązanie zadania po uwzględnieniu warunków brzegowych ma postać:

1. równania opisującego linię piezometryczną ciśnień:

$$H = \frac{Q}{2\pi kM} \ln \frac{r}{r_0} + H_0; \quad (6.19)$$

2. wydatku dopływającej do studni wody:

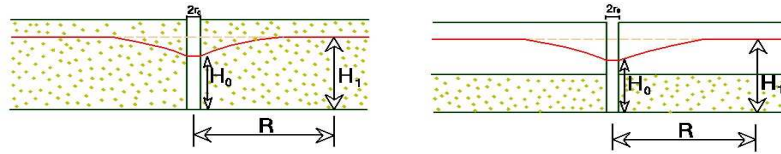
$$Q = \frac{2\pi kM(H_1 - H_0)}{\ln \frac{R}{r_0}}; \quad (6.20)$$

3. rozkładu prędkości wzdłuż drogi filtracji:

$$v = \frac{k(H_1 - H_0)}{r \ln \frac{R}{r_0}}. \quad (6.21)$$

Wzory stanowiące rozwiązania w poprzednich podrozdziałach [VII.2.1 do VII.2.3] stosuje się często w praktyce inżynierskiej nie tylko do obliczania studni będących w środku wyspy otoczonej wodą, lecz również w przypadkach schematów przedstawionych na rys. 6.9.

GEOTECHNIKA
KIERUNEK GEODEZJA I KARTOGRAFIA



Rys 5.9. Schematy dopływu wody do studni.

Do obliczeń potrzebna jest w tym przypadku znajomość zasięgu lejki depresji R . Określa się ją przy pomocy wzorów empirycznych. Do najczęściej stosowanych zalicza się:

- wzór Sichardta – dla studni o zwierciadle napiętym:

$$R = 3000s\sqrt{k} , \quad (6.22)$$

gdzie

$s = H_1 - H_0 \Rightarrow$ depresja w [m],

$k \Rightarrow$ współczynnik filtracji w [m/s],

$R \Rightarrow$ promień zasięgu lejki depresji w [m];

- wzór Kusakina – dla studni o zwierciadle swobodnym:

$$R = 575s\sqrt{kH} , \quad (6.23)$$

gdzie

$s = H_1 - H_0 \Rightarrow$ depresja w [m],

$k \Rightarrow$ współczynnik filtracji w [m/s],

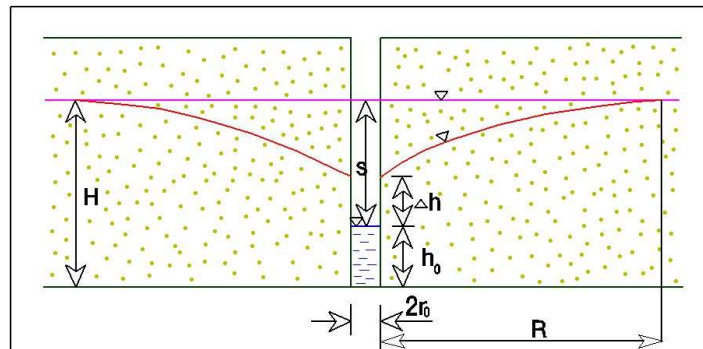
$R \Rightarrow$ promień zasięgu lejki depresji w [m],

$H \Rightarrow$ średnia miąższość warstwy wodonośnej w [m].

Korzystanie z powyższych wzorów wymaga dużej ostrożności. Trzeba pamiętać, że powinny być spełnione warunki określone założeniami teorii Dupuita, więc zakres stosowania ich jest wąski. Szczególnie, gdy depresja s jest duża, powinno wykorzystywać się rozwiązanie wynikające z teorii lepiej opisującej rzeczywistość.

5.2.2.4 Zeskok hydrauliczny.

W przypadku występowania swobodnego zwierciadła wody na powierzchni stanowiącej granicę obszaru filtracji, przez którą następuje wypływ wody, powstaje uskoczek hydrauliczny. Jest to różnica między poziomem zwierciadła wody w obszarze filtracji przy wypływie a poziomem wody poza tym obszarem (rys. 5.10).



