

4. STAN NAPRĘŻENIA I ODKSZTAŁCANIA

Tomasz Strzelecki

4.1 Wprowadzenie.

Generalnie można podzielić rodzaje modeli opisujących procesy związane z przepływem cieczy lub gazu przez ośrodek porowaty zakładające, że rozważany przez nas ośrodek jest jednorodny, na trzy podstawowe grupy:

- modele opisujące przepływ cieczy przez ośrodek porowaty zakładające ściśliwość fazy ciekłej i stałej ośrodka porowatego, ale nieuwzględniające odkształceń postaciowych fazy. Do grupy tej zalicza się również model, w którym zakłada się brak jakichkolwiek odkształceń cieczy i szkieletu ośrodka. Równania opisujące takie zjawisko określamy nazwą **model hydrodynamiki wód podziemnych**,
- modele zakładające, że ciało porowate, przez które odbywa się przepływ cieczy jest ciałem Hooke'a lub ciałem lepko-sprężystym opisanym równaniem Boltzmana i podlega zarówno odkształceniom objętościowym, jak i postaciowym. W literaturze określa się tego typu równania procesu **modelami konsolidacji ośrodka porowatego**,
- grupę modeli zakładającą możliwość utraty stateczności ośrodka porowatego w przypadku, gdy przez jego pory odbywa się przepływ filtracyjny. Rozróżnia się dwa rodzaje odmiennego traktowania tego problemu. W pierwszym rozważa się stan graniczny ośrodka porowatego, przez który odbywa się przepływ wód podziemnych, w drugim definiuje się kryteria upłynnienia ośrodka porowatego i utratę stateczności filtracyjnej. Ta grupę modeli będziemy określać mianem **modeli stanu granicznego ośrodka porowatego**. Do grupy tej zaliczamy również modele określające zniszczenie materiału skalnego na skutek działania ciśnienia przepływającego przez materiał skalny płynu.

Rozważane modele obarczone są często wieloma założeniami upraszczającymi. Rozważany proces jest traktowany często jako izotermiczny; pomijamy wpływy takich zjawisk, jak sorpcja lub desorpcja płynu przez fazę stałą ośrodka czy też wpływ działania pola elektrycznego i magnetycznego.

Wszystkie stosowane modele stosują podstawowe pojęcia z zakresu mechaniki ośrodków odkształcalnych. Dlatego dla jasności wyводу konieczne jest przypomnienie znanych pojęć i oznaczeń z mechaniki ośrodków ciągłych, a w szczególności dotyczących stanu naprężenia, przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia, odkształcenia i prędkości odkształcenia. Zakładamy jednakże, że czytelnik zna wiele pojęć elementarnych z mechaniki ciała stałego i płynów jak siła, pęd ciała, popęd, energia, praca, choć znaczenie tych pojęć w fizyce jest do dzisiaj tematem rozpraw naukowych, choćby w zakresie zrozumienia, czym tak naprawdę jest masa ciała, która wydaje się czymś najbardziej dotykalnym i postrzegalnym w otaczającym nas świecie (patrz [Feynman, 1974]).

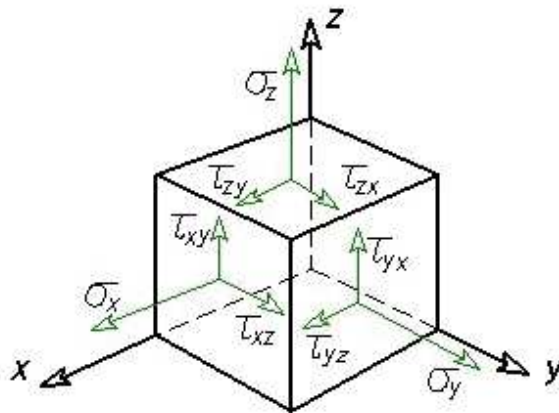
4.2. Stan naprężenia.

Stan naprężenia w dowolnym punkcie rozpatrywanej objętości ośrodka może być określony przez dziewięć składowych stanu naprężenia, co według zapisu wskaźnikowego można wyrazić w postaci tensora stanu naprężenia:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

przy czym przyjmujemy znaną w mechanice umowę, że σ_{ii} jest dodatnie, jeżeli mamy do czynienia z rozciąganiem, ujemne ze ściskaniem rys.4.1.

GEOTECHNIKA KIERUNEK GEODEZJA I KARTOGRAFIA



Rys. 4.1. Składowe stanu naprężenia na ścianach elementarnego graniastostupa.

