

7. TEORIA POROSPĘŻYSTOŚCI

Anna Uciechowska-Grakowicz

Ośrodek gruntowy tworzą szkielet, będący fazą stałą oraz płyn w jego porach. W przypadku przyłożenia obciążenia, początkowo przenoszone ono jest przez płyn, następnie, wraz z jego odpływem, stopniowo ośrodek taki odkształca się a obciążenie przejmuje szkielet. Zjawisko takie nosi nazwę konsolidacji. Dyskusja nad teoretycznym opisem zagadnienia ośrodka porowatego wypełnionego płynem rozpoczęta została przez Fillungera [1915] stwierdzeniem, że hydrostatyczne ciśnienie płynu nie ma wpływu na wytrzymałość ośrodka. Fillungerowi [1936] zawdzięczamy również użycie w teorii konsolidacji cząstkowych naprężeń w szkielecie i płynie. Obecnie w mechanice gruntów funkcjonują dwie teorie konsolidacji: teoria Terzagiego, w zarysie przedstawiona w 1923r, oraz trójwymiarowa teoria porospężystości Biota, przedstawiona w 1935r. Teorie te rozwijane są niezależnie, szerszy zakres zastosowań ma teoria Biota, przy czym w mechanice gruntów częściej używana jest teoria Terzagiego ze względu na prostotę obliczeń oraz łatwość wyznaczenia stałych materiałowych.

7.1. Klasyczna teoria konsolidacji Terzagiego

7.1.1. Podstawowe założenia teorii konsolidacji Terzagiego

Według założeń teorii Terzagiego szkielet ośrodka gruntowego oraz płyn są nieściśliwe. Przemieszczenia spowodowane są jedynie odpływem wody z gruntu, czyli zmianą objętości przestrzeni porowej; osiadanie gruntu jest zatem funkcją porowatości. Przemieszczenia mają kierunek pionowy, przy czym możliwy jest odpływ wody w kierunku poziomym.

W modelu tym całkowite naprężenie przenoszone przez ośrodek wynosi:

$$\sigma = \sigma' + u, \quad (7.1)$$

gdzie σ' to naprężenie efektywne w szkielecie odniesione do przekroju ośrodka, odpowiadające za odkształcenia, u to ciśnienie porowe (przy czym, odmiennie, niż w teorii sprężystości, naprężenie ściskające oraz ciśnienie mają tutaj ten sam znak). Po przyłożeniu obciążenia, w chwili $t = 0$ całe naprężenie $\Delta\sigma$ przenoszone jest przez płyn: $\Delta\sigma = \Delta u$, natomiast po zakończeniu procesu konsolidacji obciążenie przenoszone jest przez szkielet $\Delta\sigma = \Delta\sigma'$. Naprężenie $\Delta\sigma$ w ciągu tego procesu jest stałe, więc:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \sigma'}{\partial t}. \quad (7.2)$$

Skoro osiadanie wynika wyłącznie ze zmiany zawartości wody w porach ośrodka, a obie fazy są nieściśliwe, jest ono funkcją porowatości n . Zależność między porowatością a prędkością filtracji w modelu hydrodynamicznym przepływu (jego założenie nieściśliwości obu faz odpowiada założeniu Terzagiego) opisuje dla przypadku jednowymiarowego następujące równanie ciągłości płynu [Terzaghi i in, 1996]:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} dx dy dz = -\frac{\partial}{\partial t} (n dx dy dz) \quad (7.3)$$

Dla opisu zmian porowatości wygodnie jest stosować wskaźnik porowatości (3.10):

$$e = \frac{V_f}{V_s} = \frac{n}{1-n}, \quad (7.4)$$

za pomocą którego można w następujący sposób określić udziały frakcyjne poszczególnych faz:

- Zawartość szkieletu:

$$\frac{1}{1+e} = 1-n \quad (7.5)$$

- Zawartość płynu:

$$\frac{e}{1+e} = n \quad (7.6)$$

Korzystając z definicji (7.6) oraz równania Darcy'ego: $v = -kI$, gdzie k to współczynnik filtracji, a I to spadek hydrauliczny, $I = \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial z}$, równanie ciągłości (7.3) zapisać można w postaci:

$$\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dx dy dz = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e}{1+e} dx dy dz \right) \quad (7.7)$$

Zakładając, że zmiany współczynnika porowatości są niewielkie, można przyjąć, że zawartość szkieletu w elemencie $\frac{1}{1+e} dx dy dz$ jest stała, zatem związek lokalny można zapisać w postaci:

$$\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dx dy dz = \frac{1}{1+e} \frac{\partial e}{\partial t}. \quad (7.8)$$

