MODELE TERMOPOROSPRĘŻYSTOŚCI OŚRODKA DWUFAZOWEGO

Anna Uciechowska-Grakowicz

W warunkach nieizotermicznych na stan naprężenia i odkształcenia w ośrodku porowatym, oprócz czynników mechanicznych, wpływ ma również pole temperatury. Zmiany temperatury mogą mieć istotny wpływ na budowle betonowe [Gawin i in. 2002, 2012, Pesavento i in, 2018], budowle hydrotechniczne, np. elektrownie wodne, a w szczególności ich awarie [Łydżba, Sobótka, 2014], zbiorniki odpadów poflotacyjnych [Bartlewska-Urban, Strzelecki, 2015], lub w zagadnieniach związanych ze składowaniem odpadów radioaktywnych czy działalnością górniczą [Strzelecki, Uciechowska, 2014].

Biot w jednej z prac dotyczącej termosprężystości [1956] zauważył analogię między związkami konstytutywnymi uwzględniającymi obecność płynu w porach ośrodka, a związkami uwzględniającymi zmiany temperatury. Porównanie związków konstytutywnych i stałych materiałowych dla obu procesów przedstawił Norris [1992]. Zimmermann [2009] przedstawił również analogię między równaniami równowagi oraz równaniami przepływu płynu i przepływu ciepła. Sam termin „porosprężystość" powstał przez analogię do termosprężystości. W przypadku zagadnień nieizotermicznych dla ośrodków porowatych w publikacjach anglojęzycznych używany jest często termin „thermoporoelasticity", który analogicznie można przetłumaczyć jako „termoporosprężystość".

Analityczne rozwiązanie zadania termokonsolidacji znaleźć można np. w pracach Gaszyńskiego dotyczących równomiernie obciążonej warstwy gruntu [2007], oraz wciskanego w półprzestrzeń kołowego sztywnego stempla obciążonego siłą [2008], rozwiązania te wskazują na duży wpływ właściwości termicznych ośrodka na osiadanie początkowe fundamentu w obszarze kontaktu. Oparta na modelu Coussy'ego [1995] praca Suareza-Arrigi [2010] dotycząca pompowania wody z warstwy wodonośnej, wykazuje po 10 latach 5-krotnie wyższe wartości przemieszczeń w przypadku wody geotermalnej niż w przypadku wody zimnej. Model termokonsolidacji ośrodka lepko-porosprężystego przedstawiony przez Strzeleckiego [2006], został wykorzystany również dla utworzenia modelu uwzględniającego lepkość szkieletu ośrodka, przez Bartlewską-Urban i Strzeleckiego [2012], zaimplementowany do obliczeń wpływu cyklicznych zmian temperatury na obiekty inżynierskie [Bartlewska-Urban i Strzelecki 2014, Bartlewska-Urban i in., 2016]. W przypadku ośrodków sprężystych zależności między temperaturą, odkształceniem i naprężeniem opisują związki Duhamela-Neumanna. Sposób wyprowadzenia tych związków przedstawił w swojej monografii Nowacki [1975]. Wychodząc z pierwszej zasady termodynamiki oraz spełniając nierówność Clausiusa-Duhema otrzymuje się związki opisujące zależność naprężenia i entropii od odkształcenia i zmian temperatury:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \beta_{ij}\vartheta, \tag{8.1}$$

gdzie ϑ to zmiana temperatury, a β_{ij} to stała materiałowa zależna od współczynnika rozszerzalności cieplnej: $\beta_{ij} = c_{ijkl}\alpha_{kl}$.

W przypadku ośrodków porosprężystych, związki konstytutywne wyprowadzić można w analogiczny sposób, zmiana energii wewnętrznej ośrodka zależna jest również od zmiany objętości płynu, jak to przedstawiono wcześniej dla przypadku izotermicznego. Autorów, którzy przedstawiali związki dla ośrodków porosprężystych odpowiadające związkom Duhamela-Neumanna [m. in. McTigue 1986,

Charlez 1991, Coussy 1995, Strzelecki i in. 2008] różnią przyjęte założenia oraz użyte funkcje stanu, stąd w pracach z zakresu termoporosprężystości można spotkać się z różnymi interpretacjami stałych materiałowych. Równania ciągłości przepływu i równania zachowania pędu są w zagadnieniach termoporosprężystości takie same jak w klasycznym modelu porosprężystości. Modele przewodzenia ciepła w ośrodku dwufazowym dzielą się na dwie kategorie: LTE (local thermal equilibrium) – w których obie fazy w równowadze termicznej (z punktu widzenia przewodzenia ciepła ośrodek taki traktowany jest jak jednofazowy) i NLTE (non local thermal equilibrium) – w których obie fazy nie są w równowadze termicznej [Su i Davidson, 2015]. W niniejszym rozdziale przedstawione zostaną oba podejścia wraz z przykładami numerycznymi.

8.1. Termokonsolidacja ośrodków porowatych zbudowanych ze sprężystego szkieletu i cieczy

8.1.1. Przypadek I - przepływ ciepła przez ośrodek w stanie lokalnej równowagi termicznej

Na podstawie prac Nowackiego [1975] oraz Strzeleckiego i in [2008], dotyczących ośrodków sprężystych oraz porosprężystych, korzystając z praw termodynamiki opisujących procesy nieodwracalne można wyprowadzić związki konstytutywne dla ośrodka porosprężystego w warunkach izotermicznych oraz nieizotermicznych, przy założeniu że ciepło przewodzone jest przez obie fazy jednocześnie, lub przewodzone jest przez każdą z faz osobno. Związki zakładające jednakową temperaturę obu faz ośrodka oraz metodyka ich wyprowadzenia przedstawione zostały w rozdziale 7.

Pierwszą postać związków konstytutywnych dla ośrodka porosprężystego w warunkach nieizotermicznych można otrzymać przyjmując jako funkcję stanu energię swobodną Helmholtza χ, a jako parametry stanu odkształcenie ośrodka, odkształcenie płynu oraz temperaturę $\chi = \chi\left(\varepsilon_{ij}, \theta, T\right)$ [Strzelecki 2006]. Różniczka energii swobodnej ma postać $d\chi = \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial \chi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \chi}{\partial T} dT$.

Postępując w sposób analogiczny do podanego wcześniej dla przypadku izotermicznego, oraz do podanego przez Nowackiego [1975] dla ośrodków termosprężystych, jej zmianę w jednostce objętości w czasie można zapisać w postaci:

$$\dot{\chi} = \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \chi}{\partial T} \dot{T}. \tag{8.2}$$

Korzystając z równania (7.139) można napisać:

$$\left(\sigma_{ij} - \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon_{ij}}\right) \dot{\varepsilon}_{ij} + \left(\sigma - \frac{\partial \chi}{\partial \theta}\right) \dot{\theta} + \left(-s - \frac{\partial \chi}{\partial T}\right) \dot{T} = 0, \tag{8.3}$$

Skąd można uzyskać zależności:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \sigma = \frac{\partial \chi}{\partial \theta}, \quad -s = \frac{\partial \chi}{\partial T}. \tag{8.4}$$

Rozwinięcie w szereg Taylora energii swobodnej jako funkcji odkształceń szkieletu i płynu, oraz temperatury ma postać:

$$\begin{aligned}\chi\left(\varepsilon_{ij},\theta,T\right)&=\chi\left(0,0,T_0\right)+\frac{\partial\chi\left(0,0,T_0\right)}{\partial\varepsilon_{ij}}\varepsilon_{ij}+\frac{\partial\chi\left(0,0,T_0\right)}{\partial\theta}\theta+\frac{\partial\chi\left(0,0,T_0\right)}{\partial T}T+\\&+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\chi\left(0,0,T_0\right)}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}+\frac{\partial^2\chi\left(0,0,T_0\right)}{\partial\theta^2}\theta^2+\frac{\partial^2\chi\left(0,0,T_0\right)}{\partial\left(T\right)^2}T^2+\right.\\&\left.+2\frac{\partial^2\chi\left(0,0,T_0\right)}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\theta}\varepsilon_{ij}\theta+2\frac{\partial^2\chi\left(0,0,T_0\right)}{\partial\varepsilon_{ij}\partial T}\varepsilon_{ij}T+2\frac{\partial^2\chi\left(0,0,T_0\right)}{\partial T\partial\theta}T\,\theta\right)+\ldots\end{aligned}\tag{8.5}$$

gdzie T_0 to temperatura stanu naturalnego, w którym nie występują naprężenia i odkształcenia. Dla takiego stanu można napisać:

$$\begin{aligned}&\chi\left(0,0,T_0\right)=0,\\&\sigma_{ij}\left(0,0,T_0\right)=0,\\&\sigma\left(0,0,T_0\right)=\sigma_a,\\&s\left(0,0,T_0\right)=0.\end{aligned}\tag{8.6}$$

Po zastosowaniu podstawień:

$$\begin{aligned}c_{ijkl}&=\frac{\partial^2\chi\left(0,0,T_0\right)}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}},\\\beta_{ij}&=\frac{\partial^2\chi\left(0,0,T_0\right)}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\theta},\\\gamma&=\frac{\partial^2\chi\left(0,0,T_0\right)}{\partial\theta\partial\theta},\\\xi&=\frac{\partial^2\chi\left(0,0,T_0,\right)}{\partial T\partial T},\\\eta_{ij}&=\frac{\partial^2\chi\left(0,0,T_0\right)}{\partial\varepsilon_{ij}\partial T},\\\omega&=\frac{\partial^2\chi\left(0,0,T_0\right)}{\partial\theta\partial T},\end{aligned}\tag{8.7}$$

rozwinięcie z dokładnością do małych wartości drugiego rzędu ma postać:

$$\chi\left(\varepsilon_{ij},\theta,T\right)=\sigma_a\theta+\frac{1}{2}(c_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}+\beta_{ij}\varepsilon_{ij}\theta+\eta_{ij}\varepsilon_{ij}\left(T-T_0\right)+\gamma\theta^2+\omega\theta\left(T-T_0\right)+\xi\left(T-T_0\right)^2),$$

skąd, korzystając z zależności (8.4) uzyskać można związki konstytutywne w postaci:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= c_{ijk}\varepsilon_{kl} + \left(\beta\theta + \eta\vartheta\right)\delta_{ij}, \\ \sigma &= \sigma_a + \beta\varepsilon_{ij} + \gamma\theta + \omega\vartheta, \\ -s &= \eta\varepsilon + \omega\theta + \xi\vartheta, \end{aligned} \tag{8.8}$$

gdzie $\vartheta = T - T_0$. Przy użyciu oznaczeń takich, jak dla przypadku izotermicznego, otrzymuje się postać odpowiadającą tej zaproponowanej przez Biota i Willisa [1957], poszerzoną dodatkowo o wpływ temperatury:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2N\,\varepsilon_{ij} + \left(A\varepsilon + Q\theta + \eta\vartheta\right)\delta_{ij}, \\ \sigma &= Q\varepsilon + R\theta + \omega\vartheta, \\ -s &= \eta\varepsilon + \omega\theta + \xi\vartheta. \end{aligned} \tag{8.9}$$

Współczynniki η i ω można uzyskać zakładając, że odkształcenia objętościowe spowodowane są jedynie przez temperaturę ($\sigma_{ij} = \sigma = 0$, $\varepsilon = 3\alpha_T^s\vartheta$, $\theta = \alpha_T^l\vartheta$), gdzie α_t^s i α_T^l to odpowiednio współczynniki rozszerzalności cieplnej szkieletu (liniowy) i płynu (objętościowy).

$$\begin{aligned} \eta &= -\left(3K\alpha_t^s + Q\alpha_T^l\right), \\ \omega &= -\left(3Q\alpha_T^s + R\alpha_T^l\right) \end{aligned} \tag{8.10}$$

8.1.2. Przypadek II - przepływ przez każdą z faz oddzielnie

W przypadku transportu przez ośrodek porowaty, płyn przepływa tylko przez przestrzeń porową – stąd wartość prędkości filtracji płynu (wydatku na jednostkę powierzchni) jest iloczynem wartości prędkości rzeczywistej oraz porowatości. Nieco inaczej sprawa się ma w przypadku przewodzenia ciepła – przepływa ono przez obie fazy w różnym tempie, co więcej, następuje wymiana ciepła między fazami. Poniżej przedstawione zostaną równania konstytutywne dla ośrodka nie będącego w stanie lokalnej równowagi termicznej, wyprowadzone podobnie, jak dla ośrodka będącego w lokalnej równowadze, przy założeniu że obie fazy mogą mieć w danym momencie różną temperaturę: jako T^s oznaczana będzie temperatura szkieletu, natomiast T^l temperatura cieczy [Uciechowska-Grakowicz i Strzelecki, 2017]. W związku z różnymi temperaturami prędkość zmian entropii będzie również różna dla obu faz:

- prędkość zamiany entropii szkieletu:

$$\dot{s}_1 = -\frac{q_{i,i}^s}{T^s}, \tag{8.11}$$

- prędkość zmian entropii płynu:

$$\dot{s}_2 = -\frac{q_{i,i}^l}{T^l}, \tag{8.12}$$

gdzie q_i^s to składowe strumienia ciepła przepływającego przez szkielet, a q_i^l to składowe strumienia ciepła przepływającego przez płyn. Używając tych oznaczeń, zmianę energii wewnętrznej ośrodka można zapisać za pomocą wzoru:

$$\dot{w} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + \sigma\dot{\theta} - q_{i,i}^s - q_{i,i}^l. \tag{8.13}$$

Energię swobodną Helmholtza przy założeniu różnych temperatur obu faz można wyrazić wzorem:

$$F = W - S_1 T^s - S_2 T^l \ , \tag{8.14}$$

a prędkość jej zmian w układzie lokalnym:

$$\dot{\chi} = \dot{w} - s_1\dot{T}^s - \dot{s}_1 T^s - s_2\dot{T}^l - \dot{s}_2 T^l. \tag{8.15}$$

Stąd można uzyskać wyrażenie:

$$\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + \sigma\dot{\theta} - s_1\dot{T}^s - s_2\dot{T}^l - \dot{\chi} = 0. \tag{8.16}$$

Zakładając, że energia swobodna jest funkcją odkształceń obu faz oraz ich temperatur bezwzględnych: $\chi = \chi\left(\varepsilon_{ij}, \theta, T^s, T^l\right)$, można zapisać jej różniczkę w postaci:

$$d\chi = \frac{\partial\chi}{\partial\varepsilon_{ij}}\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial\chi}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\chi}{\partial T^s}\dot{T}^s + \frac{\partial\chi}{\partial T^l}\dot{T}^l \ , \tag{8.17}$$

która pozwala nam napisać powyższe wyrażenie:

$$\left(\sigma_{ij} - \frac{\partial\chi}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)\dot{\varepsilon}_{ij} + \left(\sigma - \frac{\partial\chi}{\partial\theta}\right)\dot{\theta} + \left(-s_1 - \frac{\partial\chi}{\partial T^s}\right)\dot{T}^s + \left(-s_2 - \frac{\partial\chi}{\partial T^l}\right)\dot{T}^l = 0, \tag{8.18}$$

skąd można uzyskać następujące zależności:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial\chi}{\partial\varepsilon_{ij}}, \quad \sigma = \frac{\partial\chi}{\partial\theta}, \quad -s_1 = \frac{\partial\chi}{\partial T^s}, \quad -s_2 = \frac{\partial\chi}{\partial T^l}. \tag{8.19}$$

Funkcję lokalną energii swobodnej można rozwinąć w szereg Maclaurina, przy czym temperatura każdej z faz jest tu sumą temperatury początkowej oraz temperatury względnej:

$$\begin{aligned} T^s &= T_0 + \vartheta^s, \\ T^l &= T_0 + \vartheta^l. \end{aligned} \tag{8.20}$$

Wprowadzając dodatkowe oznaczenia wynikające ze zmiany temperatur w obu fazach ośrodka:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2\chi\left(0,0,T_0^s,T_0^l\right)}{\partial\varepsilon_{ij}\partial T^l}=\eta_{ij}^l,\quad \frac{\partial^2\chi\left(0,0,T_0^s,T_0^l\right)}{\partial\theta\partial T^s}=\omega^s,\quad \frac{\partial^2\chi\left(0,0,T_0^s,T_0^l\right)}{\partial\theta\partial T^l}=\omega^l,\\
\frac{\partial^2\chi\left(0,0,T_0^s,T_0^l\right)}{\partial\varepsilon_{ij}\partial T^l}=\eta_{ij}^l,\quad \frac{\partial^2\chi\left(0,0,T_0^s,T_0^l\right)}{\partial\theta\partial T^s}=\omega^s,\quad \frac{\partial^2\chi\left(0,0,T_0^s,T_0^l\right)}{\partial\theta\partial T^l}=\omega^l,\\
\frac{\partial^2\chi\left(0,0,T_0^s,T_0^l\right)}{\partial\left(T^s\right)^2}=\xi^s,\quad \frac{\partial^2\chi\left(0,0,T_0^s,T_0^l\right)}{\partial\left(T^l\right)^2}=\xi^l,\quad \frac{\partial^2\chi\left(0,0,T_0^s,T_0^l\right)}{\partial\varepsilon_{ij}\partial T^s}=\eta_{ij}^s,\\
\frac{\partial^2\chi\left(0,0,T_0^s,T_0^l\right)}{\partial T^l\partial T^s}=\xi^{ls},
\end{gathered}\tag{8.21}$$

funkcję energii swobodnej z dokładnością do małych drugiego rzędu można przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned}
&2\chi\left(\varepsilon_{ij},\theta,T^s,T^l\right)=2\sigma_a\theta+c_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}+\gamma\theta^2+\xi^s\left(T^s\right)^2+\xi^l\left(T^l\right)^2\\
&+2\beta_{ij}\varepsilon_{ij}\theta+2\eta_{ij}^s\varepsilon_{ij}T^s+2\eta_{ij}^l\varepsilon_{ij}T^l+2\omega^s\theta T^s+2\omega^l\theta^l+\xi^{ls}T^sT^l.
\end{aligned}\tag{8.22}$$