Rys. 5.10. Zeskok hydrauliczny.

W oparciu o teorię Dupuit nie da się określić wielkości zeskoku hydraulicznego z równań teorii. Dlatego w przypadku stosowania tej teorii wielkość uskoku hydraulicznego ΔH określana jest na podstawie licznych wzorów empirycznych. Dla przykładu dla studni zupełnej można obliczyć wartość ΔH w oparciu o wzór (6.24) [Czarnego, 1948]:

$$\Delta H = \sqrt{\frac{Q}{k} \left(0,73 \ln \left(\frac{\sqrt{\frac{Q}{k}}}{r_0} - 0,5 \right) + H_0^2 \right)} - H_0, \quad (6.24)$$

gdzie:

- $Q \Rightarrow$ wydatek studni $[m^3 / s]$,
- $k \Rightarrow$ współczynnik filtracji $[m / s]$,
- $r_0 \Rightarrow$ promień studni $[m]$,
- $H_0 \Rightarrow$ poziom wody w studni $[m]$.

Orientacyjnie uskok hydrauliczny dla studni można obliczyć z prostszego wzoru empirycznego:

$$\Delta H = \frac{0,005s^2}{M}, \quad (6.25)$$

gdzie:

- $\Delta H \Rightarrow$ uskok hydrauliczny $[m]$,
- $s \Rightarrow$ depresja $[m]$,
- $M \Rightarrow$ miąższość warstwy wodonośnej $[m]$.

5.2.3 Dopływ do studni niezupełnych.

Najczęściej stosowane wzory na obliczenie dopływu do studni niezupełnych można podzielić na dwie grupy:

GEOTECHNIKA
KIERUNEK GEODEZJA I KARTOGRAFIA

- wzory uwzględniające niezupełność studni poprzez poprawkę określoną na drodze doświadczalnej,
- wzory analityczne wyprowadzone przy założeniu, że w pewnym obszarze przepływ ma charakter sferyczny

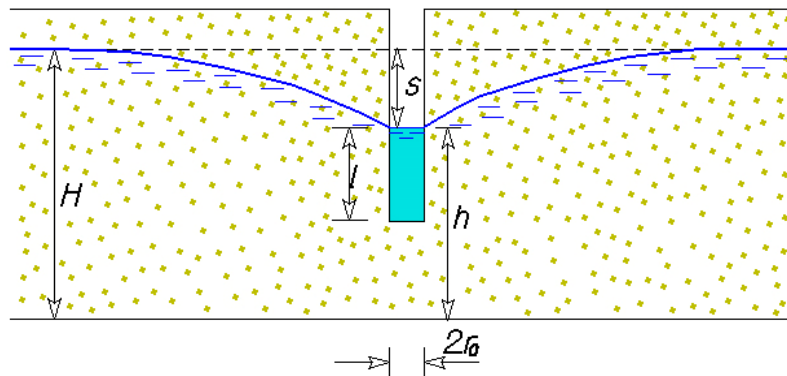
Wzory analityczne dają na ogół dokładniejsze wyniki, lecz ze względu na ich dużą liczbę nie będą w niniejszej pracy cytowane. Czytelnik znajdzie je w innych monografiach [Wieczystego, 1982], [Pazdro, 1983] oraz w [Poradniku Hydrogeologa, 1971]. Podany zostanie wzór na obliczenie dopływu do studni niezupełnej Q_{nz} z poprawką Ph. Forchheimera:

$$Q_{nz} = Q_z b, \quad (6.26)$$

gdzie:

$Q_z \Rightarrow$ wydatek studni zupełnej w analogicznych warunkach hydrogeologicznych,

$b \Rightarrow$ poprawka Forchheimera.



Rys. 5.11 Studnia niezupełna w warstwie o zwierciadle swobodnym.