W szczególnych przypadkach będziemy stosować zapis klasyczny dla tensora naprężenia, którym naprężenia normalne będziemy wyrażać przy pomocy oznaczenia σ , a naprężenia styczne przy pomocy oznaczenia τ , według zasady:

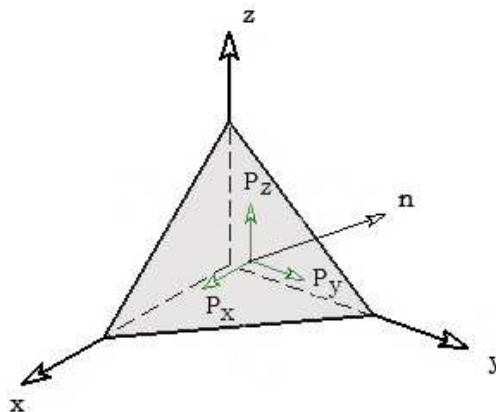
$$\sigma_{11} = \sigma_x, \sigma_{22} = \sigma_y, \sigma_{33} = \sigma_z$$

i

$$\sigma_{12} = \tau_{xy}, \sigma_{13} = \tau_{xz}, \sigma_{21} = \tau_{yx}, \sigma_{23} = \tau_{yz}, \sigma_{31} = \tau_{zx}, \sigma_{32} = \tau_{zy}.$$

(4.2)

W każdym punkcie ośrodka możemy znaleźć trzy płaszczyzny ośrodka, na których działają tylko naprężenia normalne do tych płaszczyzn, ponieważ naprężenia styczne przyjmują na nich wartości zerowe. Płaszczyzny te nazywamy płaszczyznami głównymi, a działające na nich naprężenia oznaczane $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ naprężeniami głównymi. W celu znalezienia naprężeń głównych rozpatrzmy równowagę elementarnego czworościanu pokazanego na rys.4.2, którego trzy ściany tworzą płaszczyzny zawierające osie współrzędnych, a czwarta płaszczyzna A nachylona jest do układu współrzędnych, a jej nachylenie określa kierunek wektor n do niej prostopadłego.



Rys. 4.2. Naprężenia na ścianie A elementarnego czworościanu.

GEOTECHNIKA KIERUNEK GEODEZJA I KARTOGRAFIA

Oznaczmy przez a_i cosinusy kierunkowe normalnej do powierzchni A. Jeżeli przez p oznaczymy wypadkowe naprężenie działające na ścianę A, można rozłożyć go na trzy składowe p_j z warunków równowagi czworościanu:

$$p_j = \sigma_{ij} a_i. \quad (4.3)$$

Naprężenie p można rozłożyć na składową normalną p_n i styczną do powierzchni A p_t :

$$p_n = p_j a_j \quad (4.4)$$

i

$$p_t^2 = p^2 - p_n^2. \quad (4.5)$$

Na płaszczyźnie, na której działa naprężenie główne σ , wypadkowe naprężenie p musi być skierowane wzdłuż normalnej \vec{n} do tej powierzchni, ponieważ wówczas naprężenie styczne równa się zeru. Daje to związki na składowe naprężenia p :

$$p_j = a_j \sigma, \quad (4.6)$$

po podstawieniu tych związków do równań (4.3) utrzymujemy układ trzech równań liniowych, gdzie niewiadomymi są kosinusy kierunkowe a_j :

$$\sigma_{ij} a_i - \sigma a_j = 0. \quad (4.7)$$

Układ ten będzie miał niezerowe rozwiązanie, gdy wyznacznik utworzony ze współczynników przy niewiadomych cosinusach kierunkowych kątów nachylenia do osi, wiersza \vec{n} równa się zeru:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (4.8)$$

Wyznacznik ten sprowadza się do równania trzeciego stopnia względem poszukiwanego naprężenia głównego:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma + I_3 = 0, \quad (4.9)$$

gdzie współczynniki I_1, I_2, I_3 są **niezmiennikami tensora naprężenia**, gdyż nie zależą od obrotu układu odniesienia i równają się:

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}, \quad (4.10)$$

$$I_2 = \sigma_{11} \sigma_{22} + \sigma_{22} \sigma_{33} + \sigma_{33} \sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2, \quad (4.11)$$

GEOTECHNIKA KIERUNEK GEODEZJA I KARTOGRAFIA

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}. \quad (4.12)$$

Jeżeli przyjmiemy, że osie współrzędnych pokrywają się z kierunkami głównymi w rozpatrywanym punkcie to niezmienniki można wyrazić za pomocą naprężeń głównych $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad (4.13)$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1, \quad (4.14)$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \quad (4.15)$$

Wielkość równą $I_1/3$ nazywać będziemy **naprężeniem średnim** σ_m , więc:

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}\sigma_{kk}. \quad (4.16)$$

4.3. Tensor kulisty i dewiator stanu naprężenia.

W niektórych zagadnieniach istotne jest rozłożenie tensora naprężenia σ_{ij} na dwa tensory: **tensor kulisty stanu naprężenia** określający stan wszechstronnego ściskania lub rozciągania naprężeniem σ_m :

$$\begin{vmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{vmatrix} \quad (4.17)$$

oraz **dewiator stanu naprężenia**:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma_m & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_m & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_m \end{vmatrix}, \quad (4.18)$$

albo inaczej wyrażony przy pomocy składowych dewiatora s_{ij} :

$$s_{ij} = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{vmatrix}. \quad (4.19)$$

W zapisie wskaźnikowym dewiator stanu naprężenia s_{ij} wyraża się poprzez tensor naprężenia σ_{ij} :