Wykorzystując definicję współczynnika ścisłości objętościowej (3.23):

$$m_v = \frac{a}{1+e_0} \quad (7.9)$$

Gdzie a to współczynnik ścisłości, $a = \frac{de}{d\sigma'}$, oraz zależność (7.2), można napisać

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_k \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (7.10)$$

Gdzie c_k to współczynnik konsolidacji,

$$c_k = \frac{k}{\gamma_w m_v}$$

- Oprócz założenia nieściśliwości obu faz oraz małych odkształceń, w teorii konsolidacji Terazghiego mają zastosowanie następujące założenia [Terzaghi i in., 1996]:
- Współczynnik filtracji pozostaje stały podczas procesu konsolidacji
- Relacja między współczynnikiem porowatości i naprężeniem efektywnym jest liniowa, co oznacza, że współczynniki ściśliwości a i m_v są stałe w czasie procesu konsolidacji
- Związek między współczynnikiem porowatości i naprężeniem efektywnym jest niezależny od czasu

7.1.2. Równanie ruchu płynu

Równania ruchu dla teorii konsolidacji Terazghiego dla obu faz przedstawił Gersewanow [1937], skorzystamy tutaj z nieco zmodyfikowanej formy podanej przez Piętkowskiego [1957]. Korzystając ze wskaźnika porowatości, początkową objętość wody i szkieletu w sześcianie elementarnym o bokach dx, dy, dz można zapisać w postaci

$$V^l = n dx dy dz = \frac{e}{1+e} dx dy dz$$

$$V^s = (1-n) dx dy dz = \frac{1}{1+e} dx dy dz .$$

Przez dolną powierzchnię sześcianu wpływa woda o wydatku na jednostkę powierzchni $v^l = v_{rz}^l n$, natomiast przez górną ściankę wypływa na jednostkę powierzchni $v^l + \frac{\partial v^l}{\partial z} dz$. Wypływająca woda, zgodnie z założeniem nieściśliwości obu faz, zostaje zastępowana przez poruszający się w kierunku przeciwnym szkielet:

$$v^l + v^s = 0, \tag{7.11}$$

Gdzie to v^s prędkość odpowiadająca ilości szkieletu, która została wtłoczona do elementarnego sześcianu $v^s = v_{rz}^s (1-n)$. w czasie dt ubytek wody z elementarnego sześcianu wyniesie:

$$\left[\left(v^l + \frac{\partial v^l}{\partial z} dz \right) dx dy - v^l dx dy \right] dt = \frac{\partial v^l}{\partial z} dx dy dz dt, \tag{7.12}$$

Objętość wody natomiast będzie wynosić

$$V_t^l = \frac{e}{1+e} dx dy dz - \frac{\partial v^l}{\partial z} dx dy dz dt \tag{7.13}$$

Przyrost objętości szkieletu wyniesie $\frac{\partial v^s}{\partial z} dx dy dz dt$, i analogicznie, jego objętość

$$V_t^s = \frac{1}{1+e} dx dy dz + \frac{\partial v^l}{\partial z} dx dy dz dt. \quad (7.14)$$

Wskaźnik porowatości w czasie dt zmieni się o $\frac{\partial e}{\partial t} dt$, zgodnie z (7.13) i (7.14):

$$e + \frac{\partial e}{\partial t} dt = \frac{\frac{e}{1+e} dx dy dz - \frac{\partial v^l}{\partial z} dx dy dz dt}{\frac{1}{1+e} dx dy dz + \frac{\partial v^l}{\partial z} dx dy dz dt} \quad (7.15)$$

Po odrzuceniu małej wyższego rzędu dt^2 , otrzymuje się równanie:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial v^l}{\partial z} (1+e)^2 \quad (7.16)$$

Które, przy założeniu, że w przybliżeniu $1+e_0 = 1+A$ ($A = e + ap$, traktowana jest jako stała, ze względu na niewielką wartość członu ap w stosunku do A) można zapisać również w postaci, gdzie ruch wody powiązany jest za wzrostem naprężeń efektywnych [Piętkowski 1957]:

$$\frac{\partial v^l}{\partial z} = \frac{a}{(1+A)^2} \frac{\partial \sigma'}{\partial t}, \quad (7.17)$$

7.1.3. Równanie ruchu szkieletu

Podczas jednoczesnego przemieszczania się wody ku górze i szkieletu w dół, na sześcian elementarny działają następujące siły [Piętkowski 1957]:

- siła ciężkości szkieletu na jednostkę objętości pomniejszona o siłę wyporu:

$$-(\gamma^s - \gamma^w) \frac{1}{1+e}, \quad (7.18)$$

gdzie γ^s to ciężar właściwy szkieletu a γ^w to ciężar właściwy wody.