Stąd, wykorzystując zależności (8.19) uzyskać można związki konstytutywne i równania entropii w obydwu fazach ośrodka dwufazowego w postaci:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}&=c_{ijkl}\varepsilon_{kl}+\beta_{ij}\theta+\eta_{ij}^s\vartheta^s+\eta_{ij}^l\vartheta^l,\\
\sigma-\sigma_a&=\beta_{ij}\varepsilon_{ij}+\gamma\theta+\omega^s\vartheta^s+\omega^l\vartheta^l,\\
-s_1&=\eta_{ij}^s\varepsilon_{ij}+\omega^s\theta+\xi^s\vartheta^s+\xi^{ls}\theta^l,\\
-s_2&=\eta_{ij}^l\varepsilon_{ij}+\omega^l\theta+\xi^{ls}\vartheta^l+\xi^l\vartheta^l.
\end{aligned}\tag{8.23}$$

Analogicznie, jak w przypadku ośrodka izotermicznego oraz traktowanego jako jednofazowy ze względu na przewodnictwo cieplne, tensor c_{ijkl} można wyrazić za pomocą stałych Lamégo, natomiast tensor β_{ij} i stałą γ za pomocą stałych Biota:

$$\begin{aligned}
\beta_{ij}&=Q\delta_{ij},\\
\gamma&=R\ .
\end{aligned}\tag{8.24}$$

Zgodnie z założeniem, że ośrodek jest izotropowy, tensory η_{ij}^s i η_{ij}^l można zastąpić stałymi η^s i η^l wyrażonymi wzorami**:**

$$\begin{aligned}
\eta_{ij}^s&=\eta^s\delta_{ij},\\
\eta_{ij}^l&=\eta^l\delta_{ij}\ .
\end{aligned}\tag{8.25}$$

Zatem związki konstytutywne i równania entropii otrzymuje się w postaci:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= 2N\varepsilon_{ij} + \left(A\varepsilon + Q\theta + \eta^s\vartheta^s + \eta^l\vartheta^l\right)\delta_{ij}, \\
\sigma - \sigma_a &= Q\varepsilon + R\theta + \omega^s\vartheta^s + \omega^l\vartheta^l, \\
-s_1 &= \eta^s\varepsilon_{ij} + \omega^s\theta + \xi^s\vartheta^s + \xi^{ls}\vartheta^l, \\
-s_2 &= \eta^l\varepsilon_{ij} + \omega^l\theta + \xi^{ls}\vartheta^l + \xi^l\vartheta^l \ .
\end{aligned} \tag{8.26}$$

Współczynniki η^s i η^l można uzyskać przez zwężenie pierwszego ze związków (8.26):

$$\sigma_{ii} = \left(2N + 3A\right)\varepsilon + 3Q\theta + 3\eta^s\vartheta^s + 3\eta^l\vartheta^l \ . \tag{8.27}$$

Jeśli moduł odkształcenia objętościowego szkieletu oznaczymy jako $K = A + 2/3N$, naprężenia średnie można wyrazić wzorem:

$$\sigma_m = K\varepsilon + Q\theta + \eta^s\vartheta^s + \eta^l\vartheta^l. \tag{8.28}$$

Zakładając, że jedyną przyczyną powodująca odkształcenia szkieletu jest temperatura ϑ^s $(\sigma_m = 0, \vartheta^l = 0, \theta = 0, \varepsilon = 3\alpha_T^s\vartheta^s)$, wtedy:

$$K\varepsilon = -\eta^s\vartheta^s \ . \tag{8.29}$$

Stąd można stwierdzić, że

$$\eta^s = -3K\alpha^s, \tag{8.30}$$

gdzie α^s jest współczynnikiem objętościowej rozszerzalności szkieletu. Jeśli natomiast odkształcenia cieczy spowodowane są wyłącznie zmianą jej temperatury $\theta = \alpha_T^l\vartheta^l$, wtedy

$$Q\theta = -\eta^l\vartheta^l, \tag{8.31}$$

co pozwala na określenie wartości współczynnika η^l:

$$\eta^l = -Q\alpha^l, \tag{8.32}$$

gdzie α^l jest współczynnikiem objętościowej rozszerzalności cieplnej płynu.

W podobny sposób można uzyskać współczynniki ω^s i ω^l dla drugiego ze związków. Jeśli jedyną przyczyną odkształcenia objętościowego cieczy jest zmiana jej temperatury, wtedy:

$$R\theta = -\omega^l \vartheta^l, \tag{8.33}$$

stąd:

$$\omega^l = -R\alpha^l. \tag{8.34}$$

Podobnie w przypadku odkształceń szkieletu, jeśli przyczyną ich odkształceń jest wyłącznie temperatura, wtedy:

$$\omega^s = -3Q\alpha^s. \tag{8.35}$$

Związki konstytutywne dla ośrodka złożonego ze sprężystego szkieletu i cieczy przy założeniu niezależnego przepływu ciepła w obu fazach z wymianą ciepła między fazami można przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2N\varepsilon_{ij} + \left(A\varepsilon + Q\theta - 3K\alpha^s\vartheta^s - Q\alpha^l\vartheta^l\right)\delta_{ij}, \\ \sigma - \sigma_a &= Q\varepsilon + R\theta - 3Q\alpha^s\vartheta^s - R\alpha^l\vartheta^l. \end{aligned} \tag{8.36}$$

8.1.3. Równania przewodnictwa cieplnego dla ośrodka złożonego ze sprężystego szkieletu i cieczy

W przypadku, gdy ośrodek traktowany jest jako ciągły z punktu widzenia przewodnictwa cieplnego (obie fazy są w lokalnej równowadze termicznej), równanie entropii po uwzględnieniu współczynników η i ω ma postać:

$$-s = -\left(3K\alpha_t^s + Q\alpha_T^l\right)\varepsilon + -\left(Q\alpha_T^s + 3R\alpha_T^l\right)\theta + \xi\vartheta, \tag{8.37}$$

Po zróżniczkowaniu po czasie i pomnożeniu przez temperaturę, korzystając z równania przewodzenia ciepła Fouriera otrzymać można równie przewodzenia ciepła w ośrodku porowatym. Współczynnik ξ określić można zakładając stałe odkształcenie płynu i szkieletu $(\dot{\varepsilon} = 0, \dot{\theta} = 0)$:

$$-T\dot{s} = \xi\dot{\vartheta}T, \tag{8.38}$$

oraz korzystając z definicji ciepła właściwego przy stałej objętości, $c_v = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v$:

$$\xi \cong -\frac{\rho c_v}{T_0}, \tag{8.39}$$

gdzie T_0 to temperatura bezwzględna stanu naturalnego. Stąd ostatecznie równanie przewodzenia ciepła można zapisać w postaci:

$$\lambda\nabla^2 T = -\left(3K\alpha_t^s + Q\alpha_T^l\right)\dot{\varepsilon}T - \left(3Q\alpha_T^s + R\alpha_T^l\right)\dot{\theta}T - \frac{\rho c_v}{T_0}\dot{\vartheta}T. \tag{8.40}$$

Podobnie postąpić można w przypadku rozpatrywania przewodzenia ciepła w obu fazach, gdy nie sąone w lokalnej równowadze termicznej. Uwzględniając uzyskane wcześniej współczynniki η^s, η^l, ω^s i ω^l równania entropii mają postać:

$$\begin{aligned} -s_1 &= -3K\alpha^s\varepsilon - 3Q\alpha^s\theta + \xi^s\vartheta^s + \xi^{ls}\vartheta^l, \\ -s_2 &= -Q\alpha^l\varepsilon - R\alpha^l\theta + \xi^{ls}\vartheta^l + \xi^l\vartheta^l. \end{aligned} \tag{8.41}$$

Po zróżniczkowaniu względem czasu i przemnożeniu przez temperaturę bezwzględną T:

$$\begin{aligned} -T\dot{s}_1 &= -3TK\alpha^s\dot{\varepsilon} - 3TQ\alpha^s\dot{\theta} + T\xi^s\dot{\vartheta}^s + T\xi^{ls}\dot{\vartheta}^l, \\ -T\dot{s}_2 &= -TQ\alpha^l\dot{\varepsilon} - TR\alpha^l\dot{\theta} + T\xi^{ls}\dot{\vartheta}^s + T\xi^l\dot{\vartheta}^l. \end{aligned} \tag{8.42}$$

Wielkość $T\frac{ds}{dt}$ jest miarą ilości ciepła wytworzonego w jednostce objętości rozważanego obszaru w procesie zmiany temperatury, gdy odkształcenie ośrodka konsolidującego jest stałe (prędkość dylatacji szkieletu i cieczy jest równa zeru). Wielkość taka określana jest mianem ciepła właściwego odpowiedniego składnika ośrodka przy stałej objętości c_v. Ponieważ η^s, η^l oraz ω^s i ω^l są ujemne, więc $\xi^s < 0$, $\xi^l < 0$ i $\xi^{ls} < 0$, wynoszą one:

$$\xi^s = -\frac{\rho_1 c_v^s}{T_0}, \quad \xi^l = -\frac{\rho_2 c_v^l}{T_0}, \quad \xi^{ls} = -\frac{\rho c_v^{ls}}{T_0}, \tag{8.43}$$

gdzie c_v^s i c_v^l odpowiadają kolejno ciepłu właściwemu szkieletu i płynu przy stałej objętości, oraz c_v^{ls} to ciepło właściwe sprzężenia termicznego faz. Korzystając z prawa przewodnictwa cieplnego Fouriera $q_i = -\lambda_{ij}T_{,j}$, oraz równania wynikającego z definicji entropii $T\dot{S} = -q_{i,i}$, można otrzymać równania przewodzenia ciepłą w ośrodku dwufazowym:

$$\begin{aligned} \lambda^s\nabla^2\vartheta^s &= -3TK\alpha^s\dot{\varepsilon} - 3TQ\alpha^s\dot{\theta} + \frac{T^s}{T_0}\left(\rho_1 c_v^s\dot{\vartheta}^s + \rho c_v^{ls}\dot{\vartheta}^l\right), \\ \lambda^l\nabla^2\vartheta^l &= -TQ\alpha^l\dot{\varepsilon} - TR\alpha^l\dot{\theta} + \frac{T^l}{T_0}\left(\rho c_v^{ls}\dot{\vartheta}^l + \rho_2 c_v^l\dot{\vartheta}^l\right), \end{aligned} \tag{8.44}$$

gdzie λ^s jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego szkieletu ośrodka dwufazowego , natomiast λ^l jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego płynu (z uwzględnieniem powierzchni przez którą przewodzone jest ciepło w danej fazie: $\lambda^s = \lambda_{rz}^s(1-f)$, $\lambda^l = \lambda_{rz}^l f$).

Przy założeniu tej samej temperatury w płynie i szkielecie, sumując oba równania (8.44) otrzymać można równanie, którego postać odpowiada równaniu przewodzenia ciepła modelu ośrodka w lokalnej równowadze termicznej, traktowanego jako ciągły (8.40):

$$\lambda^{eff}\nabla^2 T = -\left(3K\alpha_t^s + Q\alpha_T^l\right)\dot{\varepsilon}T - \left(3Q\alpha_T^s + R\alpha_T^l\right)\dot{\theta}T - \frac{(\rho c_v)^{eff}}{T_0}\dot{\vartheta}T, \tag{8.45}$$

gdzie $\lambda^{eff} = \lambda^s + \lambda^l$ to efektywny współczynnik przewodzenia ciepła a $(\rho c_v)^{eff} = (\rho_1 c_v^s + \rho c_v^{ls}) + (\rho_2 c_v^l + \rho c_v^{sl})$, to efektywne ciepło właściwe gruntu.

Współczynniki przewodzenia ciepła odniesione są tu do powierzchni zajmowanej przez ośrodek, zatem efektywny współczynnik przewodzenia ciepła jest w tym przypadku arytmetyczną średnią ważoną, co odpowiada efektywnemu współczynnikowi ciepła ośrodka uwarstwionego, w którym warstwy ułożone są równolegle do kierunku przewodzenia ciepła. W przypadku ośrodków porowatych układ taki traktować można jako górną wartość graniczna [Farouki, 1981]. Jako granicę dolną traktować można jest średnią harmoniczną, odpowiadającą przypadkowi, gdy warstwy ułożone są prostopadle do kierunku przepływu ciepła. Farouki [1981] oraz Nield i Bejan [2006] proponują dla zbliżonych wartości współczynników przewodzenia ciepła obu faz szacowanie współczynnika efektywnego przy użyciu ważonej średniej geometrycznej. Różne formuły uśredniające współczynnika przewodzenia ciepła zostały również zaproponowane m.in. przez Smitha [1942], Mickleya [1951], Gemanta [1952], czy Kerstena [1949] i Johansena [1975]. Kunii i Smith [1960] zaproponowali zamodelowanie gruntu za pomocą sfer otoczonych płynem lub matrycą. Podobny sposób określenia wartości granicznych efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła dla gruntu proponuje Coussy [2004]:

$$\lambda_{sph}^{s\subset f} \le \lambda^{eff} \le \lambda_{sph}^{f\subset s}.$$

Przy założeniu, że ośrodek porowaty składa się z wypełnionych płynem sfer w szkielecie, efektywny współczynnik przewodzenia ciepła wynosi:

$$\lambda_{sph}^{f\subset s} = \lambda_s \frac{2 + \dfrac{\lambda_f}{\lambda_s} - 2n\left(1 - \dfrac{\lambda_f}{\lambda_s}\right)}{2 + \dfrac{\lambda_f}{\lambda_s} + n\left(1 - \dfrac{\lambda_f}{\lambda_s}\right)},$$

natomiast w sytuacji odwrotnej:

$$\lambda_{sph}^{s\subset f} = \lambda_s \frac{2\dfrac{\lambda_f}{\lambda_s} + 1 + 2(1-n)\left(1 - \dfrac{\lambda_f}{\lambda_s}\right)}{2\dfrac{\lambda_f}{\lambda_s} + 1 - (1-n)\left(1 - \dfrac{\lambda_f}{\lambda_s}\right)}.$$

W praktyce określenie efektywnych współczynników przewodzenia ciepła dla każdej fazy i ich uśrednienia jest zagadnieniem skomplikowanym m.in. ze względu na ukształtowanie porów, dyspersje oraz transfer ciepła między fazami [Hsu, 2005]. Przy dobrej znajomości mikrostruktury, na

dokładniejsze oszacowanie efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła mogą pozwolić metody teorii homogenizacji. Prosty przykład dla materiału porowatego wypełnionego płynem przedstawili Auriault i in. [2009].