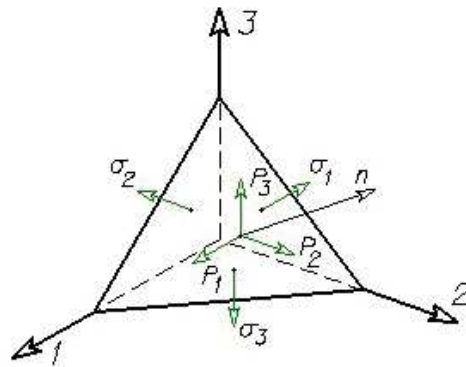
GEOTECHNIKA KIERUNEK GEODEZJA I KARTOGRAFIA

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij}. \quad (4.20)$$

Kierunki główne dewiatora pokrywają się z kierunkami głównymi tensora naprężenia. Dewiator jest tensorem, a jego niezmienniki zapisane w naprężeniach głównych wyrażają się wzorami:

$$\begin{aligned} I_1' &= 0, \\ I_2' &= \frac{1}{6} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right], \\ I_3' &= (\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_2 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Rozpatrzmy czworościan, którego trzy ściany tworzą płaszczyzny główne z działającymi na nich naprężeniami $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, a czwartą stanowi dowolnie nachylona płaszczyzna o normalnej \vec{n} co przedstawia rys 4.3.



Rys. 4.3. Naprężenia na dowolnie pochylonej ścianie względem kierunków głównych 1,2,3.

Jej orientację w przestrzeni określają cosinusy kierunkowe normalnej do tej powierzchni. Oznaczając przez p_1, p_2, p_3 składowe naprężenia wypadkowe działające na tę powierzchnię, dostajemy:

$$p_1 = a_1 \sigma_1, \quad p_2 = a_2 \sigma_2, \quad p_3 = a_3 \sigma_3. \quad (4.22)$$

Rzutuując te składowe na kierunek normalny do płaszczyzny n , dostaniemy wielkość naprężenia prostopadłego do tej powierzchni p_n :

$$p_n = \sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 a_3^2. \quad (4.23)$$

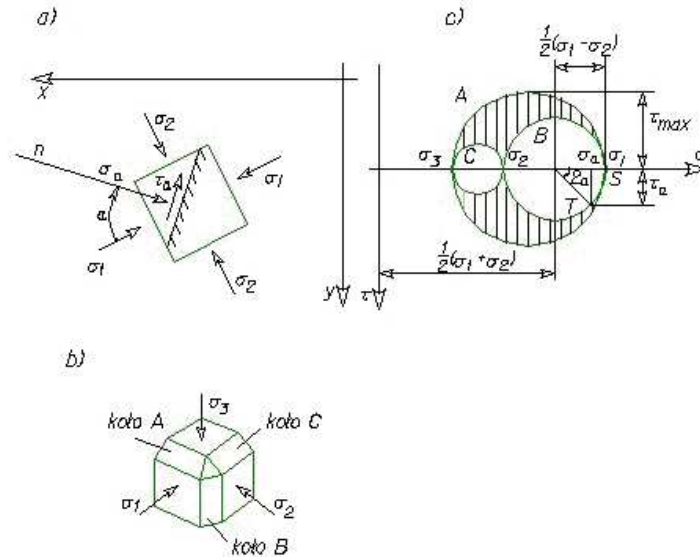
Składową styczną do powierzchni obliczamy wzorem:

$$p_t^2 = p^2 - p_n^2. \quad (4.24)$$

Stan naprężenia na dowolnie nachylonych względem osi głównych w płaszczyznach może być znaleziony za pomocą **wykreślnego odwzorowania Mohra** - rys. 4.4. Wykorzystując konstrukcje koła Mohra, można bez trudu znaleźć naprężenia na płaszczyznach równoległych do jednego z kierunków głównych, a dowolnie zorientowanych względem dwóch pozostałych. Rozpatrzmy dla przykładu stan naprężenia na płaszczyźnie równoległej do osi 3 i nachylonej pod kątem α do osi głównej 1.

GEOTECHNIKA

KIERUNEK GEODEZJA I KARTOGRAFIA



Rys. 4.4. Sposób określania naprężeń normalnych i stycznych na wybranej powierzchni przy wykorzystaniu konstrukcji koła Mohra.

Na podstawie wzoru (4.23) dostaniemy:

$$p_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \quad (4.25)$$

oraz

$$p_t = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha . \quad (4.26)$$

W przypadku, gdy pory ośrodka gruntowego wypełnia ciecz, tensor naprężenia zawiera zarówno efekty działania szkieletu jak i cieczy. Możemy, więc zapisać wzór na naprężenia w postaci:

$$p_i = p_i^s + p_i^l \quad (4.27)$$

przy czym p_i^s jest składową wektora naprężenia przenoszoną przez szkielet, a p_i^l składową przenoszoną przez ciecz lub gaz. W przypadku, gdy zakładamy, że ciecz jest cieczą idealną, kierunki działania pokrywają się z kierunkiem normalnym do powierzchni n. Przyjmując powyższe złożenia możemy zapisać:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^s + \sigma^l \delta_{ij} \quad (4.28)$$

Składowe tensora naprężenia σ_{ij}^s są współrzędnymi stanu naprężenia przenoszonymi przez szkielet, ale odniesionymi do jednostki powierzchni całkowitej. Dlatego określa się je mianem naprężenia rozmytego, o czym szczegółowo będzie mowa w rozdziale VI.3. Naprężenia te nazywane

są również w teorii stanów granicznych naprężeniami efektywnymi i oznaczane są w literaturze (patrz[Kisiel i inni, 1982]) oznaczeniem σ_{ij}^{ef} .