- Nacisk szkieletu gruntowego $\frac{\partial \sigma'}{\partial z}$

- Ciśnienie sphywowe

$$\gamma^w I - \frac{\gamma^w}{g} \frac{\partial v^l}{\partial t} \quad (7.19)$$

- Siła bezwładności

$$\rho^s (1-n) dx dy dz \frac{dv_{rz}^s}{dt} \quad (7.20)$$

Pamiętając, że rzeczywista prędkość przesuwania się szkieletu gruntowego bez uwzględnienia przekroju porów wynosi:

$$v_{rz}^s = \frac{1}{1-n} v^s \quad (7.21)$$

Pochodna po czasie prędkości rozumianej jako wydatek na jednostkę powierzchni wyniesie:

$$\frac{dv_{rz}^s}{dt} = \left(\frac{1}{1-n} \right) \frac{dv^s}{dt} \quad (7.22)$$

Uwzględniając równanie (7.22) w (7.20):

$$\rho^s (1-n) dx dy dz \left(\frac{1}{1-n} \right) \frac{dv^s}{dt} = \frac{\gamma^s}{g} dx dy dz \frac{dv^s}{dt} \quad (7.23)$$

Przyrównując (7.18), (7.19) i (7.20) do (7.23), z uwzględnieniem (7.11) i po zastąpieniu $\frac{dv^l}{dt}$ przez $\frac{\partial v^l}{\partial t}$, dla bardzo małych prędkości filtracji otrzymuje się równanie:

$$-\frac{\gamma^s - \gamma^w}{1+e} + \frac{\partial \sigma'}{\partial z} + \gamma^w I - \frac{\gamma^w}{g} \frac{\partial v^l}{\partial t} = -\frac{\gamma^s}{g} \frac{\partial v^l}{\partial t} \quad (7.24)$$

Przez powierzchnię sześcianu elementarnego przesącza się do góry woda z prędkością filtracji v^l , jednocześnie w dół przemieszcza się szkielet z prędkością v_{rz}^s w ilości $v^s = -v^l$ razem z wodą w ilości $v_{rz}^s n = ev^s$. Zatem ilość wody przemieszczającej się pod wpływem spadku hydraulicznego wynosi:

$$v^l - ev^s = v^l (1+e) = kI \quad (7.25)$$

Stąd

$$I = \frac{1+e}{k} v^l \quad (7.26)$$

Zatem równanie (7.24) przybiera postać:

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial z} = \frac{\partial v^l}{\partial t} \frac{\gamma^s - \gamma^w}{g} + \frac{1+A}{k} \gamma^w q - \frac{\gamma^s - \gamma^w}{1+A} \quad (7.27)$$

Rozwiązanie równań ruchu (7.17) i (7.27) stanowi funkcja osiadania:

$$s = -ah \frac{\sigma'_t - \sigma'_0}{1+A} (1 - e^{\alpha t}), \quad (7.28)$$

która dla $t = \infty$ jest równa $s_\infty = -ah \frac{\sigma'_t - \sigma'_0}{1+A}$.

Model ten, mimo, iż przestarzały, jest do chwili obecnej szeroko wykorzystywany w mechanice gruntów. Jego podstawową wadą jest fakt, że opisuje jedynie jednowymiarową konsolidację, oraz zakłada nieściśliwość obu faz ośrodka, co jest oczywiście nieprawdą w odniesieniu do rzeczywistych gruntów. Ponadto model ten nie definiuje żadnych stałych materiałowych dla ośrodka. Nowakowski [2015] zwraca uwagę, że w świetle swoich ograniczeń (nieściśliwy szkielet i nieściśliwy, nielepki płyn) teoria ta nie powinna mieć zastosowania w mechanice gruntów i skał. Szymański [2007] jako powód popularności tej teorii, pomimo rozbieżności modelu z gruntem rzeczywistym, podaje łatwość wyznaczenia jej stałych materiałowych.