8.1.4. Układ równań termokonsolidacji ośrodków porowatych zbudowanych ze sprężystego szkieletu i cieczy

Model termokonsolidacji ośrodka porowatego zawiera 23 niewiadome:

- 3 przemieszczenia u_i,
- 3 składowe prędkości filtracji v_i,
- 6 składowych tensora odkształcenia ε_{ij},
- 6 składowych tensora naprężenia σ_{ij},
- naprężenie porowe σ,
- odkształcenie objętościowe szkieletu ε,
- odkształcenie objętościowe płynu θ,
- temperatura płynu,
- temperatura szkieletu,

Układ równań termokonsolidacji ośrodka dwufazowego składa się zatem z 23 równań dla 23 niewiadomych dla przypadku niezależnego przepływu ciepła przez obie fazy:

- związki geometryczne (6 związków dla odkształceń postaciowych i objętościowych oraz dylatacja):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right), \qquad \varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}, \tag{8.46}$$

- związki fizyczne (6 związków dla szkieletu i jeden dla płynu):

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2N\varepsilon_{ij} + \left(A\varepsilon + Q\theta - 3K\alpha^s\vartheta^s - Q\alpha^l\vartheta^l\right)\delta_{ij}, \\ \sigma - \sigma_a &= Q\varepsilon + R\theta - 3Q\alpha^s\vartheta^s - R\alpha^l\vartheta^l \end{aligned} \tag{8.47}$$

- równanie równowagi wewnętrznej dla przypadku quasi-statycznego (3 równania):

$$(\sigma_{ij} + \sigma\delta_{ij})_{,j} + X_i\rho = 0, \tag{8.48}$$

- równanie ruchu cieczy:

$$k\,\sigma_{,ii} = \left(\dot{\theta} - \dot{\varepsilon}\right), \tag{8.49}$$

- równania opisujące prędkość cieczy (3 równania)

$$v_i^r = -kH_{,i} \tag{8.50}$$

- równania przewodnictwa ciepła :

$$\begin{aligned} \lambda^s \nabla^2 \vartheta^s &= -3TK\alpha^s \dot{\varepsilon} - 3TQ\alpha^s \dot{\theta} + \frac{T^s}{T_0}\left(\rho_1 c_v^s \dot{\vartheta}^s + \rho c_v^{ls} \dot{\vartheta}^l\right), \\ \lambda^l \nabla^2 \vartheta^l &= -TQ\alpha^l \dot{\varepsilon} - TR\alpha^l \dot{\theta} + \frac{T^l}{T_0}\left(\rho c_v^{ls} \dot{\vartheta}^l + \rho_2 c_v^l \dot{\vartheta}^l\right), \end{aligned} \tag{8.51}$$

Wśród wymienionych niewiadomych, niezależnych jest tylko 6 z 23. Układ ten sprowadza się do 6 równań z 6 niewiadomymi: $U_1, U_2, U_3, \sigma, T^s, T^l$:

- 3 równań równowagi wewnętrznej (8.48),
- 1 równania ruchu cieczy (8.49),
- 2 równań przewodnictwa ciepła (8.51),

W przypadku założenia ośrodka w lokalnej równowadze termicznej (jednofazowego z punktu widzenia przewodnictwa cieplnego), układ sprowadza się do 5 równań z 5 niewiadomymi U_1, U_2, U_3, σ, T , gdzie równania (8.51) zastąpione są przez równanie przewodzenia ciepła dla ośrodka, a w równaniach (8.47) temperatura szkieletu równa jest temperaturze płynu. Przyjęcie takiego założenia charakteryzuje się pewną niekonsekwencją, bowiem model Biota był budowany od początku dla ośrodka dwufazowego. W modelach zakładających różne temperatury obu faz ośrodka sprzężenie często uzyskiwane jest również przez wykorzystanie prawa stygnięcia i wprowadzenie współczynnika przewodzenia ciepła między fazami [np. Wakao i in 1979, Bories 1987, Hanyga i Jianfei 2004].

8.2. Termokonsolidacja ośrodków porowatych zbudowanych ze sprężystego szkieletu i gazu

8.2.1. Związki konstytutywne

8.2.1.1. Związki konstytutywne gdy zakładamy, że ciepło rozchodzi się przez ośrodek jednofazowy

Podobnie, jak w przypadku modelu izotermicznego, w przypadku ośrodka wypełnionego gazem, dla oddziaływań mechanicznych zastosować można prawo Boyle'a-Meriotte'a

$$pV = const. \tag{8.52}$$

Skąd można uzyskać funkcję $R = -\dfrac{\sigma_a}{(1+\theta) f}$. Związki konstytutywne będą miały wtedy postać:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2N\,\varepsilon_{ij} + \left(A\varepsilon + Q\theta + \eta\vartheta\right)\delta_{ij}, \\ \sigma &= Q\varepsilon - \frac{\sigma_a}{(1+\theta) f}\theta + \omega\vartheta, \end{aligned} \tag{8.53}$$

ze współczynnikami:

$$\eta = -\left(3K\alpha_t^s + Q\alpha_T^g\right), \tag{8.54}$$

oraz

$$\omega = -\left(3Q\alpha^s + R\alpha^g\right). \tag{8.55}$$

Po uwzględnieniu powyższych relacji oraz wynikającej z prawa Clapeyrona zależności dla oddziaływań termicznych $\alpha^g = 1/T$, współczynniki (8.54) i (8.55) mają postać:

$$\begin{aligned} \eta^{sg} &= -\left(3K\alpha^s + \frac{Q}{T}\right), \\ \omega^{sg} &= -\left(3Q\alpha^s + \frac{\sigma_a}{(1+\theta)fT}\right). \end{aligned} \tag{8.56}$$

Stąd można związki konstytutywne dla procesu nieizotermicznego zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2N\varepsilon_{ij} + \left(A\varepsilon + Q\theta - \left(3K\alpha^s + \frac{Q}{T}\right)\vartheta\right)\delta_{ij}, \\ \sigma &= Q\varepsilon + \frac{\sigma_a}{(1+\theta)f}\theta - \left(3Q\alpha^s + \frac{\sigma_a}{(1+\theta)fT}\right)\vartheta. \end{aligned} \tag{8.57}$$

8.2.1.2. Związki konstytutywne, gdy zakładamy, że przepływ ciepła odbywa się w obu fazach ośrodka niezależnie.

Podobnie, jak w przypadku przepływu cieczy, przepływ ciepła można analizować w każdej z faz z osobna. Podstawowa forma związków konstytutywnych dla gazu jako płynu porowego nie zmienia się i ma postać taką, jak równania (8.36):

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2N\varepsilon_{ij} + \left(A\varepsilon + Q\theta + \eta^s\vartheta^s + \eta^g\vartheta^g\right)\delta_{ij}, \\ \sigma - \sigma_a &= Q\varepsilon + R\theta + \omega^s\vartheta^s + \omega^g\vartheta^g \ . \end{aligned}$$

Współczynniki η^s i ω^s dotyczące szkieletu pozostają bez zmian:

$$\begin{aligned} \eta^s &= -3K\alpha^s, \\ \omega^s &= -3Q\alpha^s. \end{aligned}$$

Współczynniki dotyczące płynu, w przypadku gazu nie są już stałymi materiałowymi, lecz funkcjami. Przy założeniu zmian objętości gazu wskutek wyłącznie zmiany jego temperatury funkcja η^{sg} ma postać:

$$\eta^{sg} = -Q\alpha^{g} = -\frac{Q}{T}, \tag{8.58}$$

podobnie w przypadku drugiego ze związków, funkcję ω^{sg} można zapisać w następującej postaci:

$$\omega^{sg} = -\frac{\sigma_a}{(1+\theta)fT}. \tag{8.59}$$

Zatem związki konstytutywne dla ośrodka złożonego ze sprężystego szkieletu i gazu można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2N\varepsilon_{ij} + \left(A\varepsilon + Q\theta - 3K\alpha^{s}\vartheta^{s} - \frac{Q}{T}\vartheta^{g} \right)\delta_{ij}, \\ \sigma - \sigma_a &= Q\varepsilon + -\frac{\sigma_a}{(1+\theta)f}\theta - 3Q\alpha^{s}\vartheta^{s} - \frac{\sigma_a}{(1+\theta)fT}\vartheta^{g}. \end{aligned} \tag{8.60}$$

8.2.2. Równania przewodnictwa cieplnego

Zmiany wynikające z nieliniowego zachowania gazu mają wpływ również na postać równań przewodzenia ciepła. W przypadku ośrodka traktowanego jako jednofazowy, dla którego równanie przewodnictwa cieplnego ma postać (8.9):

$$\lambda\nabla^{2}T = -\eta\dot{\varepsilon}T - \omega\dot{\theta}T - \xi\dot{\vartheta}T, \tag{8.61}$$

W równaniu tym należy dokonać zmiany współczynników η i ω na funkcje dylatacji płynu i temperatury:

$$\begin{aligned} \eta^{sg} &= -\left(3K\alpha^{s} + \frac{Q}{T} \right), \\ \omega^{sg} &= -\left(3Q\alpha^{s} + \frac{\sigma_a}{(1+\theta)fT} \right). \end{aligned} \tag{8.62}$$

Stąd ostatecznie równanie przewodzenia ciepła ma postać:

$$\lambda\nabla^{2}T = -\left(3K\alpha^{s} + \frac{Q}{T} \right)\dot{\varepsilon}T - \left(3Q\alpha^{s} + \frac{\sigma_a}{(1+\theta)fT} \right)\dot{\theta}T - \frac{\rho c_v}{T_0}\dot{\vartheta}T. \tag{8.63}$$

W miejsce powyższego również można wprowadzić model przepływu ciepła przez każdą z faz ośrodka. Model taki sprowadza się do zapisu przepływu ciepła dwoma równaniami przewodnictwa cieplnego w miejsce równania (8.63):

$$\lambda^s \nabla^2 \vartheta^s = -T^s 3K\alpha^s \dot{\varepsilon} - T^s 3Q\alpha^s \dot{\theta} + \frac{T^s}{T_0}\left(\rho_1 c_v^s \dot{\vartheta}^s + \rho c_v^{ls} \dot{\vartheta}^l\right),$$
$$\lambda^g \nabla^2 \vartheta^g = -Q\dot{\varepsilon} - \frac{\sigma_a}{(1+\theta) f}\dot{\theta} + \frac{T^g}{T_0}\left(\rho c_v^{gs} \dot{\vartheta}^g + \rho_2 c_v^g \dot{\vartheta}^g\right), \tag{8.64}$$

gdzie λ^s jest współczynnikiem przewodnictwa ciepła przez szkielet ośrodka dwufazowego, natomiast λ^g jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego gazu. Podobnie, jak w przypadku ośrodka wypełnionego wodą, zakładając jednakową temperaturę obu faz, po zsumowaniu obu równań (8.64) otrzymać można formę odpowiadającą równaniu (8.63).

8.2.3. Układ równań termoporosprężystości ośrodków porowatych zbudowanych ze sprężystego szkieletu i gazu

W modelu termokonsolidacji ośrodka wypełnionego gazem, podobnie jak w przypadku ośrodka wypełnionego cieczą, występują 23 niewiadome dla przypadku osobnych obliczeń przewodzenia ciepła w szkielecie i płynie:

- 3 składowe przemieszczenia u_i,
- 3 składowe prędkości filtracji v_i,
- 6 składowych tensora odkształcenia ε_{ij},
- 6 składowych tensora naprężenia σ_{ij},
- naprężenie porowe σ,
- odkształcenie objętościowe szkieletu ε,
- odkształcenie objętościowe płynu θ,
- temperatura płynu (dla przypadku założenia równoległego przewodzenia ciepła),
- temperatura szkieletu (dla przypadku założenia równoległego przewodzenia ciepła),

Układ równań proponowanego prze mnie modelu termo-konsolidacji ośrodka dwufazowego składa się z 23 równań w tym:

- związki geometryczne (6 związków dla odkształceń postaciowych i objętościowych oraz dylatacja) (4.67):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right),$$
$$\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33},$$

- związki fizyczne (6 związków dla szkieletu i jeden dla płynu) (8.60):

$$\sigma_{ij} = 2N\varepsilon_{ij} + \left(A\varepsilon + Q\theta - 3K\alpha^s \vartheta^s - \frac{Q}{T}\vartheta^g\right)\delta_{ij},$$
$$\sigma - \sigma_a = Q\varepsilon + -\frac{\sigma_a}{(1+\theta) f}\theta - 3Q\alpha^s \vartheta^s - \frac{\sigma_a}{(1+\theta) fT}\vartheta^g,$$

- równań równowagi wewnętrznej dla przypadku quasi-statycznego (3 równania):

$$(\sigma_{ij} + \sigma\delta_{ij})_{,j} + X_i\rho = 0,$$

- 1 równania ruchu (przepływu) cieczy:

$$k\,\sigma_{,ii} = \left(\dot{\theta} - \dot{\varepsilon}\right)$$

- równań opisujące prędkość cieczy (3 równania):
  - równanie Darcy dla przepływu laminarnego:

$$v_i^r = -kH_{,i},$$

  - lub równanie Forchheimera dla przepływu turbulentnego:

$$v_i^r = K\sqrt{H_{,i}},$$

- równania przewodzenia ciepła (8.64) (2 równania) :

$$\begin{aligned} \lambda^s\nabla^2\vartheta^s &= -T^s K\alpha^s\dot{\varepsilon} - T^s Q\alpha^s\dot{\theta} + \frac{T^s}{T_0}\left(\rho_1 c_v^s\dot{\vartheta}^s + \rho c_v^{gs}\dot{\vartheta}^l\right), \\ \lambda^g\nabla^2\vartheta^g &= -Q\dot{\varepsilon} - \frac{\sigma_a}{(1+\theta)f}\dot{\theta} + \frac{T^g}{T_0}\left(\rho c_v^{gs}\dot{\vartheta}^g + \rho_2 c_v^g\dot{\vartheta}^g\right), \end{aligned} \tag{8.65}$$

W przypadku modelu zakładającego, że przepływ ciepła odbywa się przez ośrodek w stanie lokalnej równowagi termicznej („jednofazowy” z punktu widzenia przewodzenia ciepła), mamy model termo-konsolidacji w którym zamiast układu 2 równań (8.65) występuje pojedyncze równanie (8.63):

$$\lambda\nabla^2 T = -\left(K\alpha^s + \frac{Q}{T}\right)\dot{\varepsilon}T - \left(Q\alpha^s + \frac{\sigma_a}{(1+\theta)fT}\right)\dot{\theta}T - \frac{\rho c_v}{T_0}\dot{\vartheta}T\,. \tag{8.66}$$

Podobnie, jak w przypadku, kiedy fazę płynną reprezentuje ciecz, niezależnych jest w moim modelu termo-konsolidacji układu szkielet - gaz 6 z 23 niewiadomych. Układ ten sprowadza się zatem do 6 równań z 6 niewiadomymi: $U_1, U_2, U_3, \sigma, T^s, T^l$:

- 3 równań równowagi,
- 1 równania ruchu cieczy,
- 2 równań przewodzenia ciepła: (8.65)

W modelach, w których przepływ ciepła odbywa się przez ośrodek jednofazowy niezależnych jest 5 z 22 niewiadomych U_1, U_2, U_3, σ, T , składa się on z 5 równań:

- 3 równań równowagi,
- 1 równania ruchu cieczy,

- 1 równanie przewodnictwa ciepła (8.66)

Model taki pozwala na śledzenie procesu przepływu ciepła przez obie fazy ośrodka i analizę, jak długo trwa proces wyrównywania temperatur w obu fazach, ponieważ uwzględnia wymianę ciepła między fazami. Model opisujący przepływ ciepła przez każdą z faz ośrodka można analizować przy znajomości właściwości każdej z faz oddzielnie: parametry płynu porowego nie nastręczają problemu, parametry szkieletu uzyskać można np. metodami proponowanymi przez Stefaniuka i in [2016]. W równaniach przewodzenia ciepła występuje dodatkowy człon charakteryzujący sprzężenia pola temperatury w fazie stałej z polem temperatury w płynie. Ten dodatkowy człon wyrażony poprzez współczynnik c_v^{gs} w obu równaniach przewodnictwa cieplnego jest analogiczny do sprzężenia energii kinetycznej w klasycznym modelu Biota i wprowadzeniu przez niego nowej gęstości ρ_{12}. Dla fazy gazowej modele konsolidacji nawet w przypadku procesów izotermicznych są nieliniowe, wiec wykorzystanie ich do rozwiazywania konkretnych zagadnień technicznych wymaga dużej ostrożności i uwagi, czy proces całkowania układu równań jest zbieżny.

8.3. Model numeryczny termoporosprężytości

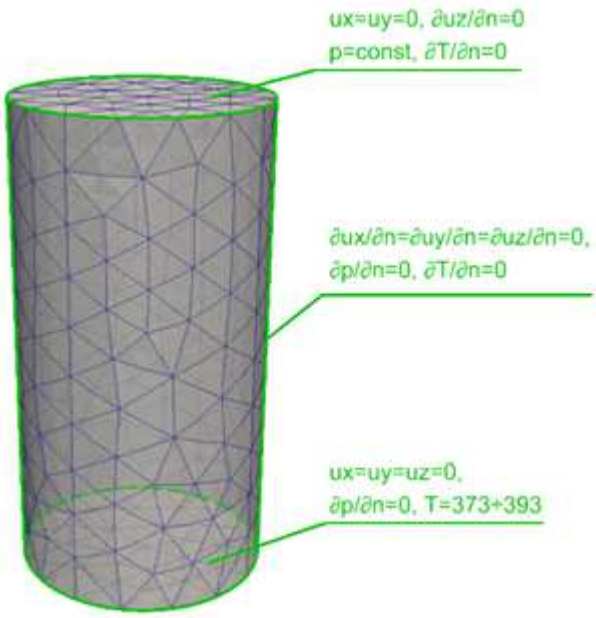
Jako przykład zastosowania powyższego modelu termokonsolidacji przedstawione zostanie rozwiązanie numeryczne układu równań termokonsolidacji metodą elementów skończonych dla walcowej próbki podgrzewanej od dołu [Uciechowska-Grakowicz, 2018]. Do symulacji użyto oprogramowania FlexPDE. Jest to program służący do numerycznego rozwiązywania cząstkowych równań różniczkowych, umożliwiający tworzenie jedno-, dwu- i trójwymiarowych modeli numerycznych. Największą zaletą programu jest możliwość zastosowania dowolnych równań różniczkowych (nie ma równań wbudowanych – są one definiowane przez użytkownika), bez ograniczenia co do ich ilości, co czyni program uniwersalnym - znajduje on zastosowanie w modelowaniu zjawisk z dziedziny mechaniki, chemii, przewodzenia ciepła, elektromagnetyzmu itd. Program posiada interfejs tekstowy dający pełną kontrolę nad modelem (model wprowadza się w postaci skryptu), automatycznie buduje siatkę elementów skończonych, która może być automatycznie modyfikowana w kolejnych krokach czasowych (również kontrolowanych przez program).

