

11. Stan graniczny w mechanice gruntów

Tomasz Strzelecki

11.1 Modele matematyczne stanu granicznego.

Modele matematyczne opisujące stany równowagi granicznej gruntów i skał zostały szczegółowo omówione w wielu publikacjach, że wymienię pracę pod redakcją Kisiela [Kisiel i inni, 1982], [Szczepańskiego, 1974], [Sawczuka, Izbickiego, 1984], [Sawickiego A., 1994], [Coussy'ego, 1995], [Łydźby, 2002], [Lysika, 1968, 1969], [Dembickiego, 1964a, 1964b, 1964c, 1965, 1966, 1971, 1981a, 1981b], [Gryczmańskiego, 1983, 1995]. W niniejszej monografii ograniczymy się do najczęściej stosowanych w praktyce inżynierskiej, uwzględniających wpływ płynu (cieczy lub gazu) wypełniającego pory ośrodka gruntowego i jego filtracji przez strukturę utworzoną przez ziarna lub spękane skały na wystąpienie stanu granicznego. W modelach tych nie uzyskujemy oceny wartości odkształceń ośrodka w stanie granicznym. Pojęcie stanu granicznego odnosić będziemy najczęściej do wyidealizowanego materiału, dla którego pomijane są efekty lepkości rzeczywistego materiału tworzącego grunt lub skałę. Zakładamy, że modelowany przez nas ośrodek może więc płynąć plastycznie w sposób nieograniczony.

W większości zagadnień związanych z powstaniem w gruncie lub skale granicznego stanu równowagi uwzględnienie rzeczywistej zależności naprężenie - odkształcenie przed wystąpieniem stanu granicznego jest pod względem matematycznym skomplikowane.

Z tego względu wprowadzono często zastępczy model wytrzymałościowy gruntu, lub skały określany jako model ciała sztywno-plastycznego. W modelu tym całkowicie pomija się odkształcenia lepko-sprężyste ośrodka. Przy wprowadzeniu takiego modelu grunt w przypadku ścinania przy naprężeniach mniejszych od pewnej granicznej wartości τ_{gr} zachowuje się jak ciało sztywne, nie wykazując żadnych odkształceń. Po osiągnięciu wartości granicznej τ_{gr} następuje ciągły wzrost odkształcenia przy stałym naprężeniu. Z chwilą zdjęcia obciążenia, całkowite odkształcenie, jakiego doznał grunt od chwili odciążenia pozostaje w nim jako odkształcenie trwałe.

W reologii gruntów istnieje szereg modeli uwzględniających odkształcenia lepko-sprężyste ośrodka gruntowego lub skały oraz efekty wzmocnienia lub osłabienia. Możemy wyliczyć kilka z nich:

- a) model materiału sprężysto – plastycznego,
- b) modele lepko-sprężysto-plastyczne,
- c) modele ciała nieliniowo sprężystego (dla procesów, w których nie występuje odciążenie),
- d) modele ciała sprężysto- plastycznego ze wzmocnieniem lub osłabieniem,
- e) modele ciała sprężysto – lepko plastycznego,
- f) modele ciała lepko sprężystego lepko plastycznego.

11.2 Model Coulomba – Mohra.

Dla określenia granicznego oporu stosowany był w początkowym okresie mechaniki gruntów warunek wytrzymałościowy [Coulomb'a, 1773] wyrażone wg [Kisiela i innych, 1969, 1982] i [Szczepańskiego, 1974] liniową zależnością w postaci:

$$|\tau_{gr}| = -\sigma_n \operatorname{tg} \phi + c, \quad (11.1)$$

gdzie:

τ_{gr} - graniczny opór ścinania,

σ_n - naprężenie normalne panujące w płaszczyźnie ścięcia (ujemne przy ściskaniu),

ϕ - kąt tarcia wewnętrznego,

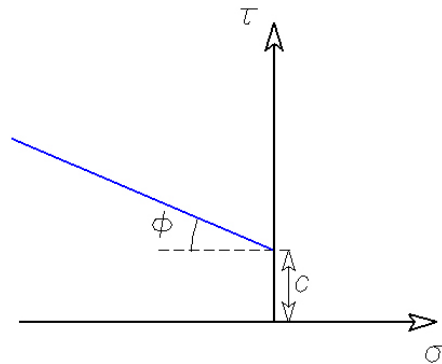
c - kohezja (spójność).

Kąt tarcia i spójność są stałymi materiałowymi. Ich graficzną prezentację będącą interpretacją równania przedstawiono na rys. 11.1

Przyjmując założenie, że związek Coulomb'a wynika przede wszystkim z procesu tarcia, a doświadczenia wykazują, że prawo tarcia jest nieliniowe [Jaeger, Cook, 1969] proponuje dla małych wielkości naprężeń normalnych do powierzchni poślizgu przyjmować liniowe prawo Coulomb'a, natomiast dla dużych wartości tych naprężeń prawo nieliniowe w postaci:

$$|\tau_{gr}| = -\mu\sigma_n^m + c, \quad (11.2)$$

gdzie m zawiera się w przedziale $2/3 \leq \mu \leq 1$.



Rys. 11.1 Wizualizacja prawa Coulomb'a.

Rozwój badań teoretycznych i doświadczalnych prowadzonych przez [Hvorsleva, 1937] doprowadził do innej postaci prawa Coulomba uwzględniającego ciśnienie porowe w przestrzeniach pomiędzy cząstkami lub ziarnami gruntu, nazywanego za Kisiel [Kisiel, 1982] prawem Coulomba – Hvorslev'a:

$$|\tau_{gr}| = -(\sigma_n + \sigma) \operatorname{tg} \phi + c, \quad (11.3)$$

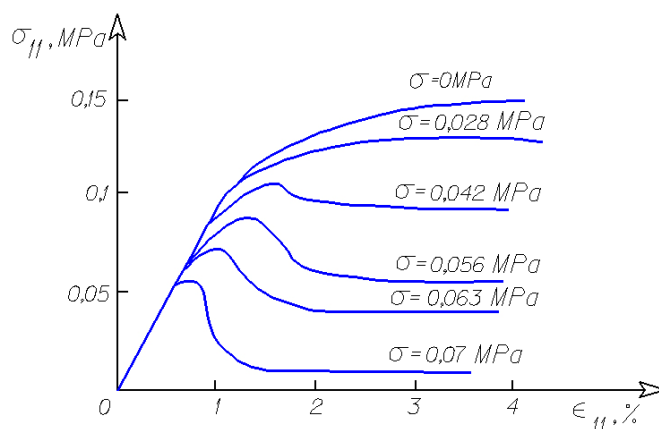
gdzie σ oznacza naprężenie w cieczy wynikające z oddziaływania cieczy na szkielet ośrodka gruntowego.

Oznaczając przez $\sigma_n^{ef} = \sigma_n + \sigma$ naprężenie efektywne normalne na powierzchni poślizgu równanie Coulomb'a – Hvorslev'a możemy zapisać w postaci:

$$|\tau_{gr}| = -\sigma_n^{ef} \operatorname{tg} \phi + c. \quad (11.4)$$

Wpływ ciśnienia porowego na odkształcalność skał była tematem wielu publikacji, między innymi przez [Bishopa, 1959, 1961], [Bishop i inni, 1960], [Hansena, Gibsona, 1949], [Skemptona, 1961], [Jaegera, 1969]. Przykładowo badania [Jaeger'a, 1969] przeprowadzone

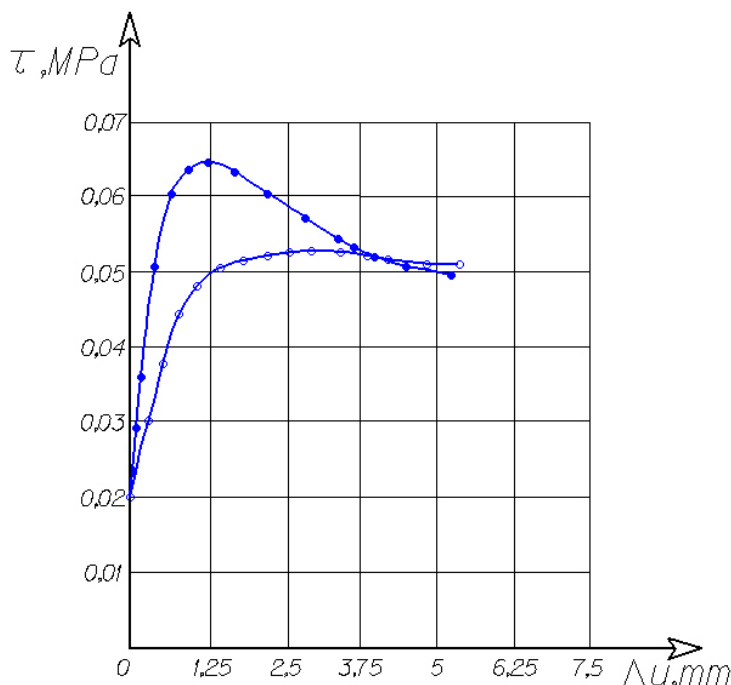
na wapieniach, dotyczące wpływu wody na deformację próbek i na maksymalne ciśnienie przenoszone przez nie w stanie jednoosiowego ściskania dobrze obrazuje rys. 11.2.



Rys. 11.2 Wpływ naprężenia w cieczy wypełniającej pory na proces naprężenie odkształcenie próbek wapiennych wg Jaeger'a (wg [Kisiela i innych 1969]).

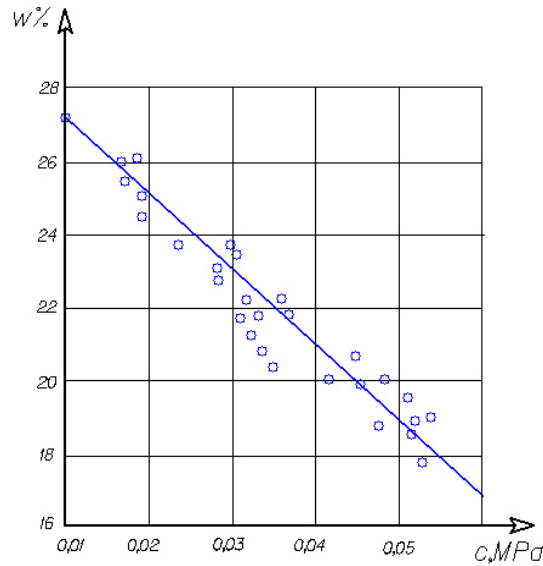
W przypadku gruntów wzrost naprężenia w cieczy σ może doprowadzić do wzrostu objętości gruntu, a nawet do upłynnienia gruntu. Przeciętne wartości kątów tarcia wewnętrznego ϕ dla różnych gruntów zależą od ich zagęszczenia, natomiast wartości kohezji c zależą od wilgotności gruntu i od stopnia prekonsolidacji gruntu.

Wpływ zagęszczenia gruntu na wielkość oporów tarcia wewnętrznego przedstawił Kisiel w pracy, [Kisiel i inni, 1969] co pokazuje rys. 11.3.



Rys. 11.3 Zależność oporu tarcia wewnętrznego od przemieszczenia w przypadku gruntu mało zagęszczonego (kółka zaczernione) i gruntu zagęszczonego (kółka niezaczernione) (wg. [Kisiela i innych, 1982]).