7.2. Teoria porospężystości Biota-Darcy'ego

7.2.1. Zarys teorii porospężystości

Bardziej ogólną, trójwymiarową teorię konsolidacji, obecnie znaną jako teoria porospężystości przedstawił w 1935r Biot. Ma ona zastosowanie nie tylko dla gruntów, lecz również dla ogółu ośrodków porowatych, w tym anizotropowych, wypełnionych płynem, jak np. niektóre tkanki biologiczne. Teoria ta następnie była rozwijana przez Biota, Biota i Willisa i wielu innych. Należy wspomnieć, że o ile same równania teorii nie budzą zastrzeżeń, tak ich współczynniki są w różny sposób interpretowane przez badaczy, stąd w literaturze można spotkać różne ich definicje, również w pracach Biota [1941,1955].

Układ równań zawierający równania równowagi uwzględniające podane przez Biota związki dla obu faz uzupełniony równaniem filtracji Darcy'ego zastosowanym do opisu zmiany zawartości płynu w ośrodku (wydatku) tworzą model Biota-Darcy'ego.

Podstawowe założenia pierwotnej teorii Biota [1941] były następujące:

- ❑ Materiał jest izotropowy (praca Biota z 1955r przedstawia również teorię dla ośrodków anizotropowych),
- ❑ Relacje naprężenie-odkształcenie są liniowe i odwracalne,
- ❑ Występują małe przemieszczenia,
- ❑ płyn wypełniający pory ośrodka jest nieściśliwy (w kolejnych pracach Biot zakładał już, że płyn jest lepki i ściśliwy),
- ❑ płyn porowy może zawierać bąbelki gazu,
- ❑ płyn przepływa przez pory ośrodka zgodnie z prawem Darcy'ego.

Biot potraktował szkielet jako ośrodek sprężysty, w którym relacje naprężenie-odkształcenie opisać można za pomocą prawa Hooke'a, oraz założył, że na odkształcenie szkieletu ma wpływ również naprężenie w płynie. Odkształcenie ośrodka opisał równaniem:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2G} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{\sigma \delta_{ij}}{3H}, \quad (7.29)$$

gdzie ε_{ij} to odkształcenie ośrodka, σ_{ij} to tensor naprężeń w szkielecie, G to moduł Kirchoffa, ν to współczynnik Poissona, E to moduł Younga, σ to naprężenie w płynie $\sigma = -pf$, gdzie p to ciśnienie w płynie (znak minus wynika z konwencji znakowania w teorii sprężystości – naprężenia ściskające mają znak ujemny) a f to porowatość powierzchniowa (można przyjąć, że jest on równa porowatości objętościowej), natomiast H jest miarą ściśliwości gruntu pod wpływem zmiany ciśnienia płynu. Wykorzystywane przez ten model naprężenia w płynie i w szkielecie, odniesione są do powierzchni ośrodka. Określane są one jako naprężenia „rozmyte” lub „cząstkowe”.

W modelach opartych na klasycznym modelu Biota, występują 2 równania konstytutywne. Biot posługiwał się stosunkowo łatwą do pomierzenia w trakcie procesu konsolidacji zmianą zawartości płynu w porach ośrodka, którą opisał równaniem (Biot, 1941):

$$\zeta = \frac{\sigma_{ii}}{3H} + \frac{\sigma}{R}, \quad (7.30)$$

Gdzie ζ to zmiana zawartości płynu w porach ośrodka, a R określa zmianę zawartości płynu wskutek zmiany ciśnienia.

Dla odkształceń objętościowych, przy użyciu naprężenia średniego $\sigma_m = \sigma_{ii} / 3$ związki konstytutywne wg Biota przyjmują postać:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\sigma_m}{K} + \frac{\sigma}{H}, \\ \zeta &= \frac{\sigma_m}{H} + \frac{\sigma}{R}, \end{aligned} \quad (7.31)$$

gdzie K to moduł sprężystości objętościowej szkieletu.

W 1955r Biot przeddefiniował swoją teorię, oraz zaadaptował ją dla ośrodków anizotropowych. Zmieniła się również definicja podanych przez niego stałych materiałowych, skąd w wielu pracach dotyczących porosprężystości można spotkać różne ich definicje. Definicje wszystkich stałych z różnych etapów pracy Biota i zależności między nimi zebrali i opisali Detournay i Cheng [1993].