Wyniki graficzne w programie FlexPDE są niestety słabej jakości, ponadto wsadowy system pracy sprawia, że w celu uzyskania dodatkowego wykresu (np. dodatkowego przekroju) należy wykres ten zdefiniować i jeszcze raz przeliczyć model, co może być czasochłonne. Wyniki obliczeń, oprócz postaci graficznej, mogą być jednak eksportowane w wielu formatach, co ułatwia postprocessing. W tym przypadku wyniki wyeksportowano do formatów txt oraz vtk i wygenerowano wykresy przy pomocy programu ParaView oraz MS Excel. Program ParaView jest programem Open Source, korzystającym z bibliotek VTK (Visualization Toolkit), służącym do tworzenia wizualizacji i analizy danych, wykorzystywanym w publikacjach naukowych z różnych dziedzin (mechanika, dynamika płynów, astrofizyka, nauka o klimacie itd.).

8.3.1. Założenia dotyczące geometrii obszaru i scenariusza zmian warunków brzegowych

Do obliczeń numerycznych przyjęto walcową próbkę gruntu o wymiarach d=40 mm i H=76mm, obciążoną początkowo jedynie ciężarem własnym, poddaną działaniu temperatury po czasie t=60s od momentu początkowego obliczeń. Próbka znajduje się w osłonie adiabatycznej, od dołu jest podgrzewana o 20°C powyżej temperatury początkowej. Siatkę elementów skończonych oraz warunki

brzegowe przedstawiono na rysunku 8.1. Płynem porowym jest woda (w zależności od zakresu temperatur, występująca w postaci ciekłej lub gazowej) lub powietrze.

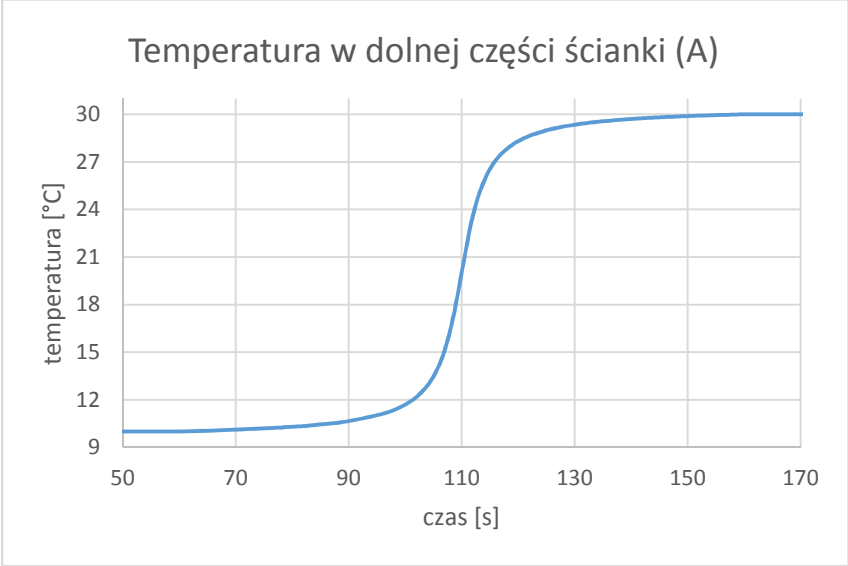


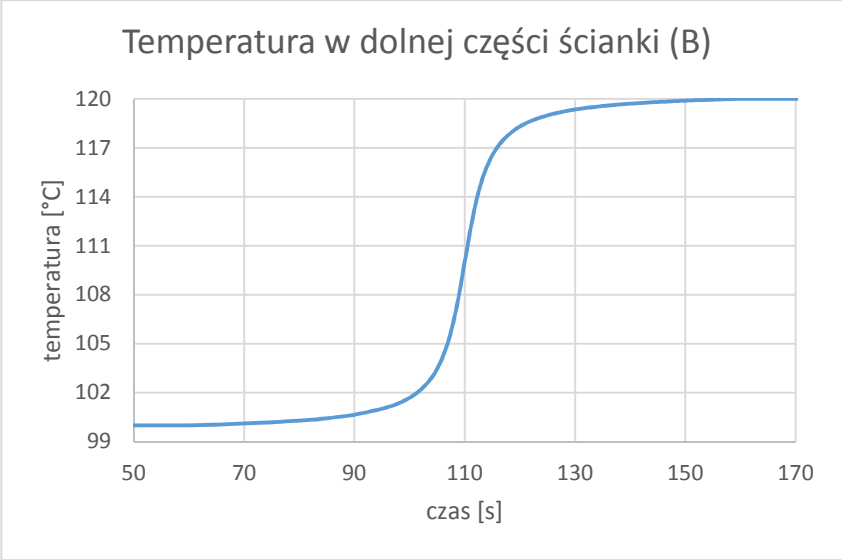
Rysunek 8.1 Wygenerowana przez program FlexPDE siatka elementów skończonych dla czasu t=0 oraz warunki brzegowe modelu

Dla obu płynów porowych przyjęto dwa scenariusze podgrzewania dolnej powierzchni próbki:

a) po 60s od momentu początkowego włączone zostaje źródło ciepła, w którym temperatura wzrasta od 10°C do 30°C w ciągu 100s
b) po 60s od momentu początkowego włączone zostaje źródło ciepła, w którym temperatura wzrasta od 100°C do 120°C w ciągu 100s

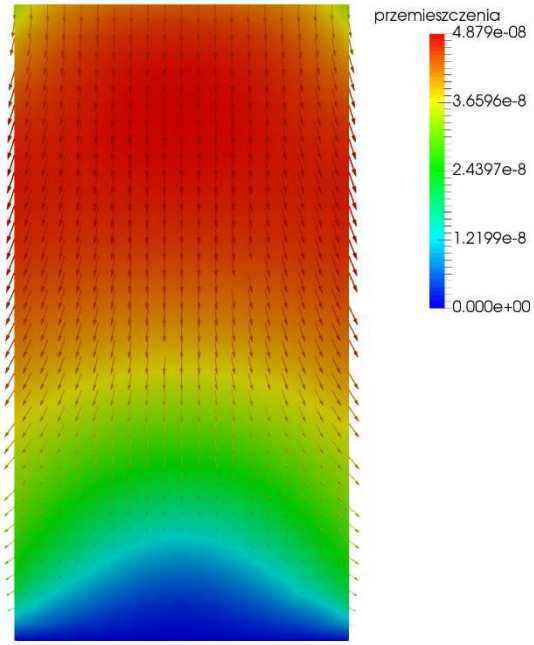
Przebieg temperatury w dolnej ściance próbki przebiega wg funkcji definiowanej w programie FlexPDE jako swage(t-110,0,20/tp0,10), którą dla pierwszego z wymienionych scenariuszy (A) przedstawiono na rys. 8.2. Górna powierzchnia próbki nagrzewa się na skutek przepływu ciepła przez próbkę.





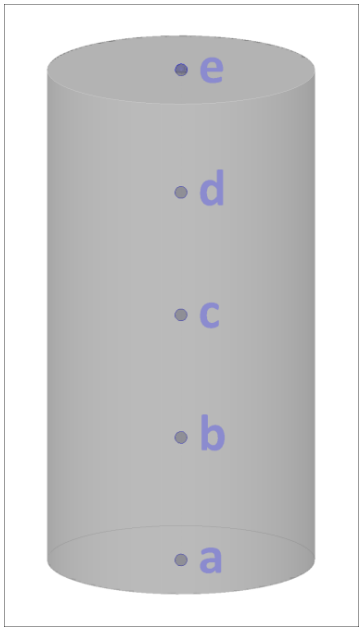
Rysunek 8.2 Warunek brzegowy dla temperatury w dolnej ściance próbki dla obu scenariuszy podgrzewania

Jako warunki początkowe przyjęto temperaturę 10°C dla schematu A lub 100°C dla schematu B, oraz naprężenie w płynie odpowiadające ciśnieniu atmosferycznemu $(\sigma_f = -p_a f)$, początkowe wartości przemieszczeń przyjęto jako wynikające z natychmiastowego osiadania pod wpływem ciężaru własnego (rys 8.3).



Rysunek 8.3. Warunek początkowy dla przemieszczeń (dla modelu zakładającego wodę w porach ośrodka – schemat A)

Wzdłuż osi próbki wybrano 6 punktów odniesienia, w których będzie prowadzona obserwacja zmieniających się obliczanych przez program poszukiwanych wielkości w formie wykresów (rys. 8.4): są to punkty 0,0,0 (środek dolnej ścianki), 0,0,19mm, 0,0,38mm (geometryczny środek próbki), 0,0,57mm, 0,0,76mm (środek górnej ścianki).



Rysunek 8.4 Położenie punktów odniesienia dla których przedstawione zostaną wykresy

Przyjęto następujące parametry ośrodka

- Porowatość: $f = 0.25$,
- Przyjęte parametry mechaniczne ośrodka:
  - moduł sprężystości postaciowej Biota $N = 2.5 \cdot 10^8 Pa$,
  - moduł sprężystości objętościowej dla ośrodka wypełnionego płynem $A = 5 \cdot 10^8 Pa$,
  - współczynnik określający wpływ naprężenia w płynie na zmianę jego objętości $R = 1 \cdot 10^7 Pa$,
  - współczynnik określający wpływ naprężenia w płynie na odkształcenia objętościowe w szkielecie $Q_g = 3 \cdot 10^5 Pa$. , $Q_w = 3 \cdot 10^7 Pa$
- Właściwości cieplne przedstawiono w tabeli nr 8.1.

	rozszerzalność termiczna [1] [1/K]	współczynnik przewodzenia ciepła [W/m/K]	ciepło właściwe [J/kg/K]
woda	$69 \cdot 10^{-6}$	0.6	4150
para wodna	$1/T$	$16.2 \cdot 10^{-3}$ [2]	1970
powietrze	$1/T$	$24.4 \cdot 10^{-3}$ [2]	1005
szkielet	$5 \cdot 10^{-6}$	3	700
ośrodek	-	$\lambda = (1-f)\lambda_s + f\lambda_f$	$c_v = (\rho_1 c_{vs} + \rho_2 c_{vf}) / \rho$

1) Dla płynów podano rozszerzalność objętościową, dla szkieletu liniową
2) Wartość zależna od temperatury, podano wartość początkową (dla 0°C)

- **Współczynnik filtracji**

Współczynnik filtracji zależny jest od lepkości: $(k = K/\mu)$, która zmienia się wraz z temperaturą. Zależność lepkości wody od temperatury opisuje wzór Thorpe-Rodgera:

$$\mu_w = \frac{1.79 \cdot 10^{-3}}{1 + 3.37 \cdot 10^{-2}(T - 273) + 2.2 \cdot 10^{-4}(T - 273)^2} \tag{8.67}$$

W przypadku gazów lepkość opisuje wzór Sutherlanda:

$$\mu_g = \mu_0 \frac{273 + C_s}{T + C_s}\left(\frac{T}{273}\right)^{1.5} \tag{8.68}$$

gdzie μ_0 to lepkość początkowa, a Cs to stała Sutherlanda, dla pary wodnej $\mu_0 = 8.53 \cdot 10^{-6} Pa \cdot s$, $C_s = 673$, dla powietrza $\mu_0 = 17.21 \cdot 10^{-6} \mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s}$ $\mathrm{Cs} = 122$. Przyjęto wyjściową wartość współczynnika filtracji dla wody $k_{10} = 10^{-8} m/s$.

- Przewodnictwo cieplne gazu, podobnie jak lepkość, opisuje wzór Sutherlanda:

$$\lambda = \lambda_0 \frac{273 + C_s}{T + C_s} \left(\frac{T}{273} \right)^{1.5}, \tag{8.69}$$

gdzie λ_0 to początkowy współczynnik przewodzenia ciepła, wartości dla powietrza i pary wodnej podane zostały w tabeli nr 8.1.

- Gęstość

Zarówno w przypadku gazów jak i wody gęstość zamodelowana została jako zależna od temperatury oraz ciśnienia. W przypadku wody gęstość opisuje wzór:

$$\rho_w = \frac{1000 kg/m^3}{\left[1 + \alpha^w \left(T - T_p\right)\right]\left(1 - \beta_w p\right)}, \tag{8.70}$$

natomiast w przypadku gazów gęstość opisuje zależność wynikająca ze wzoru Clapeyrona:

$$\rho_g = \frac{p}{rT}, \tag{8.71}$$

gdzie r to indywidualna stała gazowa dla pary wodnej r=461.5 J/kg/K, oraz dla powietrza r=287.05 J/kg/K.

8.3.2. Porównanie funkcjonowania modeli matematycznych w przypadku gdy płynem porowym jest woda

8.3.2.1. Model ośrodka dwufazowego

Model opisujący termokonsolidację przy założeniu przewodzenia ciepła równolegle obu fazach ośrodka składa się z 6 równań: (8.48), (8.49), (8.51), przepływ ciepła w każdej fazie opisuje osobne równanie. W przypadku cieczy jako płynu porowego układ równań ma następującą postać:

$$(\sigma_{ij} + \sigma\delta_{ij})_{,j} + X_i \rho = 0$$

$$k\sigma_{,ii} = \left(\dot{\theta} - \dot{\varepsilon}\right)$$

$$\lambda^s \nabla^2 \vartheta^s = -TK\alpha^s \dot{\varepsilon} - TQ\alpha^s \dot{\theta} + \frac{T^s}{T_0}\left(\rho_1 c_v^s \dot{\vartheta}^s + \rho c_v^{ls} \dot{\vartheta}^l\right)$$

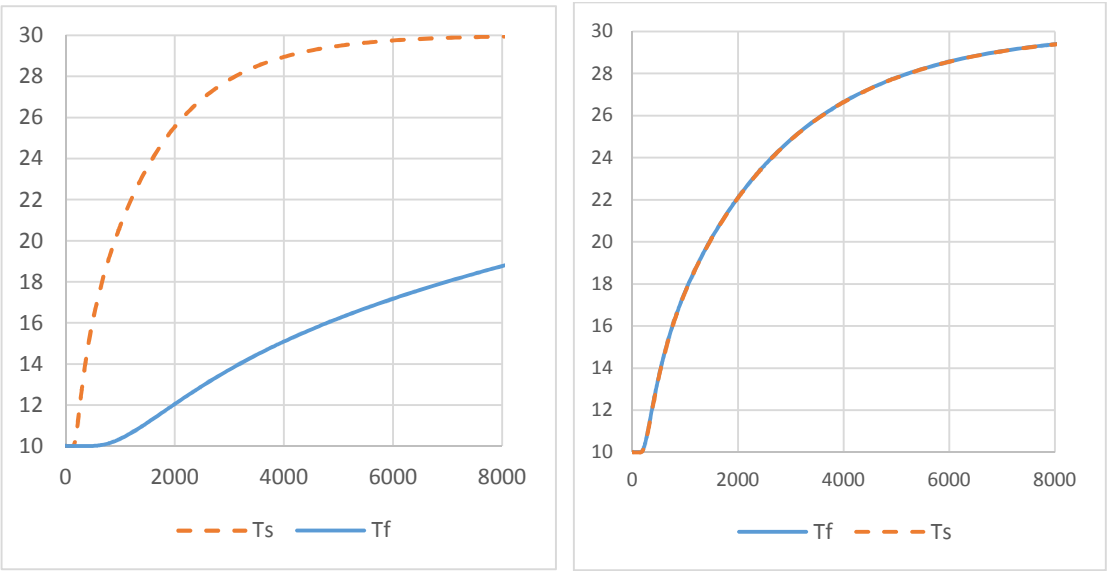
$$\lambda^l \nabla^2 \vartheta^l = -TQ\alpha^l \dot{\varepsilon} - TR\alpha^l \dot{\theta} + \frac{T^l}{T_0}\left(\rho c_v^{ls} \dot{\vartheta}^l + \rho_2 c_v^l \dot{\vartheta}^l\right).$$

W celu obserwacji wpływu na proces przewodzenia ciepła w ośrodku członu określającego termiczne sprzężenie faz ρc_v^{ls} przeprowadzono analizę teoretyczną przyjmującą skrajne założenia wyjściowe i obserwację wyników obliczeń numerycznych.