Zależność kohezji od wilgotności gruntu jest wg [Bjerruma, Simonsa 1960] (podajemy za [Wiłunem, Starzewskim, 1972]) liniowa, co przedstawiono na rys. 11.4



Rys. 11.4 Zależność spójności od wilgotności gruntów spoistych wg [Wiłuna, Starzewskiego, 1972].

Jak widać, wpływ fazy ciekłej lub gazowej na proces ścinania w gruntach objawia się w dwóch niezależnych płaszczyznach: bezpośredniego oddziaływania cieczy na proces odkształcenie – naprężenie poprzez działanie ciśnienia w porach ośrodka i sił unoszenia filtracji oraz ma istotny wpływ na parametry wytrzymałościowe w gruncie.

11.2.1 Warunek Mohra

Warunek ten wynika bezpośrednio z analizy granicznych kół Mohra. Otóż zakłada się, że stan graniczny ośrodka rozdrobnionego lub zniszczenie porowatych materiałów skalnych określa równanie obwiedni kół Mohra i jest zależne od wielkości maksymalnego i minimalnego naprężenia głównego. Może być, zgodnie z pracą Kisiela i innych [Kisiel i inni, 1969], określone zależnością:

$$p = F(q) \quad \text{lub} \quad F(p, q) = 0, \quad (11.5)$$

gdzie

$$p = -\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \quad \text{oraz} \quad q = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \quad (11.6)$$

lub po uwzględnieniu naprężenia w cieczy σ :

$$p = -\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) - \sigma \quad \text{oraz} \quad q = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3), \quad (11.7)$$

przy czym $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Warunek ten w przypadku liniowej funkcji $F(q)$ zgodnie z prawem Coulomba Mohra ma następującą postać:

$$q - p \sin \phi - c \cos \phi = 0 \quad (11.8)$$

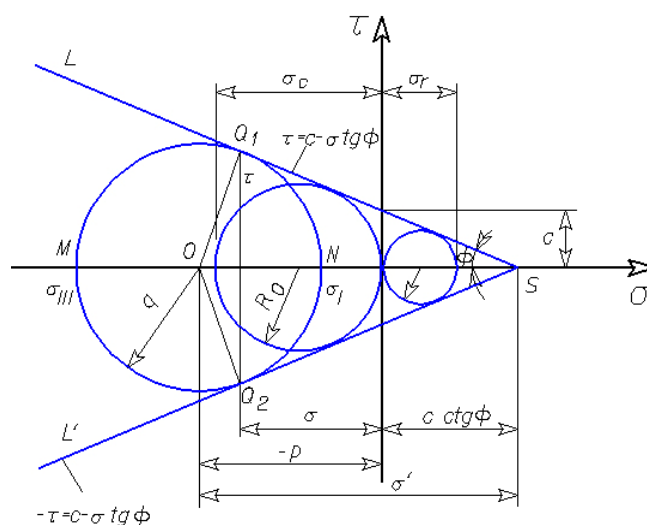
lub

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi - c \cos \phi = 0 \quad (11.9)$$

lub przy założeniu działania naprężeń efektywnych :

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) + \frac{1}{2}[(\sigma_1 + \sigma_3) + \sigma] \sin \phi - c \cos \phi = 0. \quad (11.10)$$

Przechodząc do konstrukcji liniowej obwiedni kół Mohra rys. 11.5 widzimy, że równanie prostej stanowiącej liniowe obwiednie kół Mohra wyraża się związkiem (11.8).



Rys. 11.5 Warunek Coulomba – Mohra.

11.3 Inne warunki stanu granicznego.

Liniowy warunek Coulomb'a zarówno dla przypadku ośrodków nawodnionych, jak również ośrodków „suchych” nie jest jedyną propozycją warunku stanu granicznego w mechanice, chociaż w mechanice gruntów i skał jest najczęściej stosowany do rozwiązania konkretnych zagadnień inżynierskich.

Przechodząc do szczególnych przypadków nieliniowego warunku Mohra, można wyrazić równanie opisujące obwiednię kół w sposób następujący:

$$\sigma^{ef} = a - b\tau^n, \quad (11.11)$$

gdzie $1 \leq n \leq 2$, a - określa wytrzymałość na rozciąganie hydrostatyczne, natomiast wielkość $\sqrt[n]{a/b}$ jest wartością naprężeń ścinających, gdy $\sigma^{ef} = 0$. Szczególnym przypadkiem jest paraboliczny warunek stanu granicznego, który wg prac [Jaegera, Cooka, 1969], i [Parate, 1969], dobrze odwzorowuje wyniki doświadczeń dla gruntów i skał pod działaniem dużych naprężeń.

Interesującą propozycję warunku stanu granicznego wprowadził Stroganov, który opublikował szereg prac doświadczalnych i teoretycznych [Stroganov, 1958, 1961, 1965, 1967] w zakresie stanów granicznych gruntów.

Stroganov [Stroganov, 1967] uważa, że zachowanie się gruntu w stanie plastycznym opisuje układ niezmienniczych związków fizycznych:

$$\frac{\tau^*}{\sigma_0} = \frac{\frac{G_{pl}}{\sigma_0} tg\Psi}{tg\Psi + \frac{G_{pl}}{\sigma_0} \gamma^*} \gamma^*,$$

$$\sigma_0 = \lambda \gamma_0,$$

$$\gamma_{0d} = -\chi \gamma^*,$$
(11.12)

gdzie

$$\tau^* = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{okt} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)},$$
(11.13)

τ_{okt} naprężenie styczne do powierzchni oktaedrycznej w układzie głównych osi naprężeń oraz

$$\gamma^* = \frac{3}{2\sqrt{2}(1+\nu)} \gamma_{okt} =$$

$$= \frac{1}{(1+\nu)\sqrt{2}} \sqrt{(\gamma_{11} - \gamma_{22})^2 + (\gamma_{22} - \gamma_{33})^2 + (\gamma_{33} - \gamma_{11})^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{12}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{31}^2)},$$
(11.14)

γ_{okt} odkształcenie oktaedryczne w układzie głównych osi odkształceń (zakłada się przy tym, że układ głównych osi odkształceń pokrywa się z układem głównych osi naprężeń),

σ_{ij} i γ_{ij} składowe naprężenia i odkształcenia w dowolnym układzie kartezjańskim,

σ_0 i γ_0 naprężenie i odkształcenie średnie,

γ_{0d} odkształcenie wywołane ściśliwością szkieletu,

χ współczynnik dylatacji,

ν współczynnik Poissona,

λ współczynnik doświadczalny Straganowa,

G_{pl} początkowy moduł plastyczności,

$tg\Psi$ współczynnik tarcia wewnętrznego na płaszczyźnie oktaedrycznej.

W przypadku ciała sztywno – plastycznego $G_{pl} / \sigma_0 \rightarrow \infty$ warunek Stroganowa przechodzi w warunek Hubera-Schleichera [Kisiel i inni, 1982]. Z badań Stroganowa. wynika, że piaski spełniają z dużą dokładnością warunek Hubera-Schleichera wyrażony związkami:

$$\tau^* = (\sigma_0 + p_n) tg\psi .$$
(11.15)

Różnica pomiędzy powyższym warunkiem stanu granicznego a warunkiem Coulomb'a – Mohra. polega na tym, że warunek ten jest niezmienniczy, więc nie zależy od stanu naprężenia. Inaczej ma się sprawa z warunkiem Coulomb'a - Mohra. Porównując obydwa warunki, możemy znaleźć zależność pomiędzy kątem ψ i φ dla różnych przypadków stanu naprężenia:

dla przypadku osiowego ściskania:

$$tg\psi = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sin \varphi}{1 - \sin \varphi};$$
(11.16)

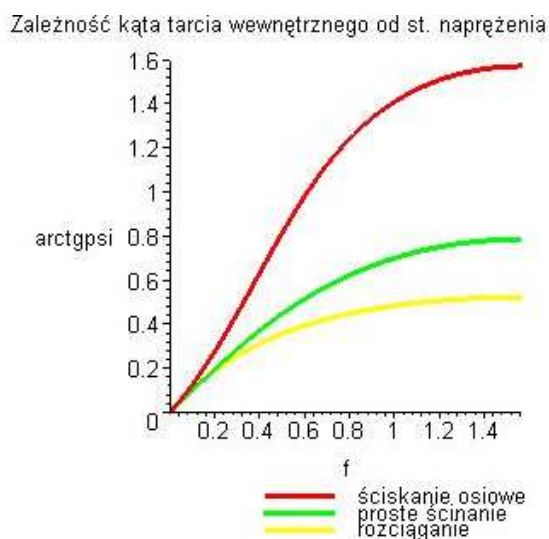
dla prostego ścinania:

$$\operatorname{tg}\psi = \sin \varphi; \quad (11.17)$$

dla przypadku osiowego rozciągania

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sin \varphi}{1 + \sin \varphi}. \quad (11.18)$$

Powyższe formuły pozwalają określić zależność kąta tarcia wewnętrznego od stanu naprężenia (ψ nie zależy od stanu naprężenia) – co zobrazowano na rys. 11.6



Rys. 11.6 Związek pomiędzy ψ i kątem tarcia wewnętrznego wg. Stroganowa (f – kąt tarcia wewnętrznego φ , $\operatorname{arctg}\psi$ - $\operatorname{arctg}(\psi)$).

Do innych znanych w literaturze warunków należy wymienić: warunek Misesa - Schleichera, warunek Treski uogólniony później przez Druckera; są one opisane szczegółowo w pracach [Izbickiego, 1976], [Kisiela i inni, 1982], [Mroza, Drescher'a, 1972], [Sawczuka, Izbickiego, 1984].

Do propozycji często cytowanych w literaturze, choć nieznajdujących do dzisiaj szerszego zastosowania w praktyce inżynierskiej, zaliczyć można warunek Misesa –Schleichera, który uwzględniając definicje niezmienników stanu naprężenia można zapisać w postaci:

$$\left(I_2\right)^{n/2} + \frac{1}{3} \alpha I_1 - k = 0, \quad (11.19)$$

gdzie I_1 i I_2 są niezmiennikami stanu naprężenia, a α i k są stałymi materiałowymi.

przy czym $1 \leq n \leq 2$.

Graficznie powierzchnia graniczna jest paraboloidą obrotową n -tego stopnia o wierzchołku w

punkcie $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{k}{\alpha}$. W pracy [Kisiela i innych, 1982] Izbicki pokazał, że istnieje

przejście graniczne, dla przypadku płaskiego stanu odkształcenia, przy powiązaniu stałych α i k z kątem tarcia wewnętrznego φ i spójnością c :

$$c = \frac{k}{\sqrt{(1-12\alpha^2)}}, \quad \sin \varphi = \frac{3}{\sqrt{(1-3\alpha^2)}} \quad (11.20)$$

oraz dla $n = 1$, do warunku Coulomba. Podobnie dla $n = 2$ uzyskuje się warunek paraboliczny.

W niniejszej monografii nie będziemy zajmować się szczegółowo złożonymi warunkami plastyczności odsyłając zainteresowanych do bogatej literatury w tym zakresie, ograniczając się w większości zagadnień do liniowego warunku Coulomba Mohra i wpływu fazy ciekłej lub gazowej na proces uplastycznienia lub utraty wytrzymałości gruntów lub skał.

11.4 Sformułowanie zagadnienia stanu granicznego.

11.4.1 Statyka stanu granicznego.

Po raz pierwszy zagadnieniem sformułowania równań stanu granicznego zajął się [Kötter, 1888] dla przypadku zagadnienia płaskiego ośrodka sypkiego.