Dla szkieletu izotropowego, związki opisujące zależność naprężenia od odkształcenia, zapisane za pomocą oznaczeń przyjętych przez Biota [1955] mają postać:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= 2N \varepsilon_{ij} + (A\varepsilon + Q\zeta) \delta_{ij}, \\ \sigma \delta_{ij} &= Q\varepsilon \delta_{ij} + R\vartheta \delta_{ij},\end{aligned}\tag{7.32}$$

Gdzie A i N to współczynniki dla ośrodka porowatego, odpowiadające stałym Lamégo λ i μ dla ośrodka sprężystego, Q to współczynnik określający ilość płynu, która może być wtłoczona do ciała bez zmiany jego objętości, $\frac{1}{Q} = \frac{1}{R} - \frac{\alpha}{H}$. Wygodną dla obliczeń formą równań, której używają m.in.

Derski [1982] i Strzelecki i in. [2008], jest postać uzyskana przez eliminację z pierwszego z równań (7.32) zmiany objętości płynu za pomocą drugiego z równań (7.32):

$$\sigma_{ij} = 2N \varepsilon_{ij} + \left(M_B \varepsilon + \frac{Q}{R} \sigma_w \right) \delta_{ij},\tag{7.33}$$

gdzie $M_B = A - \frac{Q}{R}$.

Zmiana zawartości płynu w porach wynika, oprócz jego ściśliwości, ze zmiany objętości porów, czyli wydatku. Prędkość wypływu opisuje równanie Darcy'ego:

$$v = -k \operatorname{grad} \left(-\frac{\sigma}{\gamma^w f_0} + z \right),\tag{7.34}$$

gdzie v to prędkość filtracji, $v = v_{rz} f$. Jeśli $\sigma = -p f_0$ i $v_{rz} = \dot{\theta}$, to przy założeniu stałego współczynnika filtracji i porowatości, zgodnie z drugim z równań (7.32) można napisać [Verruijt, 2015]:

$$\frac{k}{\rho^f g f_0} \nabla^2 \sigma = \alpha \dot{\varepsilon} - \frac{S}{f_0} \dot{\sigma}.\tag{7.35}$$

7.2.2. Naprężenia efektywne w teorii konsolidacji Biota

W celu uproszczenia zapisu i możliwości porównania teorii konsolidacji Biota z teorią Terzagiego, pierwsze z równań (7.31) można napisać w postaci

$$K\varepsilon = \sigma_m + \alpha\sigma,\tag{7.36}$$

gdzie $\alpha = K/H$, to współczynnik naprężeń efektywnych Biota. W pracy [1957] Biot i Willis przedstawili następującą definicję współczynnika α :

$$\alpha = \frac{Q+R}{R} n = 1 - \frac{\delta}{\kappa} = 1 - \frac{K^d}{K^s}\tag{7.37}$$

Gdzie δ to ściśliwość w teście z odpływem, natomiast κ to ściśliwość w teście bez odpływu,

K^d to moduł sprężystości objętościowej ośrodka dwufazowego z odpływem, natomiast K^s to moduł sprężystości objętościowej szkieletu. Nur i Byerlee [1971] zaproponowali dla tak określonego współczynnika Biota uogólnioną postać równania (7.1) w postaci:

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - \alpha p \delta_{ij}, \quad (7.38)$$

gdzie σ'_{ij} to naprężenie efektywne w rozumieniu teorii porosprężystości, a p to ciśnienie porowe. Dla naprężenia izotropowego $\sigma = \sigma' - \alpha p$. Gdy współczynnik $\alpha = 1$ (szkielet nieściśliwy), zagadnienie sprowadza się do modelu Terzagiego, natomiast gdy $\alpha = 0$ ($K^d = K^s$) rozwiązanie sprowadza się do rozwiązania dla ośrodka sprężystego bez porów. W literaturze można spotkać także inne definicje współczynnika naprężeń efektywnych Biota: $\alpha = n$ [Biot 1955], $\alpha = 1 - \frac{K^d}{K^s}(1 - n)$ [Lade i De Boer 1997, Suklje 1969].