Składowe $\sigma^l \delta_{ij}$ są współrzędnymi stanu naprężenia przenoszonymi przez ciecz i są normalne do każdej powierzchni. Naprężenie σ^l jest obliczane również na jednostkę powierzchni całkowitej. Jest, więc również naprężeniem rozmytym. Ponieważ, ciecz zajmuje tylko część powierzchni przekroju, naprężenie σ^l jest mniejsze od ciśnienia w cieczy p i wiąże się z nim wzorem:

$$\sigma^l = -pf, \quad (4.29)$$

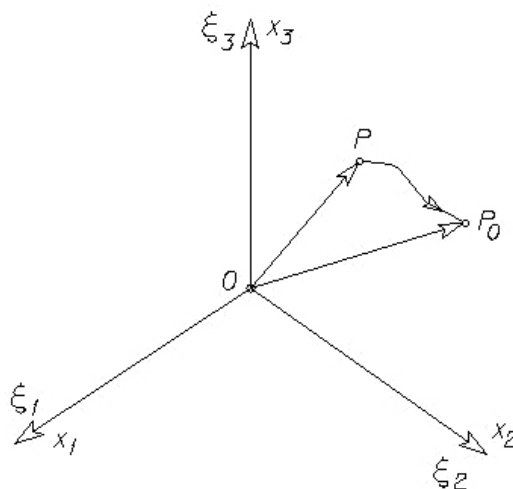
gdzie f oznacza porowatość (choć faktycznie powinna być przez nas wprowadzona tutaj porowatość powierzchniowa). Uproszczenie powyższe wprowadza się ze względu na istotną trudność wyznaczania porowatości powierzchniowej ośrodka porowatego oraz z faktu, że średnia wartość porowatości powierzchniowej powierzchni ograniczającej objętość Ω jest równa porowatości objętościowej. Znak minus został przyjęty dlatego, żeby uzyskać zgodność znaków ze znakami naprężenia w szkielecie. Naprężenie σ^l nazywane jest w mechanice gruntów i skał ciśnieniem porowym lub mianem naprężenia neutralnego.

4.4. Przemieszczenia, stan odkształcenia i prędkości odkształcenia.

W mechanice posługujemy się często uproszczonym modelem ciała nazywanego continuum materialnego. W strukturze takiej pomijamy budowę cząsteczkową ciała, z jaką mamy do czynienia w każdym znanym nam materiale opisywanym przy pomocy modelu dyskretnego. Z uproszczeniem tym spotykamy się w mechanice ośrodków ciągłych, choć wprowadzone definicje przemieszczenia, odkształcenia i prędkości można w pewnym zakresie przyjąć w modelach mechaniki gruntów, gdzie zdecydowanie nie mamy do czynienia z ośrodkiem ciągłym.

Będziemy zajmować się odkształcalnym ośrodkiem ciągłym określanym pojęciem ciała odkształcalnego. Konfiguracją continuum materialnego nazywamy regularne i wzajemne jednoznaczne odwzorowanie cząstek materialnych w punkty P pewnego obszaru C trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej wg [Derski, 1975]. Punkt P przestrzeni euklidesowej jest miejscem, w którym znajduje się cząstka w chwili czasu t .

Wprowadźmy pojęcie konfiguracji początkowej rozpatrywanego continuum materialnego. Otóż przez taką konfigurację uważamy położenie punktów P_0 obszaru C_0 trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej w chwili $t=t_0$. Do opisu ruchu względem konfiguracji początkowej wprowadzamy współrzędne kartezjańskie względem ustalonego układu współrzędnych (rys.4.5)



Rys. 4.5. Ruch punktu continuum materialnego względem konfiguracji początkowej.

GEOTECHNIKA KIERUNEK GEODEZJA I KARTOGRAFIA

Oznaczmy współrzędne kartezjańskie punktów $P_0 \in C_0$ konfiguracji początkowej (x_1, x_2, x_3) . Współrzędne kartezjańskie punktów $P \in C$ w dowolnej chwili t oznaczmy natomiast przez (ξ_1, ξ_2, ξ_3) . Opis ruchu względem konfiguracji początkowej można wówczas zapisać w sposób następujący:

$$\xi_i = f(x_1, x_2, x_3, t), \quad x_i = f_i^{-1}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) \quad (4.30)$$

Wzajemne związki odwrotne pomiędzy współrzędnymi wymagają odpowiedniej regularności funkcji. Funkcje te muszą być funkcjami ciągłymi wraz z pierwszymi pochodnymi, tzn. muszą być klasy C^1 , a powyższe przekształcenia są nieosobliwe. Aby postulat ten był spełniony, Jakobian przekształcenia powinien być różny od zera, więc:

$$D = \left| \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right| \neq 0 \quad (4.31)$$