Wartość poprawki dla studni w warstwie o zwierciadle swobodnym (rys. 6.11) przy spełnieniu warunku $\frac{1}{3}(H - s) \leq l$ wynosi:

$$b = \sqrt{\frac{l}{h}} \sqrt{2 - \frac{l}{h}}, \quad (6.27)$$

Tak więc wydatek Q_{nz} będzie równy:

$$Q = \frac{\pi k (H_1^2 - H_0^2)}{\ln \frac{R}{r_0}} b. \quad (6.28)$$

GEOTECHNIKA
KIERUNEK GEODEZJA I KARTOGRAFIA

W przypadku, gdy $\frac{1}{3}(H - s) > l$ przyjmuje się, że strop warstwy nieprzepuszczalnej zalega na głębokości H_a , zwanej miąższością strefy aktywnej. **E.A. Zamarin** zaleca przyjmować H_a w zależności od depresji studni (tabela 7.1)

Tabela 6.1

$s/(s+l)$	0,2	0,3	0,5	0,8	1,0
$H_a/(s+l)$	1,3	1,5	1,7	1,85	2,0

Po określeniu H_a obliczamy $h_a = H_a - s$ i wstawmy do wzoru (6.28) zamiast H_1 i H_0 .

Wartość poprawki Ph. Forchheimera dla studni w warstwie o zwierciadle napiętym wynosi:

$$b = \sqrt{\frac{l}{M}} \sqrt[4]{2 - \frac{l}{M}}, \quad (6.29)$$

gdzie:

$M \Rightarrow$ miąższość warstwy wodonośnej,

$l \Rightarrow$ długość filtra.

Wydatek studni niepełnej jest, zatem równy:

$$Q_{nz} = \frac{2\pi M k s}{\ln \frac{R}{r_0}} \sqrt{\frac{l}{M}} \sqrt[4]{2 - \frac{l}{M}}. \quad (6.30)$$

Jeżeli miąższość warstwy wodonośnej jest duża, to należy określić miąższość strefy aktywnej H_a wg. relacji Zamarina [] i we wzorze (6.30) w miejsce M wstawmy H_a .

5.2.4 Współdziałanie studni.

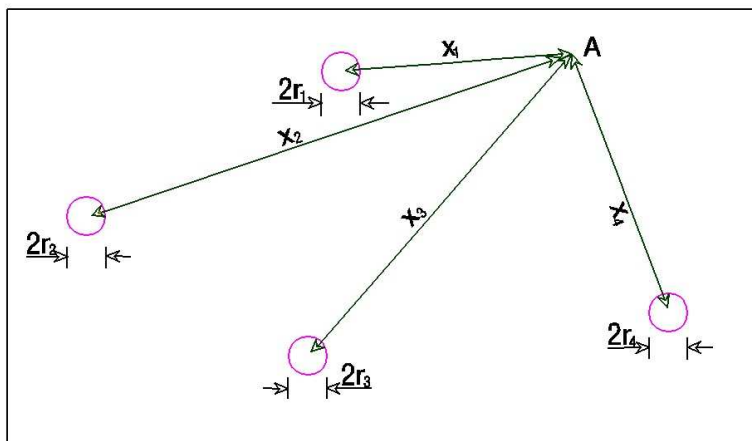
W praktyce inżynierskiej bardzo często występuje problem określenia kształtu powierzchni zwierciadła wody podziemnej (lub piezometrycznej powierzchni ciśnień) w otoczeniu studni współdziałających, bądź obliczenia ich wydajności. Poniżej przedstawiona zostanie jedna z wielu metod obliczania studni współdziałających. Jest to metoda P. Forchheimera szczególnie chętnie stosowana przy projektowaniu systemów odwadniających, których zadaniem jest utrzymanie stałego obniżenia zwierciadła wody podziemnej.

Założenia tej metody są następujące:

- w warstwie wodonośnej o swobodnym zwierciadle wody zlokalizowano n studni w odległościach umożliwiających wzajemny wpływ na siebie,
- spąg warstwy wodonośnej jest poziomy,
- studnie są zupełne i prostopadłe do spągu warstwy wodonośnej,
- warstwa wodonośna o współczynniku filtracji k jest jednorodna i izotropowa,
- przed pompowaniem zwierciadło wody jest poziome,
- woda pompowana jest ze wszystkich studni tak długo, że przepływ jest ustalony,
- przepływ wody podziemnej jest laminarny,

GEOTECHNIKA
KIERUNEK GEODEZJA I KARTOGRAFIA

- zakłada się słuszność rozwiązania zagadnienia dopływu do studni w warstwie o zwierciadle swobodnym.