1. Założenie braku sprzężenia faz: $\rho c_v^{ls} = 0$
2. Założenie pełnego sprzężenia faz, gdzie wartości członu ρc_v^{ls} dobrano tak, żeby przy założeniu stałego odkształcenia współczynniki dyfuzji ciepła odpowiadały współczynnikowi dyfuzji ciepła dla modelu z jednym równaniem przewodzenia ciepła. Przy takim założeniu przy stałym odkształceniu temperatury obu faz są jednakowe $\vartheta^s = \vartheta^l$.

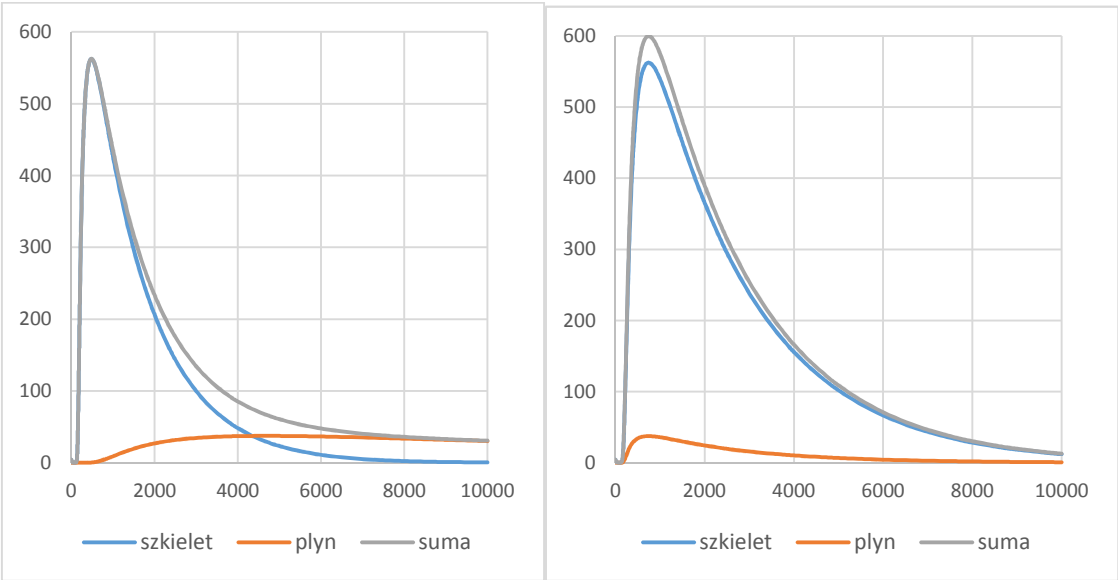
❑ Zmiany termiczne

Przebieg temperatur dla obu przypadków w geometrycznym środku próbki przedstawia rysunek nr. 8.5. W przypadku pełnego sprzężenia faz, temperatury są identyczne w obu fazach, natomiast dla założenia braku sprzężenia faz można zauważyć, że temperatura szybciej wzrasta w szkielecie, niż w płynie, co spowodowane jest faktem, że woda ma niższy współczynnik przewodzenia ciepła oraz wyższe ciepło właściwe, niż szkielet, przez co ogrzewa się wolniej.



Rysunek 8.5 Przebieg temperatur w czasie w obu fazach dla obu modeli

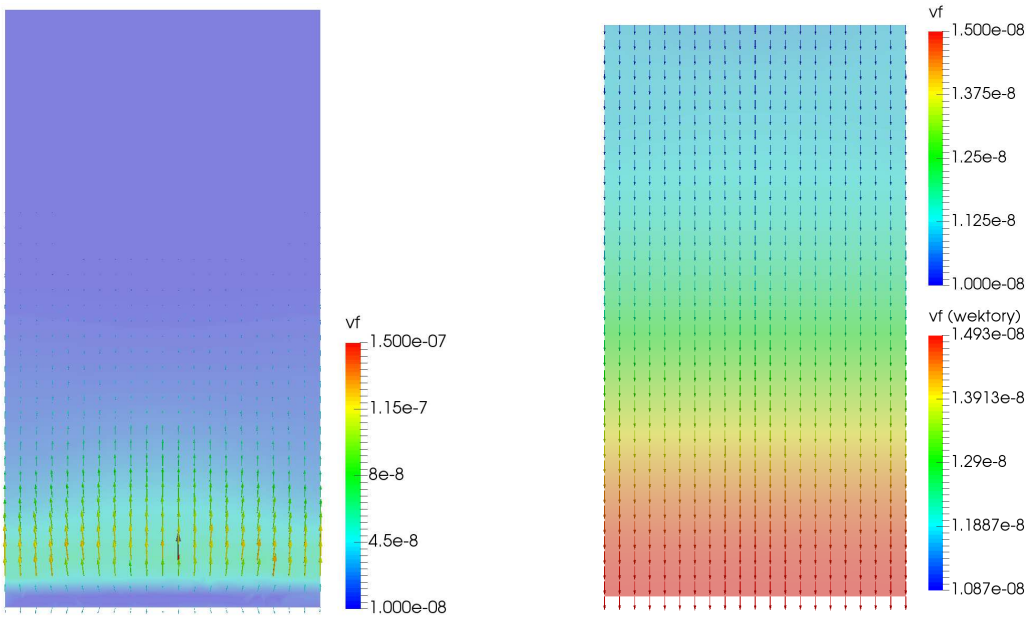
Ilość ciepła transportowaną przez obie fazy przedstawia rysunek nr 8.6. W przypadku modelu bez sprzężenia faz ilość transportowanego ciepła jest mniejsza w początkowej fazie (ze względu na wolniejsze nagrzewanie się płynu), natomiast wyższa w końcowej fazie ze względu na większą ilość ciepła przewodzonego w tym czasie przez wodę.

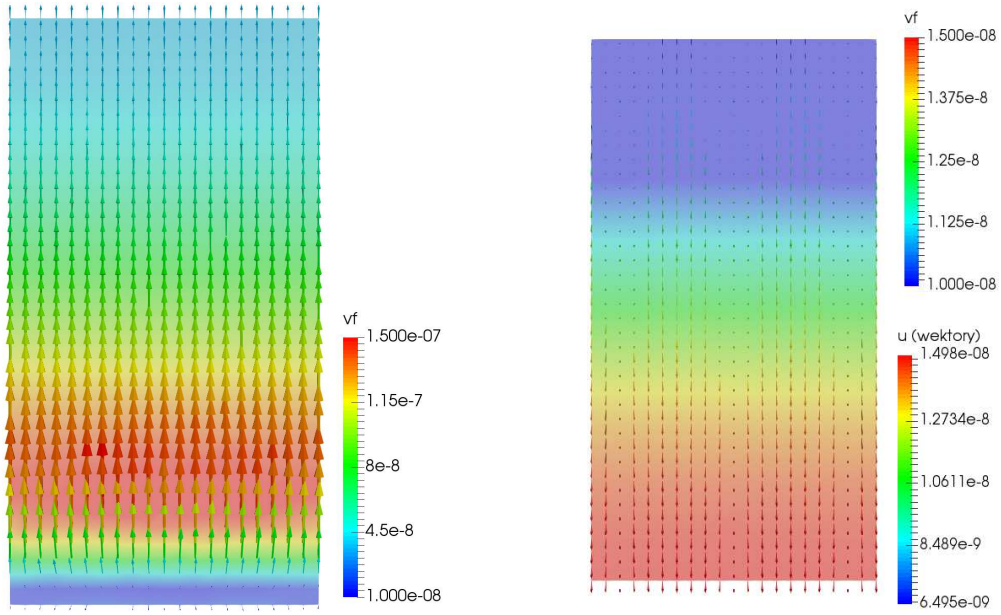


Rysunek 8.6 Przebieg w czasie gestości strumienia ciepła w obu fazach – po lewej stronie przy braku sprzężenia, po prawej – przy pełnym sprzężeniu.

❑ Filtracja

Ze względu różne tempo wzrostu temperatury w płynie w obu przypadkach, w modelu bez sprzężenia faz naprężenia w płynie są nieco mniejsze, niż w przypadku pełnego sprzężenia, podobnie, jak związane z nimi niższe prędkości filtracji. Wykresy prędkości filtracji dla obu przypadków przedstawiono na rysunku 8.7. W celu lepszego zobrazowania różnic, skala barw mapy prędkości filtracji w obu krokach czasowych dla obu przypadków jest taka sama, natomiast skala wektorów dopasowana jest do ich wartości.



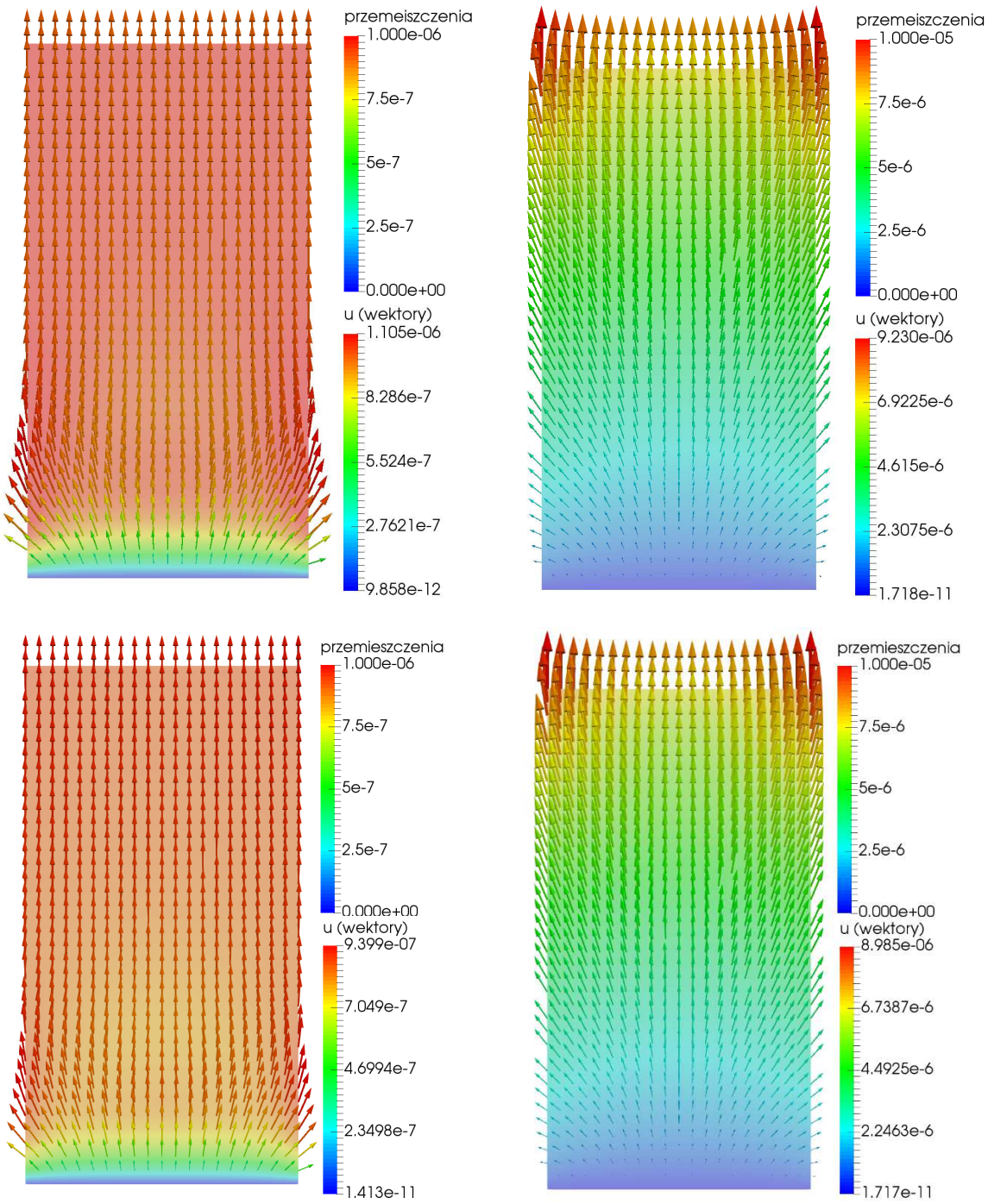


Rysunek 8.7 Rozkład prędkości filtracji [m/s] dla t=120s i t=3000s, u góry model bez sprzężenia, na dole z pełnym sprzężeniem.

❑ Przemieszczenia

W przypadku przemieszczeń, ich wartości ustalają się szybciej w modelu bez sprzężenia faz, głównie ze względu na szybsze ustalenie się temperatury szkieletu. Ostateczne wartości przemieszczeń i prędkości filtracji dla obu modeli (gdy temperatura w całej próbce osiąga wartość 30°C) są takie same. Różnice pojawiają się w trakcie podgrzewania, kiedy temperatury są różne.

Na rys nr 8.8 przedstawiono przemieszczenia będące wynikiem wzrostu temperatury (od wartości ostatecznej odjęto przemieszczenia początkowe) dla wody w porach ośrodka. Zastosowano, podobnie jak w przypadku filtracji, różne skale barw dla mapy oraz dla wektorów. Największy przyrost przemieszczeń obserwowany jest w początkowym czasie podgrzewania próbki, następnie przemieszczenia ustalają się.



Rysunek 8.8 Przemieszczenia [m] w czasie t=130s oraz t=8000s dla wody

Przemieszczenia są nieco większe w przypadku modelu bez sprzężenia faz z powodu szybszego ogrzewania się szkieletu. Różnice między modelami z czasem zmniejszają się wraz ze wzrostem temperatury w modelu z pełnym sprzężeniem faz.

8.3.2.2. Model ośrodka w lokalnej równowadze termicznej

Model numeryczny dotyczy ośrodka złożonego z porowatego szkieletu oraz wody wypełniającej jego pory. Przyjęto założenie, że przewodzenie ciepła odbywa się w obu fazach jednocześnie, zatem układ równań różniczkowych składa się z równań (8.48), (8.49) i (8.40):

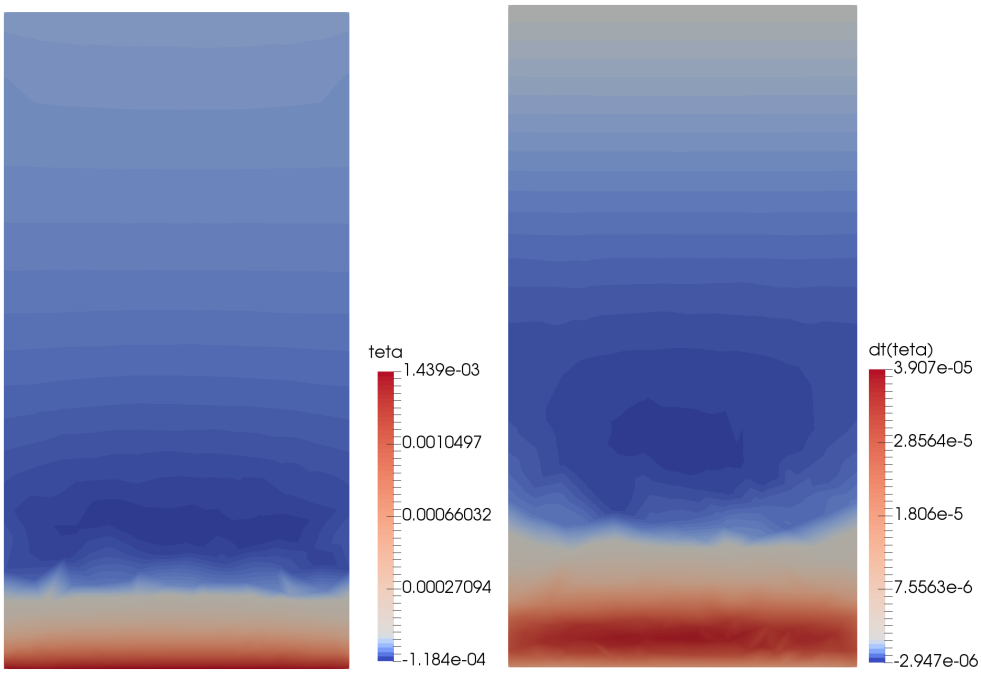
$$(\sigma_{ij} + \sigma\delta_{ij})_{,j} + X_i\rho = 0,$$

$$k\sigma_{,ii} = \left(\dot{\theta} - \dot{\varepsilon}\right),$$

$$\lambda\nabla^2 T = -\left(3K\alpha_t^s + Q\alpha_T^l\right)\dot{\varepsilon}T - \left(3Q\alpha_T^s + R\alpha_T^l\right)\dot{\theta}T - \frac{\rho c_v}{T_0}\dot{\vartheta}T.$$

Wyniki modelowania zachowania próbki przy użyciu powyższego układu równań pokrywają się z wynikami uzyskanymi przy użyciu modelu z dwoma równaniami przewodzenia ciepła, skupiono się zatem na analizach, nie ujętych w poprzednim podrozdziale, lecz interesujących z punktu widzenia rozpatrywanych zjawisk.