Obejmuje ono:

- ✚ równania równowagi w przypadku płaskiego stanu odkształcenia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \rho_1 &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \rho_2 &= 0, \end{aligned} \quad (11.21)$$

gdzie ρ_1 i ρ_2 są składowymi sił masowych

- ✚ warunek stanu granicznego Coulomba który dla przypadku braku spójności ma postać:

$$|\tau_{gr}| = -\sigma_n \operatorname{tg} \varphi. \quad (11.22)$$

Brak spójności nie ma istotnego wpływu na ogólność przeprowadzonych poniżej przekształceń, gdyż w każdym momencie możemy uogólnić rozważania wprowadzając pojęcie „wstępnego sprężenia ośrodka” wyrażonego wzorem:

$$\rho_n = c \operatorname{ctg} \varphi, \quad (11.23)$$

więc warunek Coulomb'a można wyrazić wzorem:

$$|\tau_{gr}| = -(\sigma_n + \rho_n) \operatorname{tg} \varphi. \quad (11.24)$$

W ogólnym przypadku warunek **Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania.** może mieć postać zależności:

$$\tau_{gr} = \bar{g}(\sigma_n). \quad (11.25)$$

Wprowadzając wielkości bezwymiarowe naprężeń:

$$\bar{\tau} = \frac{\tau_{gr}}{\sigma_a}; \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma_n}{\sigma_a}; \quad \bar{\rho} = \frac{\rho_n}{\sigma_a}. \quad (11.26)$$

Warunek stanu granicznego można przedstawić w postaci:

$$\bar{\tau} = \bar{g}(\bar{\sigma}), \quad (11.27)$$

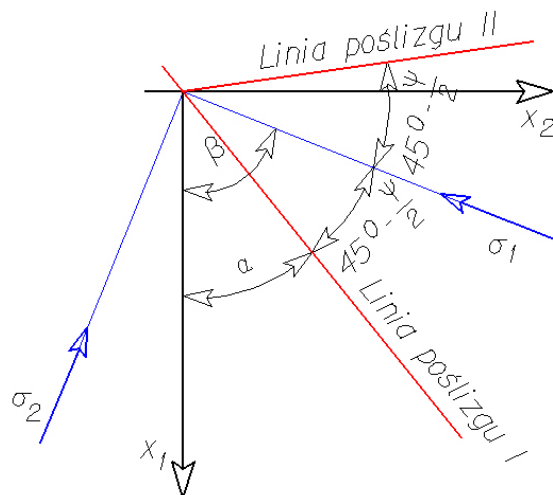
gdzie w przypadku warunku granicznego Coulomba mamy:

$$\bar{g}(\bar{\sigma}) = -\bar{\sigma} \operatorname{tg} \varphi \quad (11.28)$$

lub z uwzględnieniem kohezji:

$$\bar{g}(\bar{\sigma}) = -(\bar{\sigma} + \bar{\rho}) \operatorname{tg} \varphi. \quad (11.29)$$

Zgodnie z pracą [Kisiela i innych, 1982] położenie linii, wzdłuż których następuje poślizg (linii poślizgu) jest określone zależnościami kątowymi względem naprężeń głównych i zależy od wielkości kąta tarcia wewnętrznego. Wprowadźmy kąt ψ pomiędzy kierunkiem naprężenia głównego σ_1 a liniami poślizgu s_1 i s_2 . Zgodnie z oznaczeniami rys. 4.38 możemy kąt ψ wyrazić przy pomocy kąta tarcia wewnętrznego φ wzorem:



Rys. 4.38. Oznaczenie kierunków linii poślizgu w stanie granicznym (wg. [Kisiel i inni, 1982]).

$$\psi = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}. \quad (11.30)$$

W przypadku gruntu idealnie spoistego, kąt tarcia wewnętrznego równa się zero i $2\psi = \pi/2$. Jak widać kąt tarcia wewnętrznego, a zatem i kąt pomiędzy liniami poślizgu 2ψ zależy od funkcji $g(\sigma)$ w dowolnym punkcie obszaru i można go obliczyć ze wzoru:

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{d\bar{g}(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} = \bar{g}'(\bar{\sigma}). \quad (11.31)$$

Na podstawie wzoru **Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania.** i korzystając z zależności trygonometrycznych dla liniowego prawa Coulomba można zapisać:

$$\sin \varphi = \frac{\bar{g}'}{\sqrt{1+\bar{g}'^2}}; \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\bar{g}'^2}}. \quad (11.32)$$

Na podstawie wzorów (11.26) możemy zapisać:

$$\begin{aligned} \sigma_a \hat{\sigma} &= \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{2} - \frac{(\sigma_1 - \sigma_2) \sin \varphi}{2}, \\ \sigma_a \hat{\tau} &= \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (11.33)$$

A następnie związki pomiędzy naprężeniami głównymi σ_1 i σ_2 oraz naprężeniami σ_{11} , σ_{22} i σ_{12} , σ i τ możemy dla przypadku płaskiego stanu naprężenia zapisać je w postaci:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} \\ \sigma_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} \end{aligned} \quad (11.34)$$

Podstawiając związki (11.33) dostajemy:

$$\begin{aligned} \sigma_a \hat{\sigma} &= \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - \frac{1}{2} \sin \varphi \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}, \\ \sigma_a \hat{\tau} &= \frac{1}{2} \cos \varphi \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}. \end{aligned} \quad (11.35)$$

Równania stanu granicznego sprowadzają się do układu równań :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \gamma_{01} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \gamma_{02} &= 0 \end{aligned} \quad (11.36)$$

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2 = \frac{4\sigma_a}{\cos^2 \varphi} \bar{g}'^2 \left[\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2\sigma_a} - \frac{\sin \varphi}{2\sigma_a} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} \right]$$

gdzie γ_{01} i γ_{02} oznaczają składowe ciężaru objętościowego szkieletu z uwzględnieniem wyporu wody

Korzystając z zależności geometrycznych dla linii poślizgu można wyrazić bezwymiarowe naprężenia σ_{11} , σ_{22} i σ_{12} w zależności od naprężenia σ oraz kąta β nachylenia naprężenia σ_1 do osi x_1 w postaci:

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_{11}}{\sigma_a} &= \bar{\sigma} + \frac{\bar{g}(\bar{\sigma})}{\cos \varphi} [\operatorname{tg} \varphi + \cos 2\beta] \\
\frac{\sigma_{22}}{\sigma_a} &= \bar{\sigma} + \frac{\bar{g}(\bar{\sigma})}{\cos \varphi} [\operatorname{tg} \varphi - \cos 2\beta] \\
\frac{\sigma_{12}}{\sigma_a} &= \frac{\bar{g}(\bar{\sigma})}{\cos \varphi} \sin 2\beta
\end{aligned} \tag{11.37}$$

Uwzględniając związki (11.35) w zależnościach (11.37) można je zapisać w postaci:

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_{11}}{\sigma_a} &= \bar{\sigma} + \bar{g}(\bar{\sigma}) \left[\bar{g}'(\bar{\sigma}) + \cos 2\beta \sqrt{1 + \bar{g}'^2(\bar{\sigma})} \right] \\
\frac{\sigma_{22}}{\sigma_a} &= \bar{\sigma} + \bar{g}(\bar{\sigma}) \left[\bar{g}'(\bar{\sigma}) - \cos 2\beta \sqrt{1 + \bar{g}'^2(\bar{\sigma})} \right] \\
\frac{\sigma_{12}}{\sigma_a} &= \bar{g}(\bar{\sigma}) \sqrt{1 + \bar{g}'^2(\bar{\sigma})} \sin 2\beta
\end{aligned} \tag{11.38}$$

Biorąc pod uwagę, że dla liniowego równania stanu granicznego $\bar{g}''(\bar{\sigma}) = 0$ równania równowagi nazywane równaniami Köttera można przedstawić zgodnie z pracą Kisiela [Kisiel 1982] w postaci:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x_1} (1 + \sin \varphi \cos 2\beta) + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x_2} \sin \varphi \sin 2\beta + \\
&-2(\bar{\sigma} + \bar{\rho}) \sin \varphi \left(\frac{\partial \beta}{\partial x_1} \sin 2\beta - \frac{\partial \beta}{\partial x_2} \cos 2\beta \right) + \frac{\gamma_{01}}{\sigma_a} \cos^2 \varphi = 0 \\
&\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x_1} \sin \varphi \sin 2\beta + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x_2} (1 - \sin \varphi \cos 2\beta) + \\
&+2(\bar{\sigma} + \bar{\rho}) \sin \varphi \left(\frac{\partial \beta}{\partial x_1} \cos 2\beta + \frac{\partial \beta}{\partial x_2} \sin 2\beta \right) + \frac{\gamma_{02}}{\sigma_a} \cos^2 \varphi = 0
\end{aligned} \tag{11.39}$$

Równania Köttera można przedstawić w innej postaci stosując podstawienia:

$$\eta = \chi - \beta; \quad \xi = \chi + \beta \tag{11.40}$$

oraz

$$\chi = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \varphi \ln \frac{\sigma^*}{\sigma_a}; \quad \sigma^* = \frac{\bar{\sigma} + \bar{\rho}}{\cos^2 \varphi} \sigma_a \tag{11.41}$$

wyprowadzone przez Sokołowskiego [wg Kisiela 1982] w przypadku liniowego warunku stanu granicznego (11.9) w postaci:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \operatorname{tg}(\beta - \psi) \frac{\partial \eta}{\partial x_2} &= \frac{\cos \varphi [\gamma_{02} \cos(\beta + \psi) - \gamma_{01} \sin(\beta + \psi)]}{2g(\sigma) \cos(\beta - \psi)} = F_1 \\ \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \operatorname{tg}(\beta - \psi) \frac{\partial \xi}{\partial x_2} &= \frac{\cos \varphi [\gamma_{01} \sin(\beta - \psi) - \gamma_{02} \cos(\beta - \psi)]}{2g(\sigma) \cos(\beta + \psi)} = F_2\end{aligned}\quad (11.42)$$

W przypadku, gdy pole sił objętościowych \vec{F} jest polem potencjalnym wynikającym z działanie siły grawitacji i sił unoszenia filtracji cieczy przez pory ośrodka układ równań stanu granicznego ma postać następującą:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \operatorname{tg}(\beta - \psi) \frac{\partial \eta}{\partial x_2} &= \frac{\cos \varphi \left\{ \left[\gamma_{01} + \frac{1}{f} \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} \right] \sin(\beta + \psi) - \left[\gamma_{02} + \frac{1}{f} \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} \right] \cos(\beta + \psi) \right\}}{2\bar{g}(\bar{\sigma}) \cos(\beta - \psi)} \\ \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \operatorname{tg}(\beta - \psi) \frac{\partial \xi}{\partial x_2} &= \frac{\cos \varphi \left\{ - \left[\gamma_{01} + \frac{1}{f} \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} \right] \sin(\beta - \psi) + \left[\gamma_{02} + \frac{1}{f} \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} \right] \cos(\beta - \psi) \right\}}{2\bar{g}(\bar{\sigma}) \cos(\beta + \psi)}\end{aligned}\quad (11.43)$$

gdzie $\sigma = -pf$ jest naprężeniem w cieczy wypełniającej pory, a p oznacza ciśnienie porowe.