Rys. 5.12 Współdziałanie studni w warstwie o zwierciadle swobodnym.

Metoda Ph. Forchheimera bazuje na twierdzeniu, że jeśli dla każdej z n studni pracujących oddzielnie zwierciadło wody podziemnej opisują równania:

$$y_1^2 = f_1(x, y); \quad y_2^2 = f_2(x, y); \quad \dots; \quad y_n^2 = f_n(x, y),$$

to równanie opisujące powierzchnię zwierciadła wody, gdy wszystkie studnie pracują równocześnie i oddziałują na siebie ma postać:

$$y^2 = \sum_{i=1}^n f_i(x, y) + c. \tag{6.31}$$

Stałą c wyznacza się w tym równaniu z warunków brzegowych występujących na granicy zasilania.

Zgodnie ze wzorami (6.13) i (6.14) dla studni pracującej oddzielnie w warunkach przepływu swobodnego, równanie opisujące powierzchnię zwierciadła wody ma postać:

$$H^2 = H_0^2 + \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{r}{r_0}.$$

Dla każdej z n studni działającej nie zależnie (rys. 7.11) możemy zapisać:

$$y_1^2 = H_{01}^2 + \frac{Q_1}{\pi k} \ln \frac{r_1}{r_{01}},$$

$$y_2^2 = H_{01}^2 + \frac{Q_1}{\pi k} \ln \frac{r_2}{r_{02}},$$

.....,

$$y_i^2 = H_{0i}^2 + \frac{Q_i}{\pi k} \ln \frac{r_i}{r_{0i}},$$

.....,

GEOTECHNIKA
KIERUNEK GEODEZJA I KARTOGRAFIA

$$y_n^2 = H_{0n}^2 + \frac{Q_n}{\pi k} \ln \frac{r_n}{r_{0n}},$$

gdzie:

- H_{0i} oznacza głębokość studni w i-tej studni,
- y_i to poziom zwierciadła wody w dowolnym punkcie A oddalonym o promień r_i od środka i-tej studni, gdyby pracowała ona samodzielnie,
- Q_i określa wydatek i-tej studni,
- r_i oznacza odległość punktu A od środka i-tej studni,
- k to współczynnik filtracji,
- r_{0i} określa promień i-tej studni.

Dla studni oddziaływujących zgodnie z powyższymi wzorami równanie zwierciadła wody przyjmie postać:

$$y^2 = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{\pi k} \ln \frac{r_i}{r_{0i}} + c. \quad (6.32)$$

Stałą c można wyznaczyć biorąc pod uwagę punkt B leżący na granicy wpływu systemu wszystkich studni. Dla tego punktu odległości pomiędzy studniami są małe w porównaniu z odległością do tego punktu, co pozwala założyć, że $x_1 = x_2 = \dots = x_n = R$. Uwzględniając warunek, że w odległości R $y = H$ dostajemy:

$$c = \sqrt{H^2 - \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{\pi k} \ln \frac{R}{r_i}},$$

wstawiając stałą c do równania (6.32) mamy:

$$y = \sqrt{H^2 - \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{\pi k} \ln \frac{R}{r_i}}. \quad (6.33)$$

W najprostszym przypadku można przyjąć, że wydatki poszczególnych studni są jednakowe:

$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_i = \dots = Q_n = Q.$$

Wówczas powierzchnię zwierciadła swobodnego wód gruntowych opisuje równanie:

$$y = \sqrt{H^2 - \frac{Q}{\pi k} (n \ln R - \ln(r_1 r_2 \dots r_n))}. \quad (6.34)$$

Jeśli z kolei założymy, że znamy w pewnym określonym punkcie A, znajdującym się w obszarze oddziaływania studni, wartość y_A określającą położenie zwierciadła wody, to na podstawie (6.34) możemy określić wydatek Q , jaki powinna mieć każda studnia:

GEOTECHNIKA
KIERUNEK GEODEZJA I KARTOGRAFIA

$$Q = \frac{\pi k (H^2 - y_A^2)}{n \ln R - \ln(x_1 x_2 \cdots x_n)}, \quad (6.35)$$

a tym samym wydatek całego ujęcia wynosi:

$$Q_c = nQ. \quad (6.36)$$

W przypadku reżimu przepływu pod ciśnieniem postępujemy analogicznie jak w przypadku przepływu swobodnego wykorzystując zasadę superpozycji.