Skutkiem zmiany temperatury jest zmiana objętości płynu i wzrost ciśnienia. Rozkład dylatacji wody i jej prędkości w płynie po czasie t=120s (60s od początku podgrzewania) przedstawia rysunek nr 8.9.

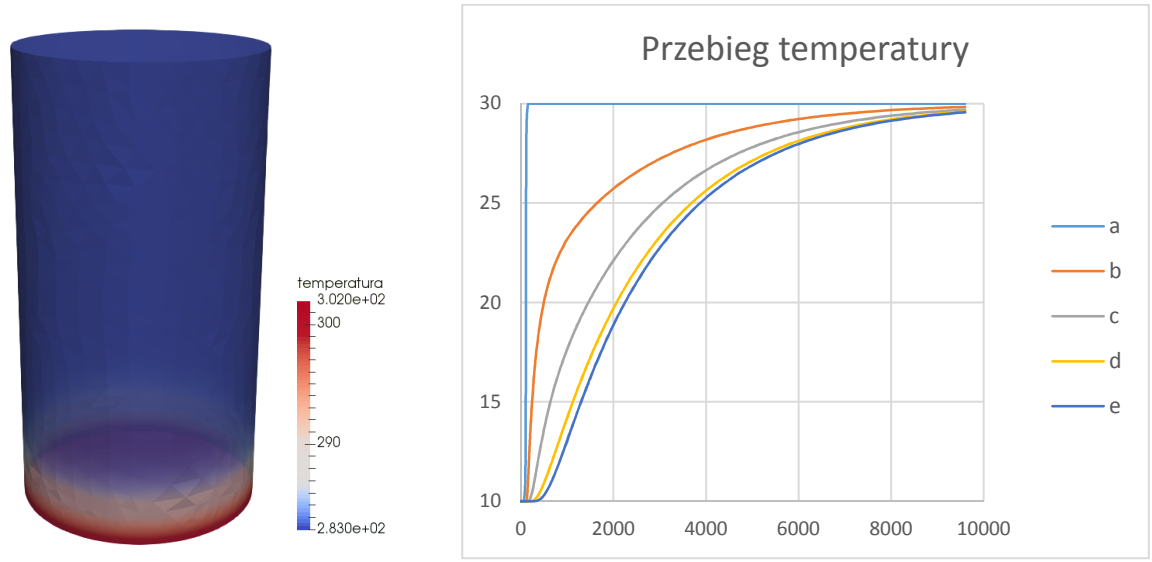


Rysunek 8.9 Rozkład dylatacji oraz prędkości dylatacji oraz naprężenia w płynie w czasie t=120s (schemat A)

Największe wartości dylatacji płynu w tym kroku czasowym zaobserwować można w obszarze o najwyższej temperaturze. Powyżej tego obszaru wartości dylatacji (i jej prędkości) są najniższe.

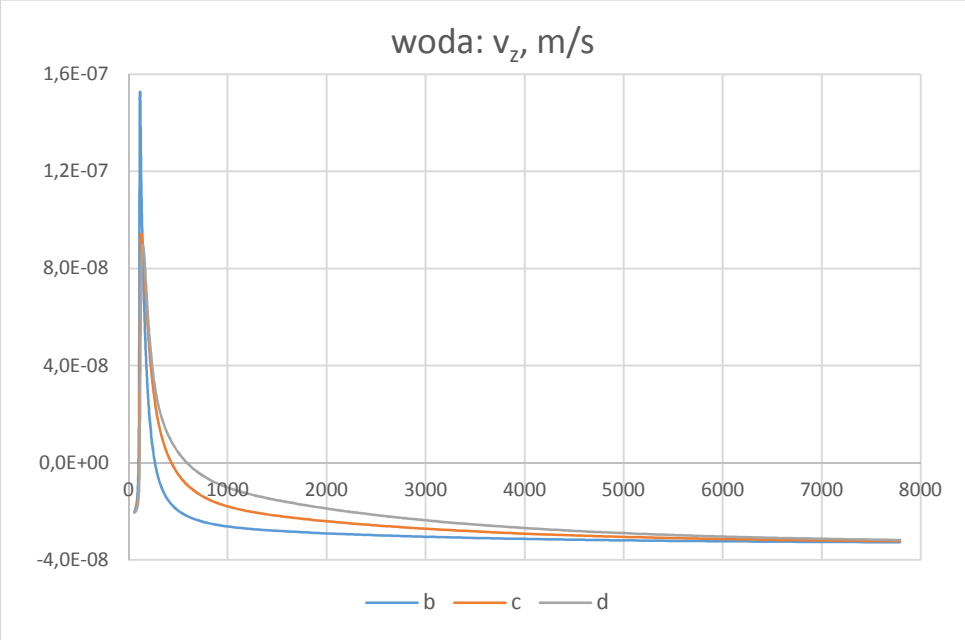
W kolejnych krokach czasowych, w miarę podnoszenia się temperatury w kolejnych fragmentach próbki, wzrasta w nich również dylatacja.

Rozkład temperatury w czasie t=120s oraz przebieg jej zmian w czasie przedstawia rys nr 8.10.



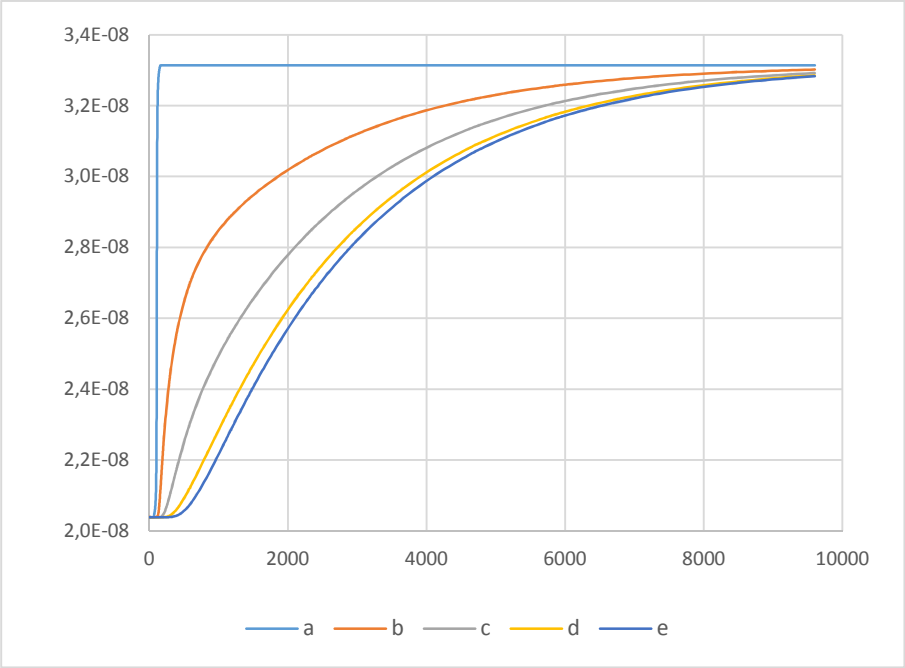
Rysunek 8.10 Rozkład temperatury przy t=3000s oraz przebieg temperatury w czasie w wybranych punktach próbki.

Szybki wzrost objętości płynu w podgrzewanej części próbki razem z podwyższonym ciśnieniem poskutkował we wszystkich przypadkach na początku podgrzewania zmianą kierunku przepływu. Na wykresie prędkości filtracji w czasie (rys 8.11) widoczny jest gwałtowny wzrost prędkości przepływu wywołany wzrostem ciśnienia w dolnej części próbki. W miarę spadku ciśnienia i ustalania się warunków przepływu ciepła prędkość stopniowo maleje, następnie zmienia zwrot na zgodny z kierunkiem siły grawitacji – zjawisko to przedstawiono również wcześniej, przy omawianiu modeli z dwoma równaniami przewodzenia ciepła (rys 8.7).



Rysunek 8.11 Przebieg w czasie pionowej składowej prędkości filtracji w wybranych punktach próbki w przypadku wody.

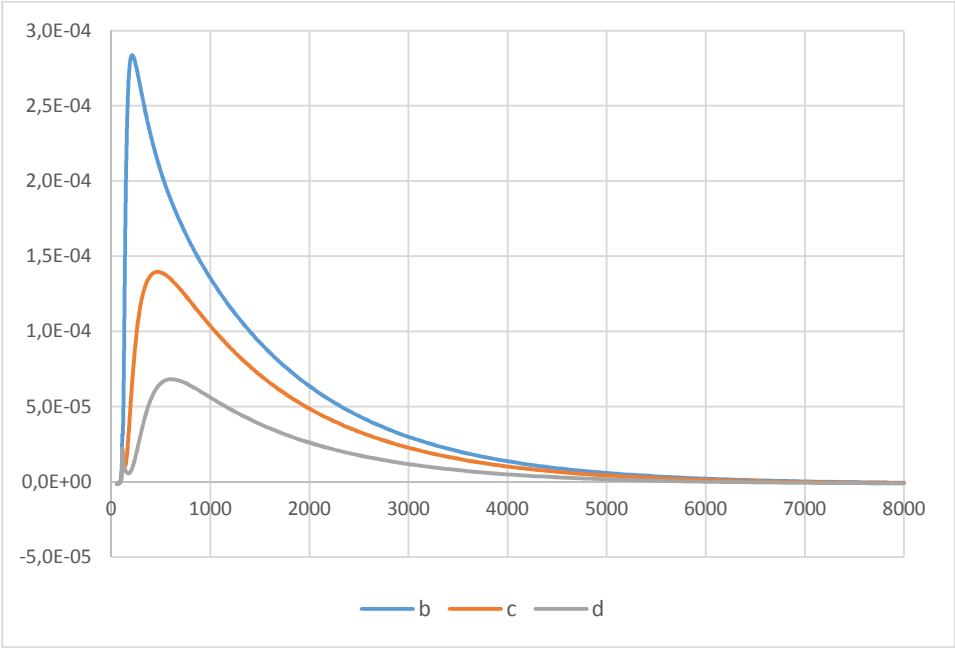
W przypadku cieczy, wraz ze wzrostem temperatury lepkość maleje, przez co współczynnik filtracji rośnie. Przebieg w czasie współczynnika filtracji przedstawia rys. nr. 5.12.



Rysunek 8.12 Przebieg w czasie współczynnika filtracji w wybranych punktach dla wody

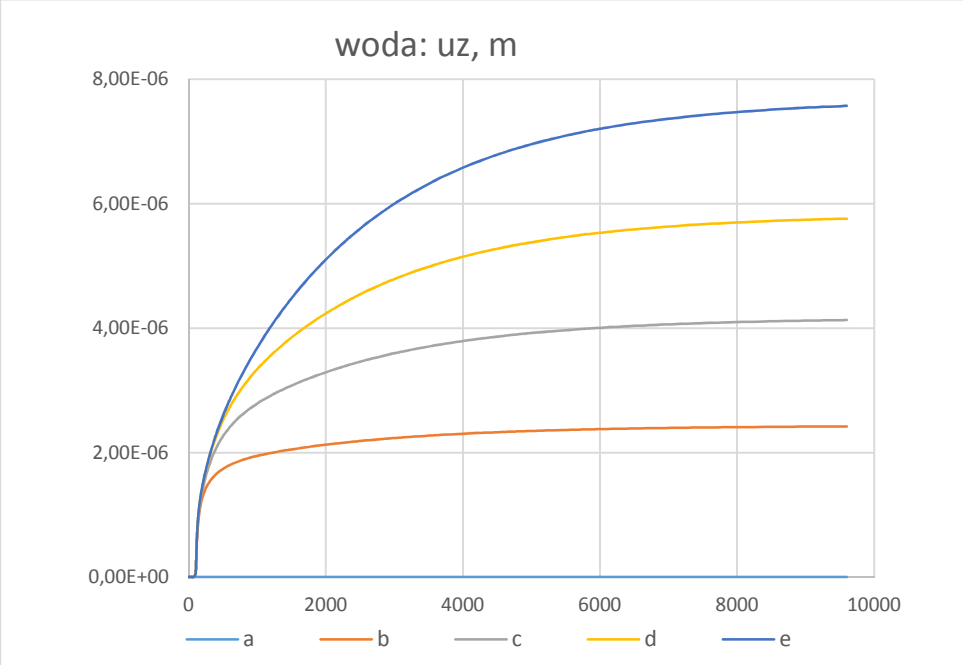
W celach porównawczych wykonany został model dla parametrów tego samego gazu (powietrza) w dwóch zakresach temperatur w celu porównania wyników z wynikami dla wody i dla pary wodnej. Różnice między modelami przejawiają się głównie w różnicach w wartości dylatacji płynu oraz

prędkości filtracji. W zakresie temperatur odpowiadającym modelom dla wody w porach ośrodka, prędkości filtracji są większe ze względu na mniejszą lepkość gazu. Dla obu zakresów temperatur przebieg prędkości filtracji przedstawiony został na rys nr 8.13.



Rysunek 8.13 Przebieg w czasie prędkości filtracji powietrza w wybranych punktach, zakres temperatur 10÷30°C.

Przemieszczenia w modelu z jednym równaniem przewodzenia ciepła pokrywają się z wynikami modelu o dwóch równaniach z pełnym sprzężeniem faz. Rys 8.14 przedstawia wykres przemieszczeń w czasie.



Rysunek 8.14 Przebieg przemieszczeń pionowych w czasie w wybranych punktach próbki dla wody jako płynu porowego

8.3.3. Porównanie modeli termokonsolidacji dla gazu

8.3.3.1. Wyniki dla modelu dwufazowego

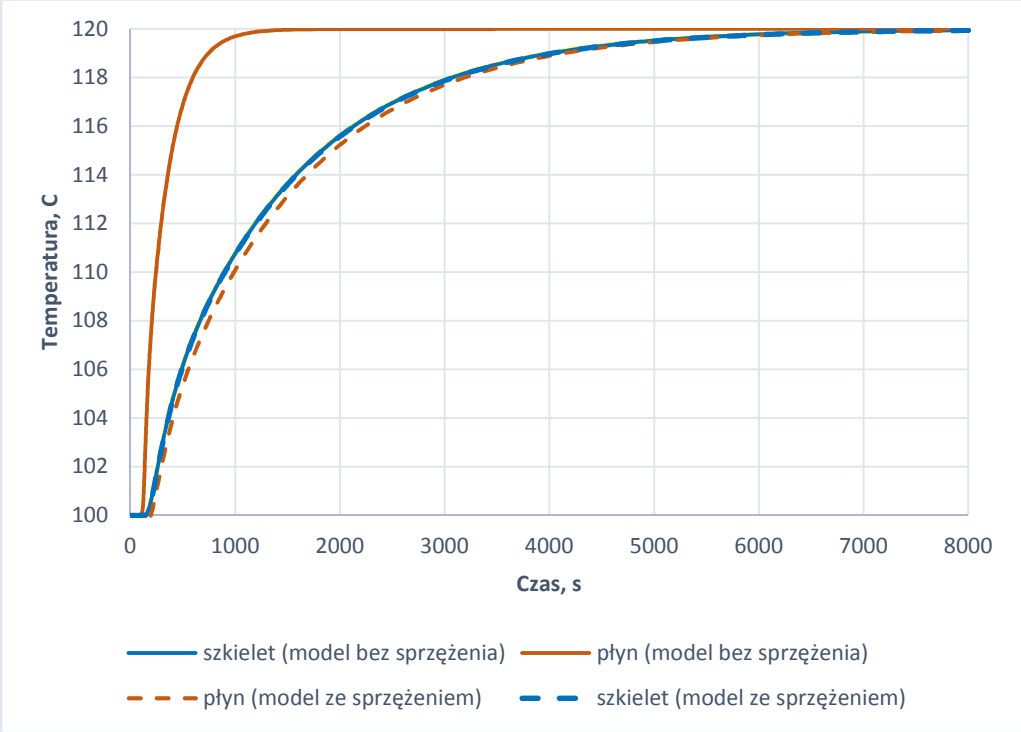
Podobnie, jak w przypadku modelu dla ośrodka wypełnionego wodą, model termokonsolidacji ośrodka wypełnionego gazem składa się z 6 równań z 6 niewiadomymi, różne są jednak równania konstytutywne dla płynu (8.60), równania przewodzenia ciepła mają postać (8.64):

$$\lambda^s \nabla^2 \vartheta^s = -T^s K \alpha^s \dot{\varepsilon} - T^s Q \alpha^s \dot{\theta} + \frac{T^s}{T_0}\left(\rho_1 c_v^s \dot{\vartheta}^s + \rho c_v^{ls} \dot{\vartheta}^l\right)$$

$$\lambda^g \nabla^2 \vartheta^g = -Q\dot{\varepsilon} - \frac{\sigma_a}{(1+\theta) f}\dot{\theta} + \frac{T^g}{T_0}\left(\rho c_v^{gs} \dot{\vartheta}^g + \rho_2 c_v^g \dot{\vartheta}^g\right).$$