Powyższy układ równań równowagi obszaru w przypadku statyki stanu granicznego uzupełnia równanie przepływu filtracyjnego, które wg. pracy [Stilger – Szydło, 2005] dla przypadku przepływu ustalonego sprowadza się do postaci:

$$\nabla^2 \sigma = 0 \quad (11.44)$$

Moim zdaniem postać równania przepływu jest nieco bardziej złożona i jest sprzężona z układem równań(11.44). Uwzględniając wyniki poprzednich rozważań z zakresu modelu Biota-Darcy'ego równanie przepływu filtracyjnego powinno mieć postać:

$$\frac{C}{f} \nabla^2 \sigma + \frac{1}{R} \dot{\sigma} = \frac{H}{R} P \frac{\partial g(\bar{\sigma})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (11.45)$$

gdzie C, R, H to stałe modelu Biota-Darcy'ego, P współczynnik prawa płynięcia plastycznego.

IV.4.4.2. Kinematyka stanu granicznego.

Rozważmy podobnie jak w przypadku statyki stanu granicznego model sztywno plastyczny ciała „suchego”. Kinematyka stanu granicznego określa związek fizyczny wiążący tensor naprężenia σ_{ij} z tensorem prędkości odkształcenia $\dot{\epsilon}_{ij}$:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial G(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (11.46)$$

gdzie:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (11.47)$$

λ oznacza dodatnią stałą

v_i oznacza składowe prędkości przemieszczenia

$G(\sigma_{ij})$ to potencjał plastyczności opisany równaniem:

$$G(\sigma_{ij}) = (\sigma_1 - \sigma_2) + (\sigma_1 + \sigma_2) \sin \psi - c \cos \psi \quad (11.48)$$

Jeżeli $\psi = \varphi$ wówczas $G(\sigma_{ij}) = F(\sigma_{ij})$ i równanie (11.48) odpowiada stowarzyszonemu z warunkiem plastyczności prawu płynięcia. Gdy $\psi < \varphi$ równanie (11.48) jest niestowarzyszonym prawem płynięcia plastycznego, a ψ jest kątem dylatacji, określającym zmiany objętościowe ośrodka.

Korzystając z prac [Stilger – Szydło, 2005] i [Izbickiego i Mroza, 1976] przedstawimy w skrócie metodę rozwiązania zagadnień płynięcia plastycznego ciała sztywno plastycznego metodą charakterystyk. Metoda ta zalicza się do metod ścisłych rozwiązywania zadań nośności granicznej. Szczegółowy opis metody z przykładami obliczeń konkretnych zagadnień znajdzie czytelnik w pracy [Kisiel i inni, 1982].

W ogólnym przestrzennym quasi-statycznym zagadnieniu nośności granicznej, aby rozwiązać problem nośności granicznej dysponujemy:

1. Równaniami równowagi

$$\sigma_{ij,j} + \gamma_{0i} = 0 \quad (11.49)$$

2. Warunkiem granicznym Mohra

$$p = F(q) \quad (11.50)$$

gdzie

$$p = -\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \quad \text{oraz} \quad q = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \quad (11.51)$$

przy czym $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Warunek ten w przypadku liniowej funkcji $f(q)$ ma następującą postać:

$$q - p \sin \varphi - c \cos \varphi = 0 \quad (11.52)$$

lub

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi - c \cos \varphi = 0 \quad (11.53)$$

3. Stowarzyszonym lub niestowarzyszonym prawem płynięcia

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial G(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (11.54)$$

gdzie:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (11.55)$$

W przypadku stowarzyszonego prawa płynięcia $G(\sigma_{ij}) = F(\sigma_{ij})$.

Podsumujmy, dysponujemy:

- trzema równaniami równowagi,
- równaniem stanu granicznego,
- sześcioma równaniami płynięcia plastycznego,
- sześcioma równaniami określającymi związki geometryczne.

W sumie mamy do dyspozycji 16 równań. Podliczmy niewiadome:

- sześć niezależnych składowych stanu naprężenia,
- sześć niezależnych składowych prędkości stanu odkształcenia,
- trzy składowe prędkości przemieszczenia,
- stała λ .

Z podsumowania jasno wynika, że zagadnienie jest statycznie wyznaczalne, gdyż ilość równań (16) jest identyczna z ilością niewiadomych. Możemy łatwo zredukować liczbę niewiadomych i równań poprzez podstawienie związków geometrycznych (11.55) do prawa płynięcia (11.54).

Powyższy układ równań opisuje proces równowagi kinetycznej stanu granicznego bez uwzględnienia ciśnienia porowego cieczy i sił oporu filtracyjnego. W przypadku uwzględnienia naprężenia w cieczy σ powyższy układ równań ma dodatkową niewiadomą, musi, więc być uzupełniony o dodatkowe równanie. Poprzednie rozważania prowadzą do wniosku, że równaniem tym jest równanie przepływu cieczy przez ośrodek porowaty. W ogólnym przypadku zagadnienie nośności granicznej w przypadku procesu quasi - statycznego (z pominięciem sił bezwładności), ale z uwzględnieniem sił masowych filtracji cieczy przez ośrodek porowaty sprowadza się do następującego układu równań:

1. Równaniami równowagi

$$(\sigma_{ij} + \sigma \delta_{ij})_{,j} + \gamma_{0i} = 0; \quad (11.56)$$

2. Warunkiem granicznym Mohra

$$p = F(q), \quad (11.57)$$

gdzie

$$p = -\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) - \sigma \quad \text{oraz} \quad q = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3), \quad (11.58)$$

przy czym $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Warunek ten w przypadku liniowej funkcji $f(q)$ ma następującą postać:

$$q - p \sin \varphi - c \cos \varphi = 0 \quad (11.59)$$

lub

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) + \frac{1}{2}[(\sigma_1 + \sigma_3) + \sigma] \sin \varphi - c \cos \varphi = 0; \quad (11.60)$$

3. Stowarzyszonym lub niestowarzyszonym prawem płynięcia:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial G(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (11.61)$$

gdzie:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right); \quad (11.62)$$

4. Równaniem przepływu cieczy przez ośrodek porowaty w przypadku przepływu laminarnego:

$$\frac{C}{f} \nabla^2 \sigma + \frac{1}{R} \dot{\sigma} = \frac{H}{R} \dot{\epsilon}, \quad (11.63)$$

gdzie R, H stałe Biota, a $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_{ij}$

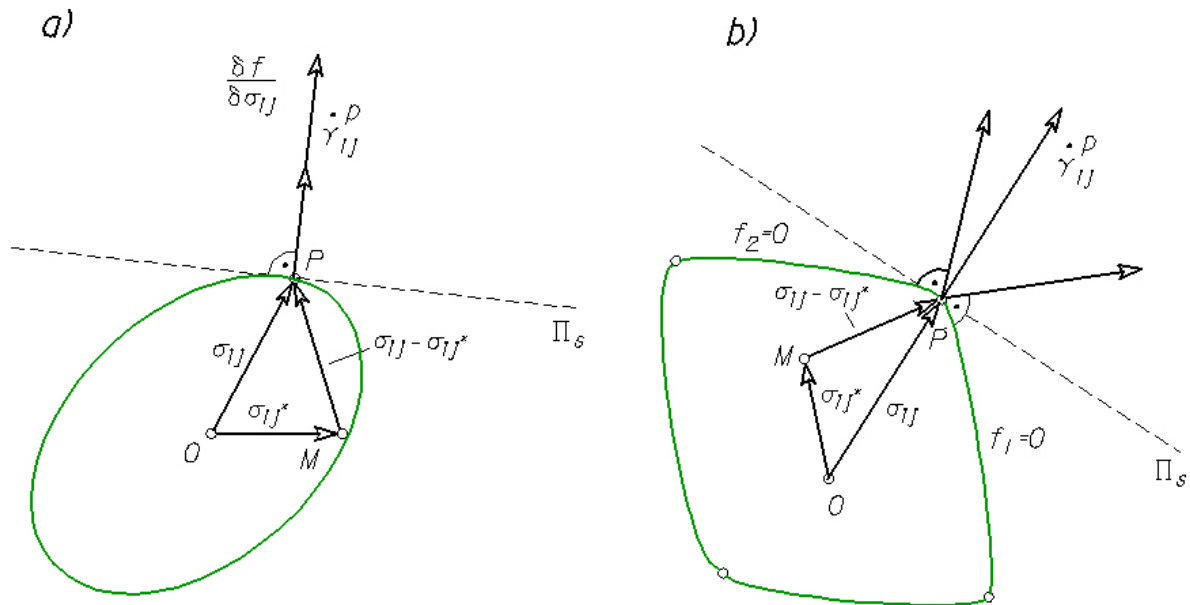
Układy równań ((11.56) do(11.63)) oraz opisują przypadki zagadnienia trójwymiarowego którego rozwiązanie nastęca istotne trudności rozwiązania. W literaturze znane są natomiast liczne rozwiązania dotyczące płaskiego stanu odkształcenia i zagadnień osiowo symetrycznych.

11.4.3. Twierdzenia nośności granicznej.

Twierdzenia dotyczące nośności granicznej i ich dowody zostały przedstawione przez Izbickiego w pracy [Kisiela i inni, 1982] . D przeprowadzenia dowodów zostały przyjęte dwa założenia:

- a) Powierzchnia graniczna (plastyczności) jest wypukła
- b) Wektor prędkości odkształceń plastycznych jest normalny do tej powierzchni

Obydwa założenia można przedstawić dla przypadku gładkiej powierzchni plastyczności rys. 4.39 a i powierzchni osobliwej złożoną z kilku powierzchni analitycznych przecinających się wzdłuż krawędzi i naroży rys.4.39b



Rys. 4.39. Powierzchnie plastyczności a) gładka i b) osobliwa (wg Kisiel i inni []).

Zgodnie z pracą [] warunek wypukłości i normalności można przedstawić w przypadku gładkiej powierzchni plastyczności w postaci:

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \left[\frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \right] \geq 0 \quad (11.64)$$

lub w przypadku, gdy powierzchnia plastyczności jest powierzchnią osobliwą:

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \left[\sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \right] \geq 0, \quad \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \dots, \lambda_k > 0 \quad (11.65)$$

Mając na uwadze powyższe założenia, można wykazać słuszność następujących twierdzeń:

TWIERDZENIE I.

Każde pole statyczne dopuszczalne σ_{ij}^s , spełniające warunki równowagi wewnętrznej i nienaruszające warunku plastyczności w obszarze ciała, dostarcza dolnej oceny obciążenia granicznego.

oraz

TWIERDZENIE II.

Każde pole kinematycznie dopuszczalne, spełniające warunki podparcia na brzegu i warunek dodatniej mocy obciążeń brzegowych wyznacza kinematyczny mnożnik obciążenia będący górną oceną obciążenia granicznego.

W prowadząc współczynnik v_g określający ocenę stanu granicznego można na podstawie powyższych twierdzeń sformułować nierówność:

$$v_k \leq v_g \leq v_s \quad (11.66)$$

gdzie v_k określa ocenę kinematyczną stanu granicznego, a v_s ocenę statyczną stanu granicznego.