Wprowadzając wektor wodzący \vec{r} punktu P (rys. 4.5) można zapisać:

$$\vec{r} = \xi_i e_i, \quad \xi_i = f_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad x_j = f_j(x_1, x_2, x_3, t_0), \quad (4.32)$$

gdzie e_i są wersorami kartezjańskiego układu współrzędnych na rys 4.5

Rozpatrzmy kontinuum materialne w chwili $t=0$ zajmujące obszar Ω . Położenie poszczególnych punktów tego kontinuum określa wektor wodzący $\vec{r} = \vec{r}(x_i)$ w kartezjańskim układzie współrzędnych x_i . Wskutek działań zewnętrznych (np. przyłożone do ciała obciążenie, parcie cieczy, przyłożony gradient temperatury) nastąpi odkształcenie ciała i nasze kontinuum w chwili czasu t zajmie nowe położenie Ω' . Punkt P obszaru Ω na skutek ruchu przemieści się do punktu P' obszaru Ω' . Położenie punktu P' w tym samym układzie współrzędnych opisuje wektor wodzący $\vec{r}' = \vec{r}'(\xi_i)$.

Wektor przemieszczenia $\vec{u} = \vec{u}(u_i)$ który można zapisać:

$$\vec{u} = \vec{r}' - \vec{r} = PP' \quad (4.33)$$

Korzystając ze współrzędnych wektora przemieszczenia związek wektorowy przyjmuje postać skalarną:

$$u_i = \xi_i - x_i \quad (4.34)$$

Z powyższych związków (4.32) i (4.33) dostajemy:

$$\xi_i = x_i + u_i(x_j, t) \quad (4.35)$$

Powyższy zapis wprowadził **Lagrange** wg. [Derski, 1975]. W opisie tym posługujemy się współrzędnymi x_i jako zmiennymi niezależnymi. Obok opisu Lagrange'a istnieje druga możliwość, kiedy jako zmienne niezależne traktuje się współrzędne ξ_i . Jest to opis **Eulera** wyrażający się związkami:

GEOTECHNIKA KIERUNEK GEODEZJA I KARTOGRAFIA

$$x_i = \xi_i - u_i(x_j, t). \quad (4.36)$$

W wyniku przyjęcia jednego z wyżej wymienionych opisów uzyskujemy różne równania opisujących ruch, ponieważ inaczej będziemy określać pochodną funkcji F po czasie. W przypadku, gdy mamy do czynienia z opisem Lagrange'a funkcja $F = F(x_i, t)$. Współrzędne x_i są wielkościami stałymi względem położenia początkowego, więc pochodna po czasie funkcji F wynosi:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (4.37)$$

Inaczej ma się sprawa w przypadku opisu Eulera. Wówczas funkcja $F = F(\xi_j, t)$. Ponieważ zgodnie ze wzorami (4.34) ξ_i zależy od współrzędnych x_i i czasu t, więc pochodna po czasie t funkcji F jest pochodną materialną równą:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial t}. \quad (4.38)$$

Pochodną cząstkową $\partial F / \partial t$ nazywamy pochodną lokalną, natomiast drugi człon pochodnej materialnej $(\partial F / \partial \xi_i) * (\partial \xi_i / \partial t)$ nazywać będziemy pochodną konwekcyjną funkcji F. Wprowadzając oznaczenia:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t} = \dot{\xi}_i = v_i, \quad \frac{\partial F}{\partial \xi_i} = F_{,i}, \quad (4.39)$$

pochodną materialną funkcji F można zapisać w postaci:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + v_i F_{,i}. \quad (4.40)$$

Gdy współrzędne punktu ośrodka w chwili t wyrażone są przy pomocy jego położenia w chwili początkowej (opis Lagrange'a) tzn. $\xi_i = \xi_i(x_j, t)$ to jego prędkość wyraża się wzorem:

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad (4.41)$$

a przyspieszenie

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t}. \quad (4.42)$$

W przypadku opisu Eulera wykorzystując związek (4.40) prędkość punktu wyraża się wzorem:

$$v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_j u_{i,j} \quad (4.43)$$

i przyspieszenie:

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j v_{i,j}. \quad (4.44)$$

4.4.1 Tensor odkształcenia.

W przypadku gdy mamy do czynienia z ośrodkiem odkształcalnym, wzajemne odległości pomiędzy punktami ulegają zmianie w czasie i przestrzeni. Rozważmy dwa punkty znajdujące się w nieskończenie małej odległości względem siebie. W chwili początkowej t_0 punkty te miały współrzędne x_i i $x_i + dx_i$. Po upływie czasu t współrzędne tych punktów będą wynosić odpowiednio: ξ_i i $\xi_i + d\xi_i$. Obliczmy kwadrat odległości pomiędzy tymi punktami w chwili początkowej t_0 :

$$ds_0^2 = dx_i dx_i \quad . \quad (4.45)$$

Kwadrat odległości punktów po upływie czasu t wynosi natomiast:

$$ds^2 = d\xi_i d\xi_i \quad . \quad (4.46)$$

Gdy ciało jest nieodkształcalne $ds = ds_0$. W przeciwnym przypadku odległości pomiędzy punktami, a więc i ich kwadraty są różne i $ds^2 \neq ds_0^2$. Wzajemną relację pomiędzy współrzędnymi w chwili t i t_0 określa zgodnie ze wzorem (4.34) relacja:

$$u_i = \xi_i - x_i \quad . \quad (4.47)$$

Wyznaczmy różnicę kwadratów ds^2 i ds_0^2 :

$$ds^2 - ds_0^2 = \left[\frac{\partial \xi_p}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_p}{\partial x_j} - \delta_{ij} \right] dx_i dx_j \quad . \quad (4.48)$$

Podstawiając związek (4.47), do powyższej zależności dostajemy:

$$ds^2 - ds_0^2 = \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (x_p + u_p) \frac{\partial}{\partial x_j} (x_p + u_p) - \delta_{ij} \right] dx_i dx_j \quad , \quad (4.49)$$

gdzie δ_{ij} oznacza deltę Kroneckera.