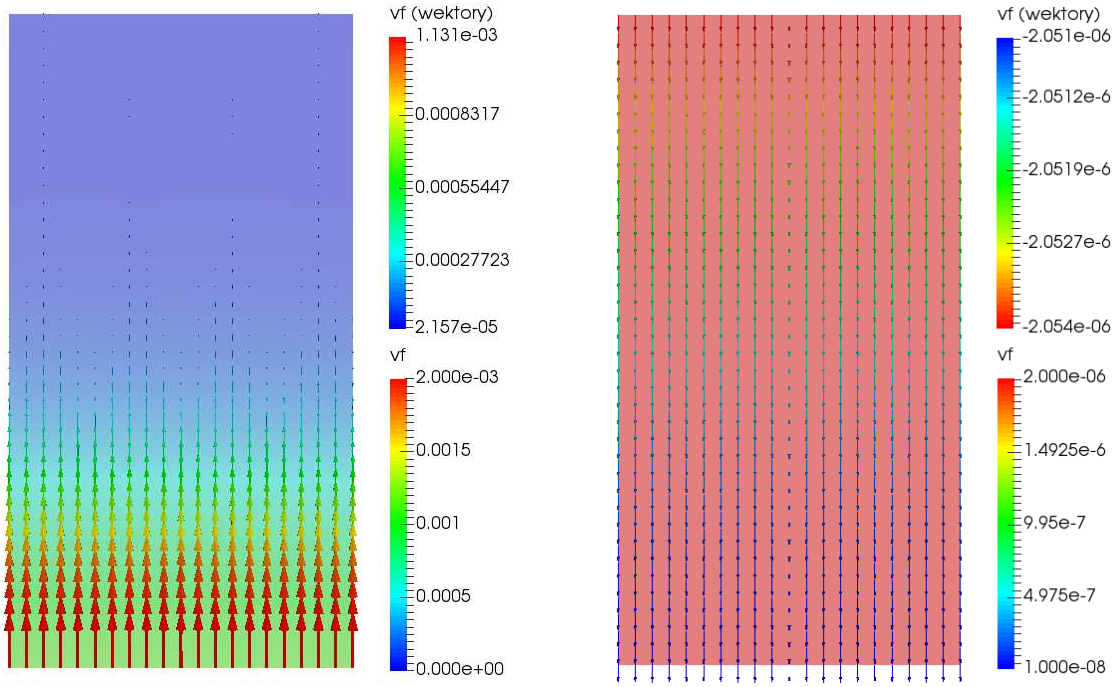
Podobnie jak poprzednio, zakłada się dwa skrajne przypadki: braku sprzężenia faz, oraz całkowitego sprzężenia, co odpowiada modelowi z jednym równaniem przewodzenia ciepła.

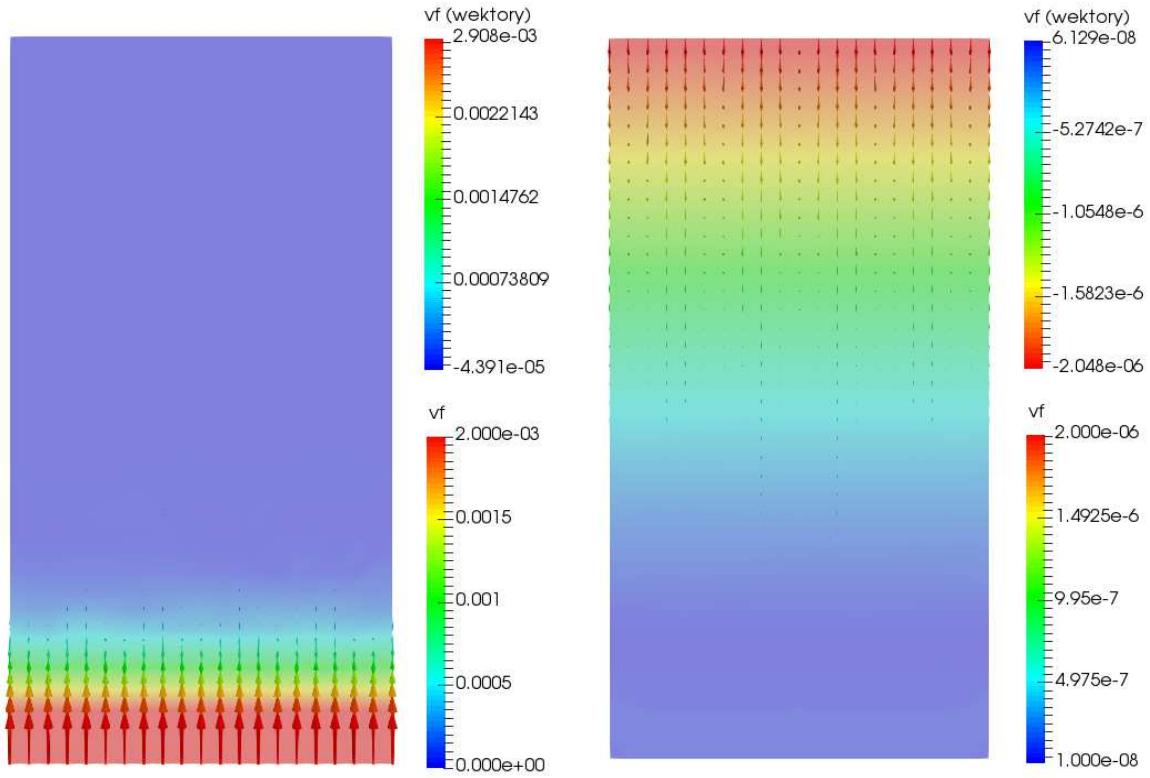
Para wodna ma dużo mniejsze ciepło właściwe oraz współczynnik przewodzenia ciepła, niż woda, w związku z czym szybko się nagrzewa, jednak przewodzi niewielką ilość ciepła i ma niewielki wpływ na temperaturę ośrodka. Jest to widoczne na wykresie przebiegu temperatur w modelach sprzężonym i niesprzężonym (rys nr. 8.15): w przypadku modelu bez sprzężenia faz temperatura w płynie rośnie szybko. W przypadku sprzężenia faz temperatury są zbliżone (różnice wynikają ze zmian objętości pary wodnej). Różnica między oboma modelami dotyczy gazu, który oddaje ciepło do szkieletu, jednak ze względu na niskie ciepło właściwe, fakt ten praktycznie nie ma wpływu na przebieg temperatury w szkielecie, który pokrywa się z przebiegiem temperatury ośrodka traktowanego jako jednorodny.



Rysunek 8.15 Przebieg temperatur w obu fazach

W przypadku pary wodnej, duża rozszerzalność cieplna oraz znacznie mniejsza lepkość powodują, że prędkości filtracji są znacznie większe, niż w przypadku wody. Poniżej przedstawiono pole przepływu filtracyjnego w czasie t=120s i 8000s dla pary wodnej (rys 8.16).

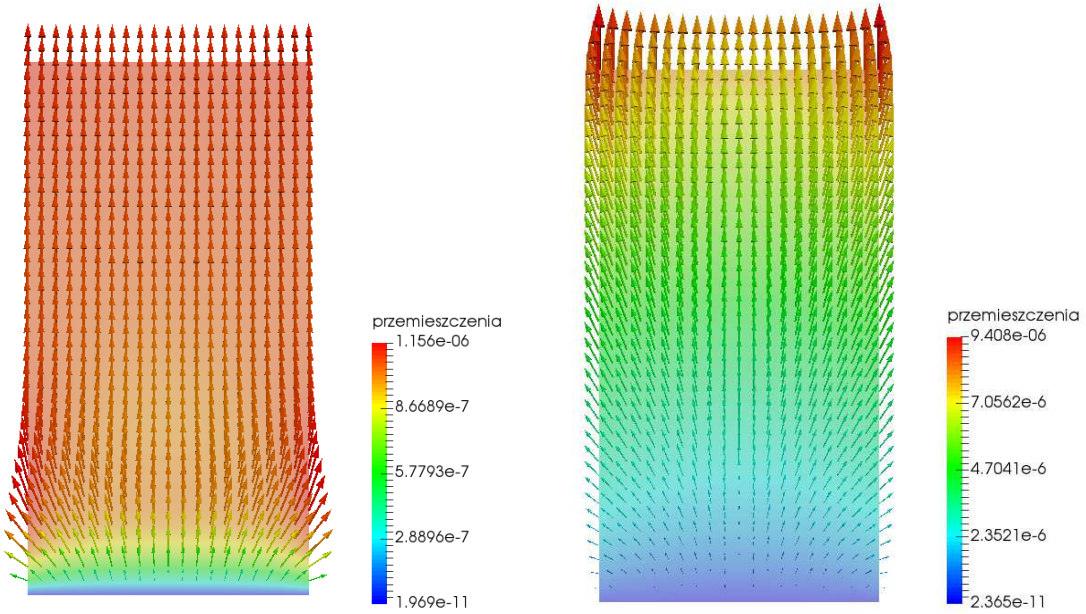


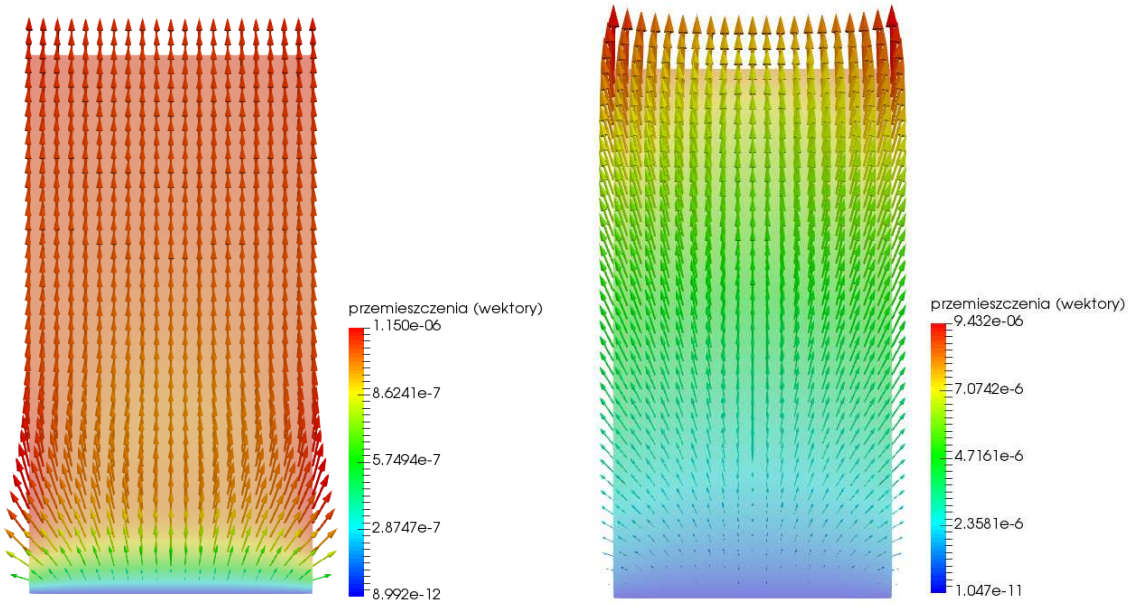


Rysunek 8.16 Rozkład prędkości filtracji dla t=120s i t =8000s – brak sprzężenia faz na górze i pełne sprzężenie faz na dole

Różnice w prędkości filtracji na wykresie dla t=3000 dla wody i t=10000 dla pary wodnej wynikają z różnej lepkości i gęstości płynu regionach o różnej temperaturze.

Wartości przemieszczeń są w przypadku zakresu temperatur 100÷120°C nieco większe, niż w przypadku zakresu temperatur 10÷30°C, ponadto proces ustala się szybciej. Pole przemieszczeń po czasie 130s i 8000s przedstawia rys nr 8.17.





Rysunek 8.17 Przemieszczenia w czasie t=130s oraz t=8000s dla pary wodnej w porach ośrodka.

Różnice między oboma modelami nie są tak widoczne, jak w przypadku filtracji cieczy, gdyż różnica między temperaturami szkieletu w obu modelach są niewielkie.

8.3.3.2. Wyniki dla modelu „jednofazowego”

W przypadku występowania w porach gruntu gazu, zastosowanie mają związki konstytutywne (8.57). Układ równań różniczkowych opisujący stan przemieszczenia, pole filtracji oraz temperatury składa się, podobnie jak w poprzednim przypadku z 5 równań: 3 równań równowagi (8.48), równania przepływu filtracyjnego (8.49), oraz równania przewodzenia ciepła (8.63):

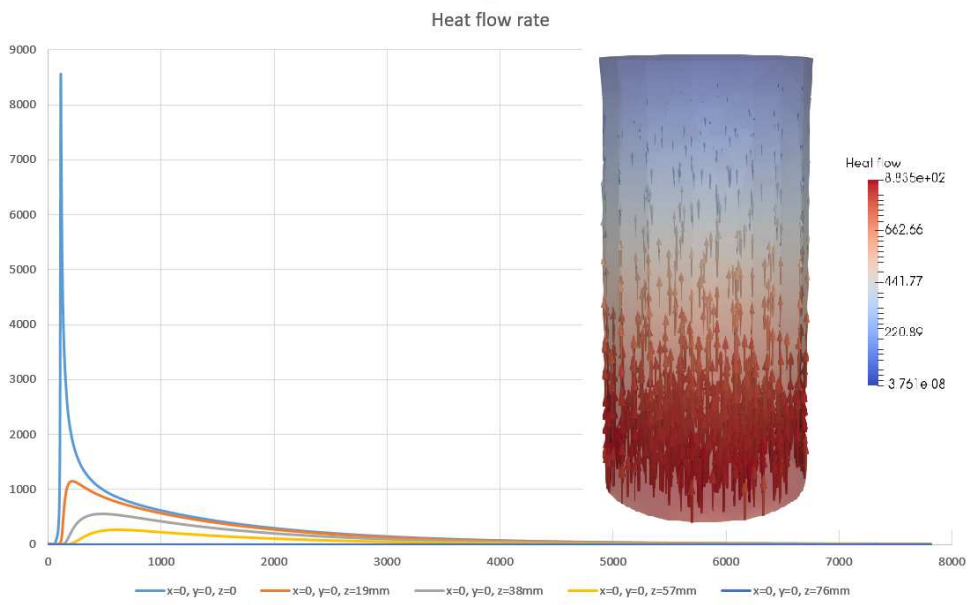
$$(\sigma_{ij} + \sigma\delta_{ij})_{,j} + X_i\rho = 0,$$

$$k\sigma_{,ii} = \left(\dot{\theta} - \dot{\varepsilon}\right),$$

$$\lambda\nabla^2 T = -\left(K\alpha^s + \frac{Q}{T}\right)\dot{\varepsilon}T - \left(Q\alpha^s + \frac{\sigma_a}{(1+\theta)fT}\right)\dot{\theta}T - \frac{\rho c_v}{T_0}\dot{\vartheta}T.$$

Podobnie, jak w przypadku cieczy, wyniki tego modelu pokrywają się z wynikami modelu z dwoma równaniami przewodzenia ciepła przy pełnym sprzężeniu faz, przedstawione więc zostaną tylko wyniki nieujęte w poprzedniej analizie.

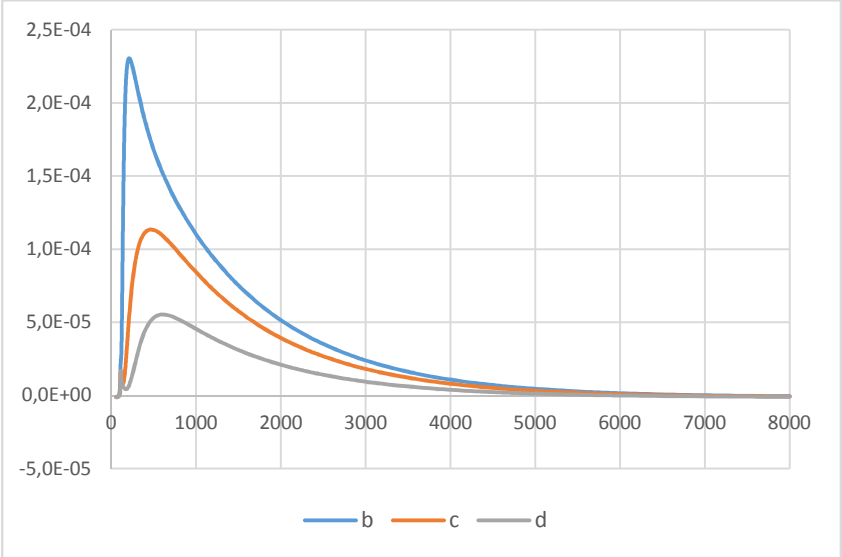
Ilość ciepła przewodzonego przez gaz jest zaniedbywalnie mała w porównaniu do ilości ciepła przewodzonego przez szkielet. Na wykresie (rys 8.18) nie przedstawiono rozróżnienia linii dla ilości ciepła przewodzonego przez obie fazy, gdyż wartości dla gazu są pomijalnie małe (o 3 rzędy wielkości mniejsze od wartości dla szkieletu).