11.5 Model matematyczny dwufazowego ośrodka porowatego sprężysto-lepkoplastycznego.

Teoria ośrodka dwufazowego, którego pory wypełnione są cieczą bazuje na równaniach zaproponowanych przez Biota w latach 40 i 50-tych [5,6,16]. Stworzona przez Biota teoria konsolidacji zakładała model ciągłego porowatego szkieletu sprężystego, którego pory wypełnione są ściśliwą lepką cieczą newtonowską przepływającą ruchem laminarnym przez pory tego ośrodka. Liniowy model Biota zakładał stałą wartość parametrów, w tym współczynnika porowatości. Model ten był punktem zainteresowania wielu badaczy w odniesieniu do procesów izotermicznych przy wykorzystaniu metod klasycznej mechaniki - prace Derskiego [9], Szefera [15], Kisiela [12], Strzeleckiego [14] oraz z wykorzystaniem metody asymptotycznej homogenizacji przez Auriault [1,2,3], Łydzba [13], Bensoussan i inni [7]. Dla procesów adiabatycznych równania procesu termo konsolidacji zaproponował Coussy [8], Strzelecki [14]. Model Biota był modyfikowany poprzez uwzględnienie innych cech szkieletu sprężystego jak wpływ na proces konsolidacji potencjału pola elektrycznego w przypadku gruntów spoistych - praca Strzeleckiego [14], lub uwzględnienie własności lepkich szkieletu - prace Bartlewskiej [4] zakładającej dla szkieletu ośrodka dwufazowego model Kelvina Voighta. Coussy [8] zaproponował w ramach podejścia fenomenologicznego jeszcze inny sposób modelowania. Proponował potraktowanie ośrodka porowatego jako otwarty układ termodynamiczny, w którym zmiennymi kinematycznymi są dla ośrodka w pełni nasyconego tensor odkształcenia szkieletu i porowatość. Żadna z cytowanych prac nie zajmowała się problemami teorii procesów sprężysto-lepko-plastycznych z uwzględnieniem filtracji płynu ściśliwego przez dwufazowy porowaty ośrodek.

11.5.1 Założenia wyjściowe do modelu matematycznego ośrodka sprężysto-lepko-plastycznego.

Proponowany przez nas model spełnia podstawowe założenia:

- szkielet ośrodka jest materiałem izotropowym, ciągłym, sprężysto-lepko-plastycznym,
- w zakresie odkształceń sprężystych porowatość ośrodka uważa się za wielkość stałą,
- cały ośrodek jest wypełniony cieczą,
- ciecz jest ciągłą, ściśliwą cieczą newtonowską,
- przepływ cieczy przez pory i mikroszczeliny ośrodka jest laminarny (mała liczba Reynoldsa),
- w zakresie sprężystości odkształcenia ośrodka są małe

11.5.2 Równania zachowania masy szkieletu i cieczy w zakresie sprężystości.

Niech Ω jest przestrzenią określającą element VER wypełniony ośrodkiem dwufazowym i ograniczonym powierzchnią S . Wektor \vec{n} jest jednostkowym wektorem normalnym do powierzchni S skierowanym na zewnątrz elementu Ω . Jeżeli przez \vec{v}^l i \vec{v}^s oznacza się odpowiednio wektory prędkości cieczy i szkieletu to $\vec{v}^r = \vec{v}^l - \vec{v}^s$ określa relatywną prędkość przepływu filtracyjnego płynu przez ośrodek porowaty. Jeżeli przez ρ_s i ρ_l oznaczają kolejno gęstość właściwą szkieletu i płynu, to możemy wprowadzić gęstości objętościowe szkieletu $\rho_1 = (1-f)\rho_s$ i cieczy $\rho_2 = f\rho_l$. Przez ρ oznaczać będziemy gęstość objętościową ośrodka dwufazowego równą co do wartości sumie $\rho_1 + \rho_2$. Wartość $\bar{\rho}$ oznaczać będzie gęstość cieczy przepływającej przez powierzchnię S : $\bar{\rho} = f_s\rho_l$.

Równanie ciągłości obu faz ośrodka ma postać:

$$\int_S \rho v_i^s n_i dS + \int_S \rho v_i^r n_i dS + \int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega = 0 \quad (11.67)$$

Uwzględniając w powyższym równaniu twierdzenie Gaussa - Ostrogradzkiego możemy powyższe równanie zapisać w postaci związku lokalnego:

$$\frac{D^s \rho}{Dt} + \rho \dot{\varepsilon} = -[\bar{\rho} v_i^r]_{,i} \quad (11.68)$$

gdzie $\frac{D^s}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i^s \frac{\partial}{\partial x_i}$ jest pochodną materialną.

Równanie ciągłości przepływu płynu przez szkielet ośrodka gruntowego wyraża się wzorem:

$$\int_S \bar{\rho} v_i^s n_i dS + \int_S \bar{\rho} v_i^r n_i dS + \int_\Omega \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} d\Omega = 0 \quad (11.69)$$

po uwzględnieniu twierdzenia Gaussa Ostrogradzkiego możemy powyższe równanie zapisać w postaci związku lokalnego:

$$\frac{D^s \bar{\rho}}{Dt} + \bar{\rho}(\dot{\theta} - \dot{\varepsilon}) = -v_i^r [\bar{\rho}]_{,i} \quad (11.70)$$

Wielkości $\dot{\theta}$ i $\dot{\varepsilon}$ oznaczają prędkość zmian dylatacji cieczy i szkieletu gruntowego.

11.5.3 Równania zachowania pędu

Równania ruchu fazy stałej ośrodka mają postać:

$$\int_S \sigma_{ij} n_j dS + \int_\Omega b v_i^r d\Omega + \int_\Omega (\rho - \bar{\rho}) X_i d\Omega = \int_\Omega (\rho_{11} \dot{v}_i^s + \rho_{12} \dot{v}_i^r) d\Omega \quad (11.71)$$

gdzie b oznacza współczynnik oporów lepkich filtracji, a $\rho_{11} + \rho_{12} = \rho_1 > 0$, $\rho_{12} < 0$. Związek lokalny określający równanie ruchu laminarnego szkieletu gruntowego dla przypadku zagadnień quasi - statycznych sprowadza się do postaci:

$$\sigma_{ij,j} + X_i(\rho - \bar{\rho}) = -b v_i^r \quad (11.72)$$

Równania ruchu fazy płynnej w przypadku ruchu laminarnego wyrażają się wzorem:

$$\int_S \sigma n_i dS - \int_\Omega b v_i^r d\Omega + \int_\Omega X_i \rho d\Omega = \int_\Omega (\rho_{12} \dot{v}_i^s + \rho_{22} \dot{v}_i^r) d\Omega \quad (11.73)$$

gdzie $\rho_{12} + \rho_{22} = \rho_2 > 0$. Związek lokalny określający równanie ruchu laminarnego płynu dla przypadku zagadnień quasi - statycznych sprowadza się do postaci:

$$\sigma_{,i} + X_i \bar{\rho} = b v_i^r \quad (11.74)$$

11.5.4 Równania konstytutywne w zakresie porosprężystości ośrodka dwufazowego.

Związki konstytutywne ciała Biota dla procesów izotermicznych mają postać:

$$\begin{cases} \sigma_{ij}^e = 2N \varepsilon_{ij}^e + M \varepsilon^e \delta_{ij} + \frac{Q}{R} \sigma \delta_{ij} \\ \sigma = Q \varepsilon^e + R Q \end{cases} \quad (11.75)$$

gdzie N jest modułem odkształcenia postaciowego szkieletu, A - modułem odkształcenia objętościowego szkieletu, Q - współczynnikiem wpływu odkształcenia objętościowego cieczy

na naprężenie w szkielecie lub odwrotnie współczynnikiem wpływu odkształcenia objętościowego szkieletu na naprężenie w cieczy, R - modułem odkształcenia objętościowego cieczy wypełniającej pory ciała Biota.

Parametr M wyraża się poprzez:

$$M = A - \frac{Q^2}{R}$$

11.5.5 Równania konstytutywne ciała sprężysto - lepko - plastycznego.

Ażeby zbudować model sprężysto - lepko - plastyczny ośrodka dwufazowego należy:

- określić związki konstytutywne w zakresie sprężystości, co dla ośrodka w pełni nasyconego cieczą newtonowska reprezentować będą zależności (11.75),
- zdefiniować warunek lepko plastyczności, będący funkcją skalarną stanu naprężenia $f(\sigma_{ij})$,
- zdefiniować prawo płynięcia, to znaczy określić związek między prędkością odkształceń plastycznych $\dot{\epsilon}_{ij}^p$, a stanem naprężenia i lepkością.

Najczęściej stosowane w mechanice gruntów warunki plastyczności to uogólniony warunek Misesa-Schleichera reprezentowany w przestrzeni naprężeń głównych jako stożek kołowy z osią pokrywającą się z prostą $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ oraz warunek Coulomba. W niniejszej pracy przyjmiemy do budowy modelu związek Misesa- Schleichera w postaci:

$$f = (J_2)^{\frac{m}{2}} + \frac{\alpha}{3} J_1 - k_T; \quad \alpha > 0, \quad k_T > 0, \quad (11.76)$$

gdzie J_1 i J_2 są niezmiennikami stanu naprężenia, a α i k są stałymi materiałowymi.

Kinematyczne prawo płynięcia lepko plastycznego przyjmuje znana postać:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \begin{cases} \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} : f \geq 0, & \dot{f} \geq 0 \\ 0 : & f \leq 0, \quad \dot{f} \leq 0 \end{cases} \quad (11.77)$$

przy czym zgodnie z założeniem Perzyny [Perzyna] współczynnik $\dot{\lambda}$ wyraża się wzorem:

$$\dot{\lambda} = \frac{\langle g[f(\sigma_{ij})] \rangle}{\nu} \quad (11.78)$$

gdzie średnia wartość funkcji $\langle g[f(\sigma_{ij})] \rangle = \frac{f(\sigma_{ij}) - \text{abs}(f(\sigma_{ij}))}{2}$ oraz ν określa lepkość

szkieletu ośrodka dwufazowego.

Dla ciała sprężysto lepko plastycznego odkształcenia całkowite ośrodka spełniają równanie:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = c_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} + \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (11.79)$$

Wyznaczając związki odwrotne dostaniemy prędkość zmiany naprężenia dla izotropowego ciała lepko plastycznego z uwzględnieniem ciśnień porowych cieczy:

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2N \left(\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right) + M \left(\epsilon - \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kk}} \right) \delta_{ij} + \frac{Q}{R} \dot{\sigma} \delta_{ij} \quad (11.80)$$

2.5 Zbiorczy układ równań procesu odkształceń sprężysto lepkoplastycznych ciała dwufazowego.

Oznaczając przez u_i przemieszczenia w zakresie sprężystości u_{ci} przemieszczenia całkowite sprężysto lepkoplastyczne oraz v_{ci} prędkości przemieszczeń sprężysto lepkoplastycznych zbiorczy układ równań determinujący proces odkształceń w czasie ośrodka, którego pory wypełnia ściśliwa ciecz newtonowska ma postać:

1. 3 równania w zakresie sprężystości:

$$N\nabla^2 u_i + (M + N)u_{j,j} - \gamma\delta_{i3} = -\frac{H}{R}\sigma_{,i} \quad (11.81)$$

2. 1 równanie przepływu filtracyjnego cieczy:

$$C\nabla^2 \sigma = \frac{\dot{\sigma}}{R} - \frac{H\dot{\epsilon}_{j,j}}{R} \quad (11.82)$$

3. 3 równania w zakresie lepkości:

$$\dot{\sigma}_{ij,j} = \gamma \frac{\partial v_{ci}}{\partial t} \quad (11.83)$$

gdzie $C = \frac{k}{\gamma_w n^2}$, k oznacza współczynnik Darcy'ego, γ_w ciężar właściwy cieczy, n

porowatość ośrodka, γ to ciężar właściwy szkieletu, $H=Q+R$.