Po przekształceniach uzyskujemy:

$$ds^2 - ds_0^2 = \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \frac{\partial u_p}{\partial x_j} \right] dx_i dx_j \quad . \quad (4.50)$$

Green i Saint –Venant wprowadzili pojęcie **tensora odkształcenia** ε_{ij} stosując zapis:

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\varepsilon_{ij} dx_i dx_j \quad , \quad (4.51)$$

gdzie tensor ε_{ij} nosi często w literaturze nazwę **tensora odkształcenia Greena** i wyraża się zgodnie z zależnością (4.50) wzorem:

GEOTECHNIKA KIERUNEK GEODEZJA I KARTOGRAFIA

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \frac{\partial u_p}{\partial x_j} \right). \quad (4.52)$$

Tensor odkształcenia Greena ε_{ij} w przypadku, gdy przemieszczenia i ich przyrosty przemieszczeń są bardzo małe można uprościć do postaci liniowej:

$$\varepsilon_{ij} \cong \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.53)$$

gdź iloczyny pochodnych przemieszczenia są znacznie mniejszego rzędu niż ich wartości.

Ponieważ tensor ε_{ij} został określony w układzie odniesienia **Lagrange'a**, więc jego pochodna po czasie jest równa pochodnej cząstkowej:

$$\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} \quad (4.54)$$

W układzie odniesienia Eulera tensor odkształcenia został wprowadzony przez **Almansięgo**, zdefiniowany w sposób następujący:

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\eta_{ij} dx_i dx_j, \quad (4.55)$$

przy czym, **tensor odkształcenia Almansięgo** wyraża się wzorem:

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} - \frac{\partial u_p}{\partial \xi_i} \frac{\partial u_p}{\partial \xi_j} \right). \quad (4.56)$$

Dla małych pochodnych przemieszczenia tensor odkształcenia został przez **Cauchy'ego** przedstawiony w postaci:

$$\eta_{ij} \cong \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} \right). \quad (4.57)$$

Liniowa postać tensora odkształcenia η_{ij} nosi nazwę **tensora odkształcenia Cauchy'ego**. Pochodna po czasie tensora odkształcenia w układzie odniesienia Eulera jest pochodną masową i wyraża się wzorem:

$$\frac{d\eta_{ij}}{dt} = \frac{\partial \eta_{ij}}{\partial t} + \eta_{ij,k} v_k. \quad (4.58)$$

Często kiedy idzie się jeszcze dalej z uproszczeniami, dla bardzo małych przemieszczeń zapisuje się związek:

$$\varepsilon_{ij} \cong \eta_{ij} \quad (4.59)$$

i w przypadku pochodnej po czasie tensora Cauchy'ego pomija się człon konwekcyjny i zapisuje się:

GEOTECHNIKA KIERUNEK GEODEZJA I KARTOGRAFIA

$$\frac{d\eta_{ij}}{dt} \cong \frac{\partial \eta_{ij}}{\partial t}. \quad (4.60)$$

W klasycznej teorii sprężystości ciała stałego stosuje się praktycznie tylko opis Lagrange'a w teorii małych odkształceń.

4.4.2. Tensor obrotów.

Obok tensora odkształcenia istotnym jest tensor obrotów zdefiniowany dla małych przemieszczeń wzorem:

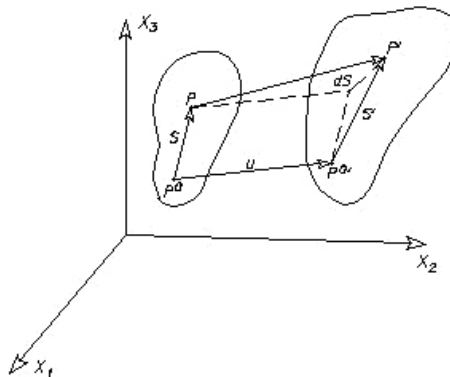
$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}). \quad (4.61)$$

Widzimy więc, że tensor obrotów i tensor odkształcenia stanowią dekompozycję tensora $u_{i,j}$ na część skośnie symetryczną i część symetryczną:

$$u_{i,j} = (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}). \quad (4.62)$$

Aby wyjaśnić sens geometryczny tych wielkości wybierzmy w rozważanym ośrodku dwa bardzo blisko położone punkty P i P^0 . Połączmy te dwa punkty wektorem \vec{S} , którego początkiem jest punkt P^0 , a końcem punkt P (rys. 4.6). Po odkształceniu ciała punkt P przechodzi w położenie P_1 , a punkt P^0 w położenie P_1^0 . Łącząc odpowiednio punkty P_1 i P_1^0 dostajemy wektor \vec{S}_1 , którego początkiem jest punkt P_1^0 . Z rys.4.6 widać, że wystąpił po odkształceniu przyrost wektora \vec{S} równy $d\vec{S}$. Współrzędne przyrostu wektora $d\vec{S}$ można wyrazić wzorem:

$$dS_i = u_i(x_j^0 + S_j) - u_i(x_j^0). \quad (4.63)$$



Rys. 4.6. Schemat obrazujący odkształcenie ciała.