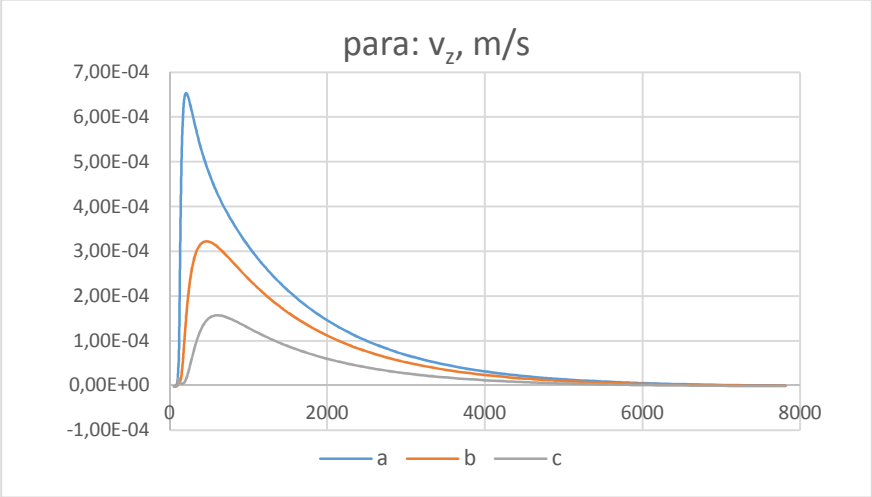
Rysunek 8.18 Gęstość strumienia ciepła w szkielecie ośrodka

Porównując model z powietrzem z powietrzem jako płynem porowym, przebieg prędkości filtracji ma podobny kształt, jak w przypadku pary wodnej, przepływ jest jednak znacznie wolniejszy. W przypadku obu gazów przeciwny zwrot prędkości filtracji utrzymuje się znacznie dłużej, niż w przypadku wody.

Przebieg prędkości filtracji przedstawiony został na rys nr 8.19 i 8.20.

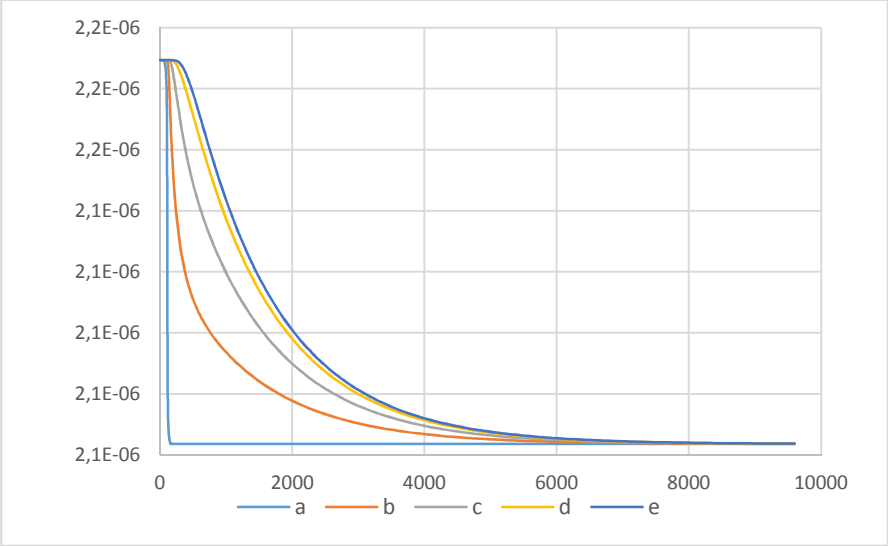


Rysunek 8.19 Przebieg w czasie pionowej składowej prędkości filtracji powietrza w wybranych punktach, zakres temperatur100÷120°C.



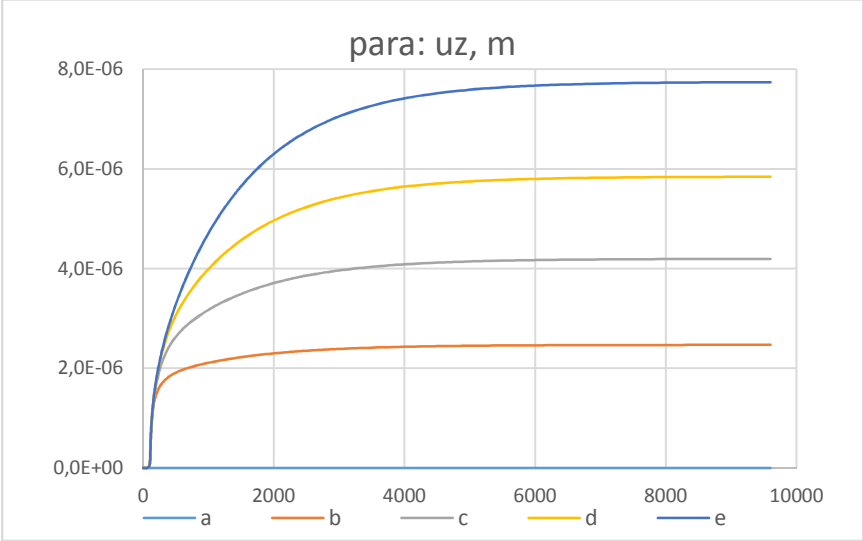
Rysunek 8.20 Przebieg w czasie pionowej składowej prędkości filtracji w wybranych punktach próbki w przypadku pary wodnej

W przypadku gazów, odwrotnie niż w cieczach, wraz ze wzrostem temperatury lepkość rośnie, przez co współczynnik filtracji maleje. Przebieg w czasie współczynnika filtracji przedstawia rys. nr. 8.21.



Rysunek 8.21 Przebieg w czasie współczynnika filtracji w wybranych punktach dla pary wodnej

Przebieg w czasie przemieszczeń (rys 8.22) ma nieco inny kształt, niż w przypadku wody, jako płynu porowego – w początkowym etapie rosną one szybciej.



Rysunek 8.22 Przebieg przemieszczeń pionowych w czasie w wybranych punktach próbki dla pary wodnej jako płynu porowego

W przypadku zastosowania powietrza jako płynu porowego w obu zakresach temperatur, przemieszczenia są w porównaniu z wodą nieco większe w przedziale temperatur 10÷30°C (o $0.12 \cdot 10^{-6}$), oraz nieco niższe od wody w przedziale temperatur 100÷120°C (o $0.13 \cdot 10^{-6}$).

Przemieszczenia i prędkości filtracji w przypadku modelu z pełnym sprzężeniem faz odpowiadają modelowi jednorodnego ośrodka, w przypadku braku sprzężenia faz ze względu na szybsze ogrzewanie się gazu prędkość filtracji oraz dylatacja płynu wzrastają szybciej.

W przypadku gazu w porach ośrodka temperatura szkieletu jest zbliżona we wszystkich modelach, i to właśnie szkielet odpowiedzialny jest za przewodzenie ciepła. Fakt odbierania ciepła od gazu nie ma wpływu na temperaturę szkieletu ze względu na jego duże ciepło właściwe i gęstość (w porównaniu do gazu). Stąd przemieszczenia w rozpatrywanych przypadkach różnią się jedynie nieznacznie. Różnice miedzy modelami występują natomiast w przypadku filtracji ze względu na różnice temperatur płynu między modelami. Gaz przepływa przez ośrodek znacznie szybciej, niż ciecz. Przemieszczenia próbki są nieco większe, niż w przypadku wody, ich prędkość jest też większa.

8.3.4. Podsumowanie modeli numerycznych termokonsolidacji próbki

Analizując przedstawione modele numeryczne można zaobserwować podstawowe różnice w przewodzeniu ciepła, filtracji oraz przemieszczeniach między modelami z pełnym sprzężeniem faz i bez sprzężenia. W modelach tych ostateczne wartości prędkości filtracji oraz przemieszczeń są takie same (po wyrównaniu się temperatur), zasadnicze różnice dotyczą etapu kiedy temperatury obu faz są różne.

- W przypadku wody jako płynu porowego szkielet ogrzewa się szybciej, niż woda, w przypadku równania z pełnym sprzężeniem faz część ciepła oddaje on wodzie, przez co jego temperatura wzrasta wolniej, natomiast szybciej wzrasta temperatura wody.
- W przypadku pary wodnej jako płynu porowego szybciej ogrzewa się para wodna, która następnie przekazuje część ciepła szkieletowi – w przeciwieństwie do modelu dla wody jako płynu porowego, tutaj fakt wymiany ciepła między fazami nie ma dużego wpływu na

temperaturę szkieletu – ilość ciepła transportowanego przez gaz jest na tyle mała, że fakt jego przekazania nie ma znaczącego wpływu na temperaturę szkieletu.

Można stwierdzić, że model z jednym równaniem przewodzenia ciepła jest pewnym uproszeniem modelu z dwoma równaniami ciepła. Model ten można uznać za wystarczający, gdy sprzężenie faz jest bliskie pełnego.

Obliczenia wykonano przy użyciu zasobów udostępnionych przez Wrocławskie Centrum Sieciowo-Superkomputerowe (http://wcss.pl), grant obliczeniowy Nr 427.

8.4. Literatura do rozdziału 8

AURIAULT, J.L., BOUTIN C., GEINDREAU, C., (2009)
Homogenization of Coupled Phenomena in Heterogenous Media, Wiley, ISBN 978-1-84821-161-2

BARTLEWSKA-URBAN, M., STRZELECKI, T., (2012)
Thermal consolidation of porous medium with a rheological Kelvin-Voigt skeleton. *Studia* Geotechnica *et Mechanica.* 2012, vol. 34, nr 3, s. 17-35.

BARTLEWSKA-URBAN, M., STRZELECKI, T., (2014)
Effect of variation of temperaturę field n the proces of thermal consolidation of tailings pond „Żelazny Most", *Studia Geotechnica et Mechanica*. 2014, vol. 36, nr 2, s. 57-65.

BARTLEWSKA-URBAN, M., ZOMBROŃ, M., STRZELECKI, T., (2016)
Numerical analysis of road pavement thermal deformability, based on Biot viscoelastic model of porous medium, *Studia Geotechnica et Mechanica* 2016, vol 38, nr 1, s 15-22

BIOT, M.A., (1941)
General Theory of Three-Dimensional Consolidation, *Journal of Applied Physics*, vol 12, no 2 pp 155-164, February 1941

BIOT, M.A., (1956)
Thermoelasticity and irreversible thermodynamics *J. Appl. Phys*. 33, 1482

BIOT, M.A., WILLIS D.G. (1957)
The Elastic Coefficients of the Theory of Consolidation, *J. Appl. Mech.,* 24

BORIES, S. (1987)
Natural Convection in Porous Media. In: Bear J., Corapcioglu M.Y. (eds) *Advances in Transport Phenomena in Porous Media*. NATO ASI Series (Series E: Applied Sciences), vol 128. Springer, Dordrecht

COUSSY, O., (1995)
Mechanics of porous continua, Wiley & Sons

COUSSY,O.,(2004)
Poromechanics, John Wiley & Sons,

CHARLEZ, P.A., (1991)
Rock Mechanics vol 1 Theoretical Fundamentals, Édtions Technip, Paris

DE GROOT, S.R., MAZUR, P. (1965)
Non Equilibrium Thermodynamics North-Holland Publishing Company, Amsterdam

FlexPDE professional v. 6.37 manual.

GAWIN, D., PESAVENTO, F., SCHREflER, B. A., (2002)
Modelling of hygro-thermal behaviour and damage of concrete at temperature above the

critical point of water, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.,* 26:537–562

GAWIN, D., PESAVENTO, F., (2012)
An Overview of Modeling Cement Based Materials at Elevated Temperatures with Mechanics of Multi-Phase Porous Media, *Fire Technology*, Volume 48, Issue 3, pp 753–793

GASZYŃSKI, J. , (2007)
Osiadania warstwy gruntu nasyconej cieczą z uwzględnieniem pola temperatury, *Czasopismo Techniczne,* Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, ISSN 0011-4561

GASZYŃKI, J, (2008)
Mieszany problem początkowo-brzegowy w teorii termokonsolidacji. Zagadnienie początkowe*, Górnictwo i Geoinżynieria*, rok 33 zeszyt 1

GEMANT, A., (1952)
How to compute thermal oil conductivities, *Heating, Piping and Air Conditioning*, vol 24, no 1, p 122-123

HANYGA, A., JIANFEI, L., (2004)
Thermal effects in immiscible two-fluid porous flow, *International Journal of Engineering Science* 42 (2004) 291–301

HSU, C. T. (2005)
Dynamic modeling of convective heat transfer in porous media. *Handbook of Porous Media* (K Vafai, ed.), 2nd ed., Taylor and Francis, New York, pp. 39–80.

JOHANSEN, O., (1975)
Thermal conuctivity of soils, Ph. D. thesis, Trondheim, Norway (CRREL draft translation 637, 1977)

KERSTEN, M.S., (1949)
Theramal properties of soils, *University of Minnesota Engineering Experiment Station Bulletin* No 28.

KUNII D, SMITH JM (1960) Heat transfer characteristics of porous rocks, *American Institute of Chemical Engineers Journal,* vol 6 no 1 p. 71-78

ŁYDŻBA D., SOBÓTKA M.K., (2014)
State of Strangh in Massive Concrete Structure subjectet to Non-Mechanical Loads, *Studia Geotechnica et Mechanica*, vol XXXVI, No 2, 37-43,

MCTIGUE D.F. (1986)
Thermoelastic Response of Fluid-Saturated Porous Rock, *Journal of Geophysical Research,* vol. 91, no. B9

MICKLEY, A.S., (1951)
The termal conductivity of moist soil, *American Institute of Electrical Transactions*, vol 70 p 1789-1797

NIELD, D.A., BEJAN, A. (2006)
Convection in Porous Media, Third edition, Springer, New York

NORRIS A., (1992)
On the correspondence between poroelasticity and thermoelasticity *J. Appl. Phys.* vol. 71, No. 3

NOWACKI W., (1975)
Teoria sprężystości, PWN Warszawa

PESAVENTO, F., PACHERA, M., SCHREFLER, B. A., GAWIN, D., WITEK, A., (2018)

Coupled numerical simulation of fire in tunnel, *AIP Conference Proceedings 1922*, 090003

SMITH, W.O., (1942)
The thermal conductivity of dry soil, *Soil Science* vol 53, p 435-459

STEFANIUK, D., RÓŻAŃSKI, A., ŁYDŻBA, D., (2016)
Recovery of microstructure properties: random variability of soil solid thermal conductivity, *Studia Geotechnica et Mechanica*, Volume 38, Issue 1, Pages 99–107

STRZELECKI M., (2016)
Model termo-filtracji w obszarze oddziaływania generatora zgazowania węgla, rozprawa doktorska

STRZELECKI T., (2006)
Równania termokonsolidacji gruntów i skał, *Geotechnika i Budownictwo Specjalne*, XXIX, AGH, Kraków, 285-299

STRZELECKI T, KOSTECKI S, ŻAK S. (2008)
Modelowanie przepływów przez ośrodki porowate, DWE, Wrocław,

STRZELECKI T., UCIECHOWSKA, A., (2014)
Thermal consolidation process of multiphase medium consisting of elastic skeleton, water, and water vapour, *Acta Geophysica* 62(5)

SU, Y., DAVIDSON, J.H., (2015)
Modeling Approaches to Natural Convection in Porous Media, Springer

SUAREZ-ARRIGA, M.C., (2010)
Thermo-poroelasticity in geothermics, formulated in four dimensions, *Geotermia*, Vol. 23, No.2

UCIECHOWSKA-GRAKOWICZ A., STRZELECKI T., (2017)
Non-isothermal constitutive relations and heat transfer equations for a two-phase medium, *Studia Geotechnica et Mechanica*, Vol. 39, No. 3

UCIECHOWSKA-GRAKOWICZ A. (2018)
Termokonsolidacja ośrodka porowatego z uwzględnieniem występowania fazy gazowej, rozprawa doktorska

WAKAO N., KAGUEI S., FUNAZKRI T. (1979)
Effect of fluid dispersion coefficients on particle-to--fluid heat transfer coefficients in packed beds: correlation of Nusselt numbers *Chem Engng. Sei.* 34, 325-336 (1979).

ZIMMERMANN, (2009)
On the analogy between Poroelasticity and thermoelasticity, *Poromechanics IV*, red Hoe I. Ling, Andrew Smyth, Raimondo Betti, DEStech Publications, Inc,