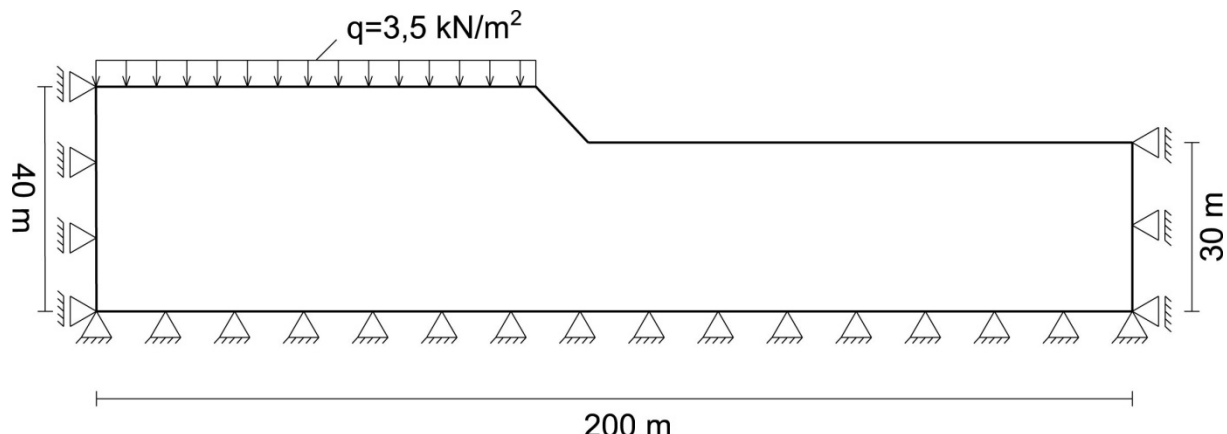
Przyjęcie do obliczeń kryterium Misesa Schleichera wymaga określenia stałych dla tego kryterium. Wiążąc α i k dla $m=1$ z kątem tarcia wewnętrznego φ i spójnością c_T otrzymujemy:

$$c_T = \frac{k_T}{(12\alpha^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}, \quad \sin \varphi = \frac{3}{(3\alpha^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \quad (11.84)$$

Powyższy układ 7 równań jest sprzężony przez tensor naprężeń sprężystych oraz funkcję naprężeń porowych σ .

11.5.6 Rozwiązanie prostego zagadnienia brzegowego odkształceń sprężysto lepkoplastycznych.

Poniżej przedstawimy proces odkształceń skarpy obciążonej przyłożonym w chwili $t=0$ ciężarem równomiernie rozłożonym o wielkości $3.5 \text{ kN} / \text{m}^2$. Zakładamy, że grunt dla którego dokonamy testowego modelowania odkształceń sprężysto lepkoplastycznych poddany został działaniu ciężaru własnego i przyłożonego obciążenia. Geometrię rozpatrywanego zagadnienia przyjęto jak na rys. 11.7.



Rys. 11.7 Schemat geometrii i obciążenia skarpy

Parametry fizyczne i mechaniczne testowego gruntu zamieszczono w tabeli 11.1 i 11.2.

Tabela 11.1

Parametry mechaniczne gruntu

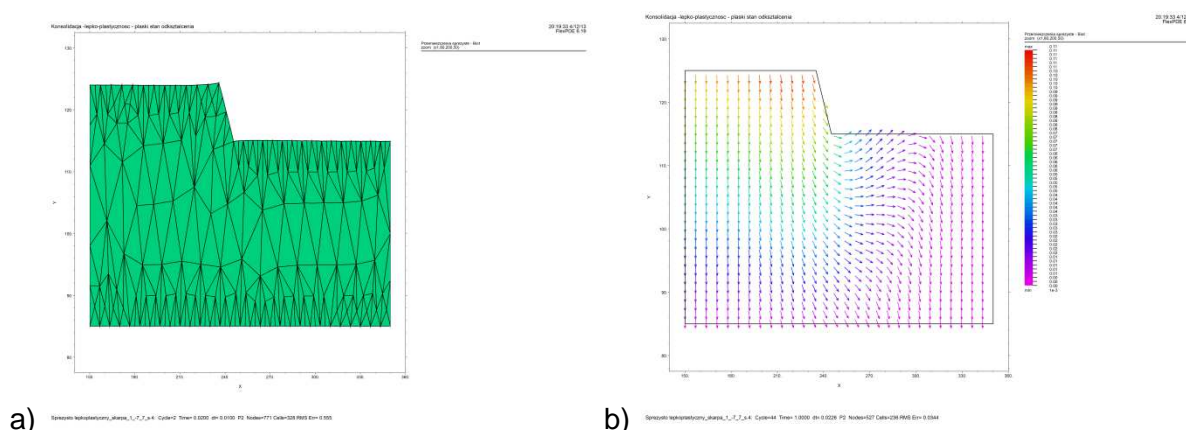
N	A	R	H	φ	c_T
kN / m^2	kN / m^2	kN / m^2	kN / m^2	stopnie	kN / m^2
$5.5 \cdot 10^5$	$2.2 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^6$	$2.5 \cdot 10^6$	35	$5 \cdot 10^4$

Tabela 11.22

Pozostałe parametry efektywne modelu

k	n	γ	γ_w	ν
m / s	-	N / m^3	N / m^3	$Pa \cdot s$
10^{-7}	0.25	$2.2 \cdot 10^4$	10^4	$10^6 \rightarrow 10^9$

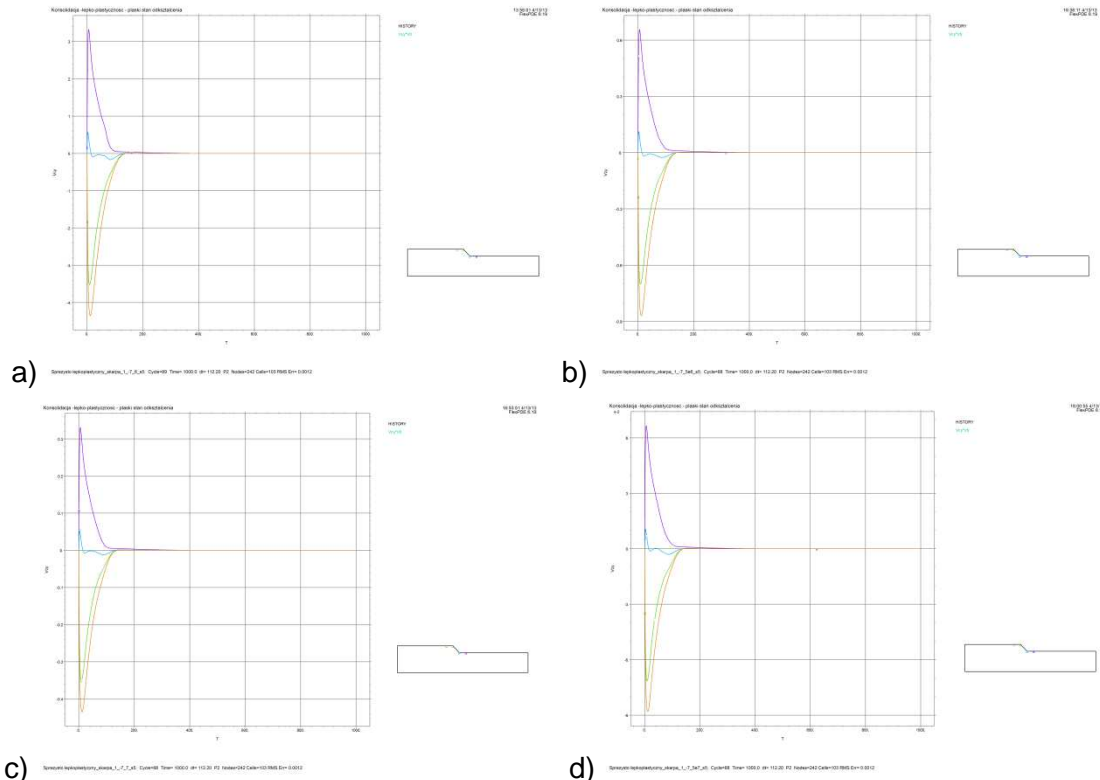
Proces deformacji wykazał w poszczególnych procesach symulacji komputerowej silny wpływ wzajemnej relacji współczynnika filtracji i lepkości szkieletu ośrodka. W zakresie odkształceń sprężystych proces po stosunkowo krótkim czasie stabilizował się i dla różnych wartości lepkości uzyskiwaliśmy identyczny kształt ośrodka po deformacji. Na rys. 2 przedstawiono obraz zdeformowanego ośrodka i pole wektorowe przemieszczeń sprężystych.



Rys. 11.8 Odkształcenia sprężyste: a) kształt zdeformowanego ośrodka w zakresie odkształceń sprężystych, b) pole wektorowe przemieszczeń sprężystych

Inaczej wygląda kształt odkształceń lepkoplastycznych. Proces odkształceń lepkoplastycznych zależy jest od stosunku przyjętej do obliczeń lepkości szkieletu do współczynnika filtracji płynu przez ośrodek porowaty. Przyjmując do obliczeń $k = 10^{-7} m / s$ wykonano obliczenia dla lepkości kinetycznej szkieletu

$\nu = 10^6, 5 \cdot 10^6, 10^7, 5 \cdot 10^7, 10^8, 5 \cdot 10^8, 10^9, 5 \cdot 10^9 [Pa \cdot s]$. Dla wielkości lepkości od $10^6 Pa \cdot s$ do $5 \cdot 10^7$ ośrodek ulega po stosunkowo krótkim czasie dużym odkształceniom plastycznym. Różnice dla poszczególnych wartości lepkości najlepiej obrazuje wykres prędkości odkształceń lepko plastycznych dla wybranych 4 punktów na brzegu obszaru. Poniżej na rys. 3 przedstawiono wykres prędkości przemieszczeń dla przyjętej wartości lepkości szkieletu.



Rys. 11.9 Wykresy prędkości przemieszczeń dla czterech wybranych punktów brzegu a) dla lepkości szkieletu $\nu = 10^6 Pa \cdot s$, b) dla lepkości szkieletu $\nu = 5 \cdot 10^6 Pa \cdot s$, c) dla lepkości szkieletu $\nu = 10^7 Pa \cdot s$, d) dla lepkości szkieletu $\nu = 5 \cdot 10^7 Pa \cdot s$

Uzyskane wyniki zakresu prędkości przemieszczeń i przemieszczeń dla wybranych czterech punktów wraz z podaniem czasu występowania maksymalnej prędkości odkształceń i czasu po którym ustaje przyrost przemieszczeń przedstawiono w tabeli 11.3.