5.3 Literatura.

- AURIAULT J.L., Dynamic Behaviour of a Porous Medium Saturated by a Newtonian Fluid, *Int. J. Engng. Sc.*, (1980), vol. 18.
- AURIAULT J.L., STRZELECKI T., On the Electro-Osmotic Flow in a Saturated Porous Medium., *Int. J. Engng. Sc.*, (1981), vol. 19.
- AURIAULT J.L., STRZELECKI T., BAUER J., HE S., Porous deformable Media Saturated by a Very Compressible Fluid, *Eur. J. Mech. A/Solid*, (1990), vol. 9,4.
- BENSOUSSAN A., LIONS J.L., PAPANICOLAOU G., *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, Holland Publishing Company, Amsterdam, (1978).
- BIOT M.A., General Theory of three-dimensional Consolidation, *J. Appl. Physics*, (1941), vol.12
- BIOT M.A., Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated porous Solid, I Low-Frequency Range, *J.A.S.A* (1956), 28,2
- BARTLEWSKA M., STRZELECKI T., Equations of Biots consolidation with Kelvin–Voight rheological frame, *Studia Geotechnica et Mechanica*, 2009, Vol. XXXI, No. 2,
- BARTLEWSKA M., STRZELECKI T., One-dimensional consolidation of the porous medium with the Rheological Kelvin–Voight skeleton, *Studia Geotechnica et Mechanica*, 2008, Vol. XXX,
- COUSSY O. Revisiting the constitutive equations of unsaturated porous solids using a Lagrangian saturation concept, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* 31(2007)
- COUSSY O. *Mechanics and Physics of Porous Solids*, JohnWiley. (2010)
- DETOURNAY E. & CHENG A.H.-D., *Fundamentals of Poroelasticity*, *Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practice and Projects*, Vol. II, Analysis and Design Methods, Oxford: Pergamon Press. (1993)
- FORCHEHEIMER P., *Hydraulik*, Leipzig, (1914)
- DARCY H., *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*, Paris, 1856
- DUPUIT J., *Etudes theoriques et prctiques sur le mouvement des eaux dans les canaux decouvert et a travers les terrains permeable*, Paris, 1863
- KISIEL I, DERSKI W. IZBICKI R., MRÓZ Z., *Mechanika gruntów i skał*, Seria: Mechanika Techniczna, tom VII, PWN, Warszawa (1982)
- ŁYDŹBA D., Constitutive equations of gas-coal medium, *Studia Geotechnica et Mechanica*, 13(3–4) (1991)
- ŁYDŹBA D., *Zastosowanie metody asymptotycznej homogenizacji w mechanice gruntów i skał*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, (2002)
- LAMBE T.W., WHITMAN R.V., *Mechanika gruntów*, Arkady, Warszawa, (1978)
- POŁUBARINOWA-KOCZINA P.J., *Teoria dźwienja podziemnych wód*, Nauka, Moskwa (1977)
- STRZELECKI T., BAUER J. , AURIAULT J.L., Constitutive equation of a gas-filled two-phase medium, *Transport in Porous Media* 10, (1993)

**GEOTECHNIKA
KIERUNEK GEODEZJA I KARTOGRAFIA**

STRZELECKI T., AURIAULT J.L., BAUER J., KOSTECKI S., PUŁA W., Mechanika ośrodków niejednorodnych, Teoria homogenizacji, Lower Silesia Educational Publishers. (in Polish) (1996)

STRZELECKI T., KOSTECKI S. ŻAK, S.. Modeling of flows through porous media, Lower Silesia Educational Publishers. (in Polish) (2008)

STRZELECKI M., "Quick sands effect on desert lands – example of filtration stability loss";
Studia Geotechnica et Mechanica, Vol. XXXV, No. 1, (2013)

WIECZYSTY A., Hydrogeologia Inżynierska, PWN, Warszawa, 1982

ModFlow : <http://water.usgs.gov/oqg/modflow/>