Dokonując rozwinięcia współrzędnych przyrostu wektora w szereg Taylora w otoczeniu punktu P^0 i przy założeniu, że otoczenie to jest wystarczająco małe, co umożliwia pominięcie wyższych potęg rozwinięcia Taylora, możemy z dokładnością do pierwszych pochodnych współrzędnych przemieszczenia \vec{u} napisać:

GEOTECHNIKA KIERUNEK GEODEZJA I KARTOGRAFIA

$$dS_i \cong u_{i,j} S_j . \quad (4.64)$$

Uwzględniając wzór (4.63) możemy powyższy związek zapisać w formie:

$$dS_i = (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) S_j . \quad (4.65)$$

Określmy wydłużenie (lub skrócenie) odcinka PP^0 liczone na jednostkę na jednostkę jego długości:

$$\varepsilon = \frac{|d\vec{S}|}{|\vec{S}|} . \quad (4.66)$$

Obliczmy iloczyn skalarny wektorów \vec{S} i $d\vec{S}$:

$$\vec{S} \cdot d\vec{S} = |\vec{S}| |d\vec{S}| \cos \alpha = S_i dS_i . \quad (4.67)$$

ograniczając nasze rozważania do małych odkształceń ciał można przyjąć, że kąt α jest bardzo mały i $\cos \alpha \cong 1$. Korzystając z równania (4.65) i (4.67) można zapisać:

$$\vec{S} \cdot d\vec{S} = |\vec{S}| |d\vec{S}| = (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) S_i S_j . \quad (4.68)$$

Można jednakże wykazać że: $\omega_{ij} S_i S_j \cong 0$, a więc:

$$\varepsilon = \frac{|d\vec{S}|}{|\vec{S}|} = \varepsilon_{ij} \frac{S_i S_j}{|\vec{S}|^2} . \quad (4.69)$$

Wprowadzając cosinusy kątów, jakie tworzy wektor \vec{S} z osiami współrzędnych x_i :

$$n_i = \frac{S_i}{|\vec{S}|} , \quad (4.70)$$

wydłużenie względne można zapisać w postaci:

$$\varepsilon = \varepsilon_{ij} n_i n_j . \quad (4.71)$$

z czego wynika, że wydłużenie lub skrócenie względne w dowolnym kierunku jest w każdym punkcie ośrodka określone przez 6 składowych tensora stanu odkształcenia.

4.4.2. Tensor obrotów.

Korzystając z własności symetrycznego tensora odkształcenia, można przewidzieć, że w każdym punkcie obszaru posiada on wartości główne i towarzyszące im kierunki główne odkształcenia. Rozpatrzmy dwa punkty ośrodka położone względem siebie bardzo blisko, ale wybrane w taki sposób, że łączący je wektor \vec{S} nie zmienił w trakcie odkształcenia ciała swojego kierunku. Wówczas wektor \vec{S}

GEOTECHNIKA KIERUNEK GEODEZJA I KARTOGRAFIA

i jego przyrost $d\vec{S}$ będą posiadały ten sam kierunek, a ich współrzędne będą wzajemnie proporcjonalne, co można wyrazić wzorem na współrzędne wektorów \vec{S} i $d\vec{S}$:

$$dS_i = \varepsilon S_i. \quad (4.72)$$

Jak wiadomo, ε jest miarą wydłużenia każdej współrzędnej wektora \vec{S} , a wobec tego jest miarą również wydłużenia (lub skrócenia) całego wektora \vec{S} , co możemy zapisać związkiem:

$$\varepsilon = \left| \frac{d\vec{S}}{\vec{S}} \right|. \quad (4.73)$$

Taki związek może występować tylko w przypadku, gdy wektor \vec{S} nie doznaje obrotu w trakcie odkształcenia, więc $\omega_{ij} S_j = 0$. Na podstawie tych stwierdzeń możemy zapisać:

$$dS_i = \varepsilon S_i = \varepsilon_{ij} S_j. \quad (4.74)$$

Powyższy związek prowadzi do równania:

$$(\varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}) A_j = 0. \quad (4.75)$$

Jeżeli podzielimy obie strony równania (4.75) przez długość wektora \vec{S} , to w miejsce współrzędnych wektora możemy wprowadzić wersor \vec{n} o współrzędnych n_i :

$$(\varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}) n_j = 0. \quad (4.76)$$

Powyższy układ równań wraz ze związkiem:

$$n_i n_i = 1 \quad (4.77)$$

określa jednoznacznie wersor \vec{n} i odpowiadające jego kierunkowi odkształcenie ε .