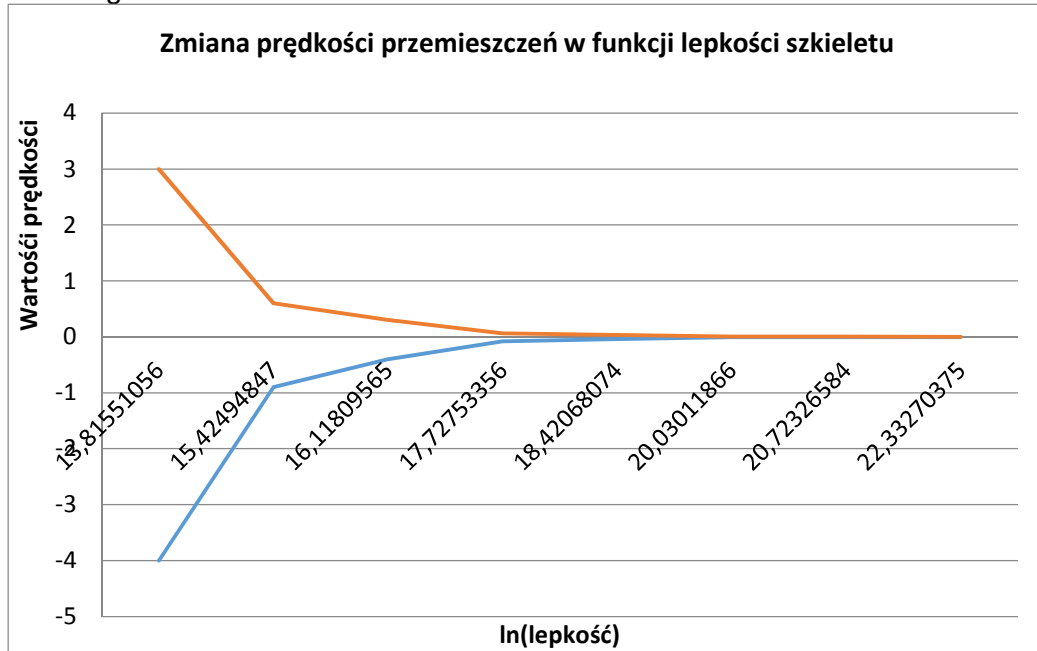
Tabela 11.3

Wybrane wyniki obliczeń dla czterech wybranych punktów obszaru

Lepkość Szkieletu ν	Przedział prędkości odkształceń	Przedział maksymalnych przemieszczeń	Moment max. prędkości odkształcenia	Czas zakończenia odkształceń
$Pa \cdot s$	m / s	m	s	s
10^6	[-4.0, 3.0]	[-240, 125]	7.5	250
$5 \cdot 10^6$	[-0.9, 0.6]	[-45, 25]	10	350
10^7	[-0.4, 0.3]	[-21, 17]	15	380
$5 \cdot 10^7$	$[-8 \cdot 10^{-2}, 6 \cdot 10^{-2}]$	[-4.5, 3.6]	20	400
10^8	$[-4.2 \cdot 10^{-2}, 3.2 \cdot 10^{-2}]$	[-2.25, 1.25]	20	400
$5 \cdot 10^8$	$[-8 \cdot 10^{-3}, 4 \cdot 10^{-3}]$	[-0.58, 0.26]	20	560

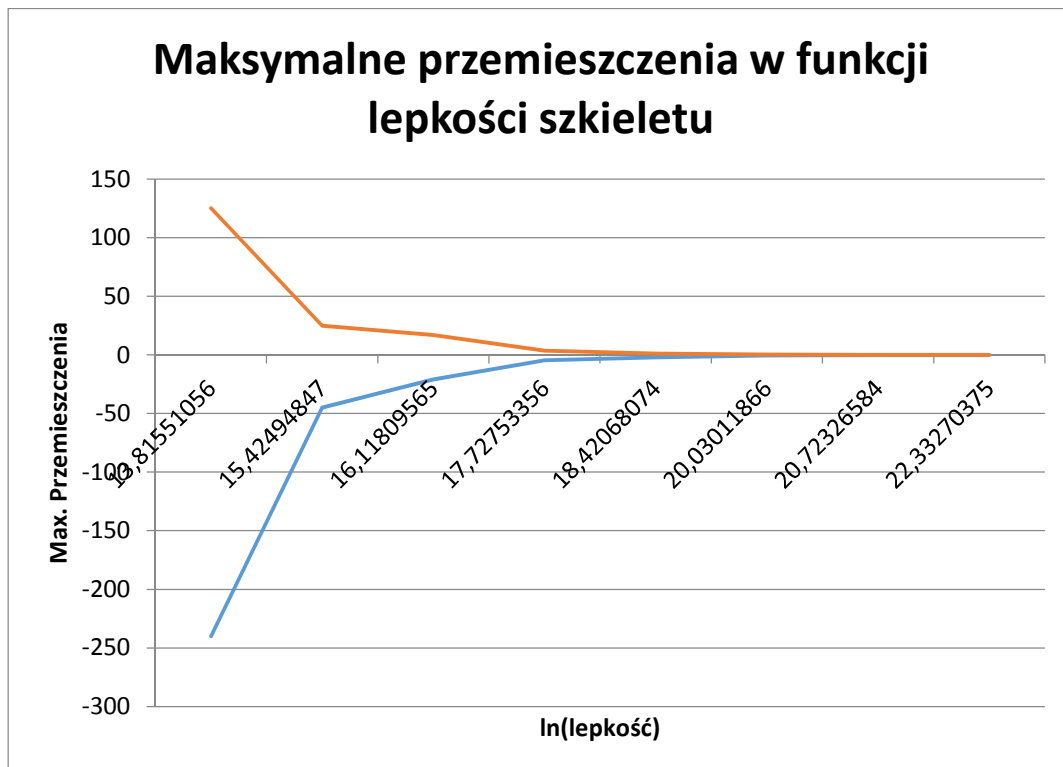
10^9	$[-5 \cdot 10^{-3}, 3 \cdot 10^{-3}]$	$[-0.34, -0.13]$	20	450
$5 \cdot 10^9$	$[-4.5 \cdot 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-4}]$	$[-0.17, 0.02]$	20	400

Powyżej przedstawione dla 8 wartości lepkości szkieletu przedstawiono poniżej wykres zmienności zakresu prędkości przemieszczeń lepko plastycznych dla 4 wybranych punktów na brzegu obszaru.



Rys. 11.10 Wykresy maksymalnych prędkości przemieszczeń lepko plastycznych dla wybranych czterech punktów obszaru w funkcji $\ln(v)$

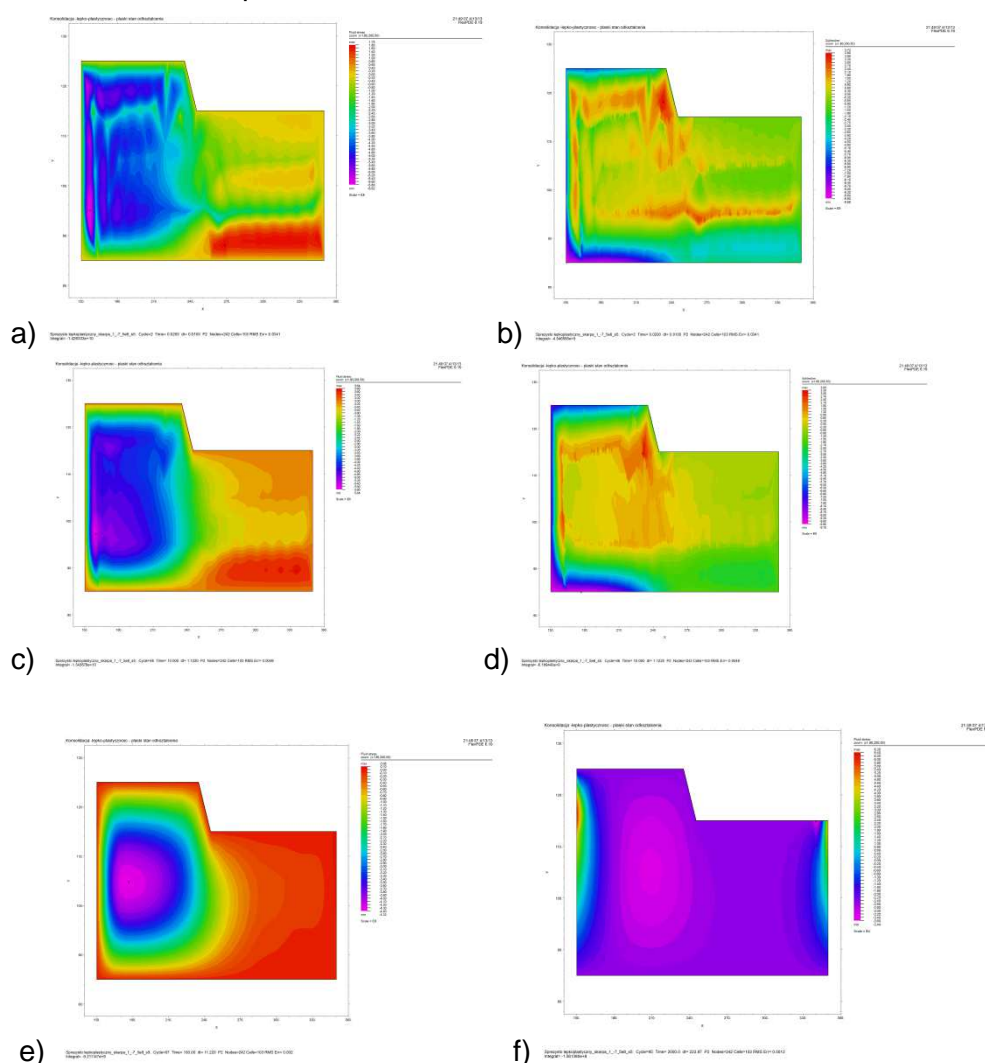
Na rys. 5 przedstawiono wykres zakresu przemieszczeń lepko plastycznych w funkcji lepkości kinetycznej szkieletu ośrodka porowatego.



Rys. 11.11 Wykresy maksymalnych przemieszczeń lepko plastycznych dla wybranych czterech punktów obszaru w funkcji $\ln(\nu)$

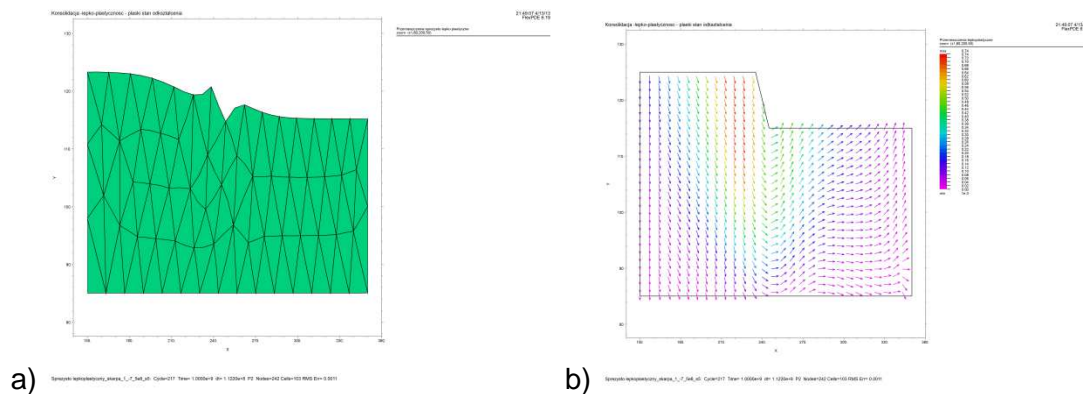
Przedstawione wykresy pokazują, że dla dowolnej wielkości lepkości szkieletu zarówno prędkości maksymalne przemieszczeń jak i same przemieszczenia są zawsze ograniczone, ponieważ istnieje w rozwiązaniach ich wartość ekstremalna. Różnica polega na tym, że przy wzroście wielkości współczynnika lepkości prędkości odkształceń i przemieszczenia dążą do wielkości uzyskiwanych w obliczeniach w zakresie sprężystości. Zakres przyjętych wartości lepkości odpowiada przypadkowi gdy współczynnik filtracji jest rzędu $10^{-7} m/s$. Dla wartości większych współczynnika filtracji przedstawione powyżej zależności też występują, chociaż zakres rzędu wielkości lepkości szkieletu jest inny.

Interesującym zjawiskiem obserwowanym w procesie odkształceń sprężysto lepko plastycznych jest podobieństwo wykresów modułu plastyczności Misesa Scheichera i ciśnień porowych w ośrodku dwufazowym dla wszystkich wartości lepkości szkieletu. Poniżej na rys.11.12 przedstawiono dla porównania wykres ciśnień porowych i potencjału Misesa Schleichera dla lepkości szkieletu $\nu = 10^8 Pa * s$.



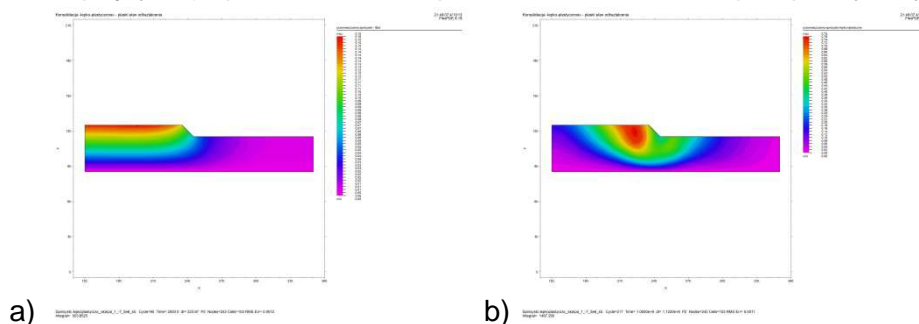
Rys. 11.12 Wykresy ciśnień porowych i potencjału Misesa Schleichera dla trzech momentów czasowych a) i b) dla czasu $t=0.02 s$, dla c) i d) dla czasu $t=10s$, dla e) i f) dla czasu $2000s$.

Maksymalne odkształcenie dla lepkości $\nu = 10^8 Pa * s$ przedstawiono na rys. 11.13.



Rys. 11.13 Obraz odkształconego ośrodka dwufazowego po zakończeniu procesu deformacji dla $\nu = 10^8 Pa \cdot s$: a) zdeformowana siatka elementów skończonych, b) pole wektorowe przemieszczeń lekko plastycznych.

Dla lepszego zobrazowania przemieszczeń sprężystych i lekko plastycznych przedstawiono na rys. 11.14 wykres przemieszczeń całkowitych po zakończeniu procesu konsolidacji (odkształcenia sprężyste) i po zakończeniu procesu odkształceń lekko plastycznych.



Rys. 11.14 Wykres przemieszczeń całkowitych po zakończeniu procesu konsolidacji i po zakończeniu odkształceń lekko plastycznych.

Jak widać na rys. 8 w procesie płynięcia lekko plastycznego powstają charakterystycznego dla tego typu przemieszczeń linie poślizgu. Uzyskane wyniki i kształt ośrodka odkształconego odpowiadają rzeczywistemu kształtowi osuwiska.

Przedstawiony model sprężysto lekko plastyczny porowatego ośrodka dwufazowego, którego pory są wypełnione ściśliwą lepką cieczą może znaleźć zastosowanie w mechanice gruntów i skał, gdyż dobrze odwzorowuje wpływ ciśnienia porowego na proces odkształceń lekko plastycznych. Wykonane testowe obliczenia pozwalają wysnuć następujące wnioski:

- Proces odkształceń ośrodka ma dla przyjętego zakresu parametrów ośrodka zawsze ograniczony zakres. Inaczej mówiąc przemieszczenia ośrodka są ograniczone, a prędkości przemieszczeń po określonym czasie dążą do zera.
- Potencjał plastyczności jest w istotny sposób zależny od wielkości ciśnień porowych, a ich prędkość zmiany jest zależna od współczynnika filtracji.
- wielkość maksymalnych przemieszczeń lekko plastycznych zależy od relacji współczynnika lepkości szkieletu i lepkości cieczy przepływającej przez pory ośrodka.

Precyzyjne określenie parametrów porowatego ośrodka sprężysto lekko plastycznego wymaga opracowania technologii określania parametrów wytrzymałościowych gruntu zaproponowanego modelu. Przedstawiony przez nas model opiera się na jednakże na jednym kryterium wytrzymałościowym Misesa Schleichera i założeniu Perzyny w odniesieniu do ciała lekko plastycznego. Jednakże już ta pierwsza próba pokazuje istotny wpływ fazy płynnej ośrodka porowatego na proces odkształceń plastycznych.

11.7 Literatura

- AURIAULT J.L., SANCHEZ - PALENCIA E. (1977)
Etude de comportement macroscopique d'un milieu poreux sature deformable,
Journal de Mecanique, 16(4), 575-603,
- AURIAULT J.L., STRZELECKI T., BAUER J. HE.S, (1990)
Porous deformable media by a very compressible Fluid, *Eur. J. Mech. a/Solid*, 9,4, s.
373-392
- AURIAULT J.L., (1991)
Dynamic behaviour of porous media, *Transport Processes in Porous Media*, Kluver
Academic Publishers, 471-519,
- BARTLEWSKA - URBAN M., STRZELECKI T. (2008)
One-dimensional consolidation of the porous medium with the rheological Kelvin-
Voigt skeleton, *Studia Geotechnica et Mechanica*. vol. 30, nr 1/2, s. 115-122,
- BIOT M.A. (1941)
General theory of three-dimensional consolidation, *J. Appl. Phys.* No 12 s. 155,
- BIOT M.A. (1956)
General Solutions of the Equations of Elasticity and Consolidation of a Porous
Material, *J. Appl. Mech.*, 23.
- BIOT M.A. WILLIS D.G. (1957)
The Elastic Coefficients of the Theory of Consolidations, *J. Appl. Mech.*, 24,
- BENSOUSSAN A., LIONS J.L., PAPANICOLAU G.: (1978)
Asymptotic analysis for periodic structures, North Holland Publishing Company,
Amsterdam.
- BISHOP A.W. (1959)
The principle of effective stress, *Norw. Geot. Inst.*, publ. 32,
- BISHOP A.W. AILPAN J., BLIGHT G., DONALD V. (1960)
Factors, controlling the strength of partly saturated soils., *Colorado Conf.*, str. 503
- BISHOP A.W. (1961)
The measurement of pore pressure in the triaxial test. *Pore pressure Conf.*, London,
Butherworths, str. 52-59
- BJERRUM L., SIMONS N.E. (1960)
Comparison of shear strength characteristics of normally consolidated clays,
Colorado Cond.,
- COULOMB I.C.A. (1773)
Essai sur application des regles de maximis et minimis a quelques problemes de
statique relative a l'architecture, *Memoires de Mathematique et de Physique de
l'Academie Royal des Sciences*, vol. 7 Paris,
- COULSON J. M., RICHARDSON J. F., BACKHURST J. R., HARKKER J. H. (1991)
Chemical Engineering. 2: Particle Technology and Separation Processes, Pergamon
Press.
- COUSSY O. (1995)
Mechanics of Porous Continua, John Wiley & Sons,
- COUSSY O. (2011)
Mechanics and physics of porous solids, John Wiley & Sons
- DERSKI W., (1964)
A method of solving of the system of equations of consolidation theory, *Bull. Acad.
Polon. de Sci., Ser. techn.* No.10
- HANSEN J.B., GIBSON R.E. (1949)

- Undrained shear strength of anisotropically consolidated clays, *Geotechnique*, V, Nr 3
str 189-199
- HVORSLEV M. (1937)
Über die Festigkeitseigenschaften gestörtet bindiger Böden. *Ingenieursvidenskabelige
Skrifter*, A.45, Kobenhavn
- ISTOMINA W.S. (1957)
Filtracjonnaja ustojczivost gruntov., Moskwa
- IZBICKI R.J., MRÓZ Z. (1976)
Metody nośności granicznej w mechanice gruntów i skał, Warszawa PWN,
- JAEGER J.C., COOK N.G.W. (1969)
Fundamentals of Rock Mechanics, London: Methuen.
- KISIEL I., DMITRUK S., LYSIK B. (1969)
Zarys reologii gruntów. Nosność i stateczność gruntów. Wydawnictwo Arkady.
Warszawa.
- KISIEL I., DERSKI W., IZBICKI R.J., MRÓZ Z. (1982)
Mechanika skał i gruntów., Seria Mechanika Techniczna, tom VII, PWN, Warszawa
- KÖTTER F. (1888)
Über das Problem des Erddruckbestimmung., *Dtsch. Phys.. Ges.*, Berlin H.7str. 1-20
Równania stanu granicznego w ośrodkach rozdrobnionych, *Zesz. Nauk. Polit. Wrocław*
nr 205, Matematyka II, Wrocław
- LYSIK B. (1968)
Matematyczna teoria sprężystości, (rozdział w pracy zbiorowej „Metody geometryczne
w fizyce i technice”), WNT,
- LYSIK B. (1969)
Solution of limit state equations of granular media, “Zastosowania Matematyki”,
- ŁYDŻBA D. (2002)
Zastosowanie metody asymptotycznej homogenizacji w mechanice gruntów i skał,
(Rozprawa habilitacyjna), Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej.
- MRÓZ Z., DRESCHER A. (1972)
Podstawy teorii plastyczności ośrodków rozdrobnionych, Wrocław, Ossolineum,
- SAWCZUK A., IZBICKI R.I. (1984)
Podstawy Mechaniki Ośrodków Plastycznych, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej,
Wrocław
- SAWICKI A. (1994)
Mechanika Kontinuum, Wydawnictwo IBW PAN, Gdańsk
- SKEMPTON A.W. (1961)
Effective stress in soils, concrete and rocks., *Pore Pressure Conf.*, London,
Butterworths, str 72-82
- SOKOŁOWSKI W.W. (1958)
Statyka ośrodków sypkich. PWN, Warszawa, (tłum. z rosyjskiego)
- STILGER-SZYDŁO E. (2005)
Posadowienie budowli infrastruktury transportu lądowego, DWE, Wrocław,
- STROGONOV A.S. (1958)
Palne plastik deformation of sols, *Brussels Conf.*,
- STROGONOV A.S. (1961)
Plastyczne zagadnienia mechaniki gruntów (j. Ros.), *Mat. V ICOSOMEF*, Moskwa
- STROGONOV A.S. (1965)
Płaskie zagadnienie plastycznych deformacji gruntów, (j. Ros.) *Inż. J. An ZSRR*, Nr 5,
- STROGONOV A.S. (1967)
Niektóre problemy plastyczności gruntów, Ossolineum, Wrocław – Warszawa -
Kraków,
- STRZELECKI T. (red.) , AURIAULT J.L., BAUER J., KOSTECKI S., PUŁA W. (1996)
Mechanika ośrodków niejednorodnych, Teoria homogenizacji. Wydawnictwo DWE
Wrocław,
- STRZELECKI T., KOSTECKI S., ŻAK S. (2008)

Modelowanie przepływów przez ośrodki porowate, Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne.

SZEFER G., (1980)

Non linear problems of consolidation theory. Mat. III konferencji Francusko Polskiej, 22-24 kwietnia 1980

WIŁUN Z. STARZEWSKI K. (1972)

Soil Mechanics i Foundation Engineering. Vol. I and II London, Intertext Books, 1972

WIŁUN Z. (2000)

Zarys Geotechniki, WKiŁ, Warszawa 2000

Programy komputerowe

Flex PDE 6, (2009),

Ver. 6, www.pdesolution.com., PDE Solutions Inc.