Układ równań (4.76) jest układem trzech równań algebraicznych jednorodnych pierwszego stopnia. Układ ten ma rozwiązania niezerowe wtedy i tylko wtedy, gdy jego wyznacznik charakterystyczny równa się zero:

$$\| \varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij} \| = 0. \quad (4.78)$$

Obliczając wyznacznik (4.78), uzyskujemy równanie trzeciego stopnia względem ε :

$$\varepsilon^3 - J_1(\varepsilon_{ij})\varepsilon^2 + J_2(\varepsilon_{ij})\varepsilon - J_3(\varepsilon_{ij}) = 0 \quad (4.79)$$

gdzie J_1, J_2, J_3 są parametrami równania (4.79) i nie zależą od układu odniesienia. Są, więc **niezmiennikami stanu odkształcenia** wyrażonymi związkami:

GEOTECHNIKA KIERUNEK GEODEZJA I KARTOGRAFIA

$$J_1 = \varepsilon_{ii}, \quad J_2 = \frac{\partial |\varepsilon_{ij}|}{\partial \varepsilon_{kk}}, \quad J_3 = \|\varepsilon_{ij}\|. \quad (4.80)$$

Równanie (4.79) posiada zawsze trzy pierwiastki rzeczywiste nazywane wartościami głównymi tensora odkształcenia ε_{ij} . Zazwyczaj porządkujemy je według malejących wartości:

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3.$$

Aby określić kierunki odkształceń głównych wystarczy rozwiązać układ równań (4.76). Kierunki te uzyskamy za pomocą wektora \vec{n} . Można wykazać, że są one wzajemnie prostopadłe. Jeżeli w badanym punkcie przyjmimy układ odniesienia, którego współrzędne pokrywają się z kierunkami głównymi stanu odkształcenia, to stan odkształcenia w tym punkcie opisują trzy odkształcenia główne $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Niezmienniki stanu odkształcenia wyrażą się wówczas tylko przy pomocy odkształceń głównych i mają postać:

$$\begin{aligned} J_1 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ J_2 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1, \\ J_3 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Tensor odkształcenia podobnie jak tensor naprężenia można rozłożyć na dwie części; część kulistą stanu odkształcenia i dewiatorową. **Tensor kulisty stanu odkształcenia** wyraża się wzorem:

$$\varepsilon_{ij}^k = \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} = \varepsilon_{sr} \delta_{ij} = \frac{1}{3} J_1 \delta_{ij}. \quad (4.82)$$

Tensor kulisty odpowiada równomiernemu rozszerzeniu lub ściśnięciu ośrodka w otoczeniu określonego punktu ośrodka. Pozostała część tensora stanu odkształcenia określana jest różnicą:

$$\varepsilon_{ij}^d = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^k, \quad (4.83)$$

co prowadzi do następującej definicji **dewiatora stanu odkształcenia**:

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij}^d = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{sr} \delta_{ij}. \quad (4.84)$$

Zachodzi pytanie, czy składowe stanu odkształcenia mogą być funkcjami przyjmowanymi całkowicie dowolnie.

Wystarczy wyobrazić sobie podział obszaru w stanie naturalnym (przed odkształceniem) na prostopadłościany wzajemnie do siebie przylegające. Gdyby nie było dodatkowych warunków i każdy z tych prostopadłościanów uległby odkształceniu według przyjętych funkcji składowych odkształcenia to ponowne złożenie odkształconych elementów mogłoby okazać się niemożliwe. Wynika z tego wniosek, że odkształcenia muszą spełniać określone warunki, które noszą nazwę warunków ciągłości odkształceń. Jeżeli ośrodek zajmuje obszar jednospójny i chcemy wyznaczyć składowe stanu przemieszczenia u_i , gdy dane są składowe stanu odkształcenia ε_{ij} , to zadanie to jest rozwiązywalne jednoznacznie wtedy i tylko wtedy, gdy składowe stanu odkształcenia spełniają związki:

$$e_{ijk} e_{lmn} \varepsilon_{jm, nk} = 0. \quad (4.85)$$

GEOTECHNIKA KIERUNEK GEODEZJA I KARTOGRAFIA

które nazywamy **warunkami nierozdzielności odkształceń**. Przez e_{ijk} oznaczamy symbol Leviego-Civity. W formie przedstawionej równaniami (4.85) wyprowadził je **Somigliana**. Wcześniej uzyskał je Saint-Venant w 1860 r.. Warunki nierozdzielności można przedstawić w postaci rozwiniętej:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} &= 2\varepsilon_{12,12}, \\ \varepsilon_{22,33} + \varepsilon_{33,22} &= 2\varepsilon_{23,23}, \\ \varepsilon_{33,11} + \varepsilon_{11,33} &= 2\varepsilon_{13,13}, \\ (\varepsilon_{12,3} + \varepsilon_{31,2} - \varepsilon_{23,1})_{,1} &= \varepsilon_{11,23}, \\ (\varepsilon_{23,1} + \varepsilon_{12,3} - \varepsilon_{31,2})_{,1} &= \varepsilon_{22,31}, \\ (\varepsilon_{31,2} + \varepsilon_{23,1} - \varepsilon_{12,3})_{,1} &= \varepsilon_{33,12}.\end{aligned}\tag{4.86}$$

Powyższe równania i związki będą przez nas często wykorzystywane do tworzenia modeli ośrodka porowatego traktowanego jako ośrodek jednorodny.