Jeśli analogicznie postąpi się z drugim z równań (7.31) i wprowadzi $B = R/H$, można otrzymać:

$$R\zeta = \sigma + \frac{\sigma_m}{B}. \quad (7.39)$$

Gdzie B to parametr Skempton, $B = \Delta p / \Delta \sigma$ [Skempton 1954] – w przypadku teorii Terzagiego, gdzie pomijana jest ściśliwość płynu i szkieletu, $B = 1$. Stąd w literaturze czasem spotykana jest następująca postać równań konstytutywnych [Detournay, Cheng 1993]:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{K} (\sigma_m + \alpha \sigma), \\ \zeta &= \frac{\alpha}{K} \left(\sigma_m + \frac{\sigma}{B} \right). \end{aligned} \quad (7.40)$$

Układ równań (7.40) można zapisać też przy użyciu modułu Biota M_B . Jest on odwrotnością współczynnika pojemności S , definiowanego, jako zmiana objętości płynu w wyniku zmiany ciśnienia porowego przy stałym odkształceniu objętościowym i w stałej temperaturze, za Verruijtem [2015]:

$$\frac{1}{M_B} = S = \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial p} \right|_{\varepsilon} = \frac{n}{K_f} + \frac{\alpha - n}{K}. \quad (7.41)$$

Równania konstytutywne mają wtedy postać:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \alpha M_B \zeta - K_u \varepsilon, \\ \sigma &= \alpha M_B \varepsilon - M_B \zeta. \end{aligned} \quad (7.42)$$

7.2.3. Alternatywne podejścia do teorii porosprężystości

Przedstawione powyżej równania stanowią klasyczny model Biota-Darcy'ego. Nieco inny od przedstawionego powyżej opis, przedstawił Coussy [2007,2010]. Zamiast zmiany zawartości płynu, używa on w związkach konstytutywnych zmiany porowatości. Dodatkowo, wyróżnił on porowatość w opisie Lagrange'a (oznaczona tu jako f) i Eulera (oznaczana jako n). Według tego opisu, jeśli objętość $d\Omega$ zmienia się w miarę deformacji, to w danej chwili pory zajmują objętość $nd\Omega$ natomiast w odniesieniu do stanu początkowego można ją przedstawić jako $f\Omega_0$. Zmianę porowatości w procesie odkształcenia oznaczyć można wtedy jako $\varphi = f - f_0$. Odkształcenie ośrodka definiowane jest w postaci:

$$\varepsilon = (1 - f_0)\varepsilon_s + \varphi, \quad (7.43)$$

gdzie ε to odkształcenie objętościowe ośrodka a ε_s to odkształcenie objętościowe szkieletu. w przypadku ośrodka, w którym szkielet jest słabo ściśliwy i można założyć jego nieodkształcalność, $\varepsilon = \varphi$. Można wtedy napisać, że $\varepsilon = (e - e_0)/(1 + e_0)$, gdzie e to wskaźnik porowatości. Naprężenie przenoszone przez ośrodek jest sumą naprężeń cząstkowych. Bilans energii swobodnej w ośrodku Coussy przedstawia wyrażeniem:

$$\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} - \varphi dp - d\eta = 0, \quad (7.44)$$

gdzie η to funkcja stanu uzyskana w wyniku transformacji Legendre'a, $\eta = \chi - p\varphi$, s_{ij} to naprężenia ścinające, e_{ij} to odkształcenie postaciowe a φ to zmiana porowatości wg opisu Lagrange'a (jest tu ona parametrem stanu). Wg Coussy'ego powodem odkształcenia ośrodka jest, oprócz odkształcenia szkieletu zmiana jego porowatości: $\varepsilon = (1 - f_0)\varepsilon_s + \varphi$, gdzie f_0 to porowatość początkowa, zatem dla nieodkształcalnego szkieletu odkształcenie ośrodka wynika jedynie ze zmiany jego porowatości: $\varepsilon = \varphi$. Równania stanu, od których pochodzą związki konstytutywne mają u niego postać:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \varphi = -\frac{\partial \eta}{\partial p}. \quad (7.45)$$

Dla warunków izotermicznych równania konstytutywne mają wtedy postać:

$$\sigma_{ij} = \left(K - \frac{2}{3}G \right) \varepsilon \delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} - \alpha p \delta_{ij}, \quad (7.46)$$

$$\varphi = \alpha \varepsilon + \frac{p}{N},$$

gdzie α to współczynnik Biota, N jest współczynnikiem określającym, jaki wpływ ma naprężenie w płynie na zmianę objętości porów, $N^{-1} = (\alpha - f_0) / K$.

Coussy proponuje również zapis pierwszego z równań w postaci:

$$\sigma_{ij}'' = \left(K - \frac{2}{3}G \right) \varepsilon \delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij}, \quad (7.47)$$

gdzie $\sigma_{ij}'' = \sigma_{ij} + \alpha p \delta_{ij}$, jest naprężeniem efektywnym w ujęciu teorii Biota. Coussy [2010] zaznacza, że jeśli szkielet jest nieściśliwy, $K \rightarrow \infty$, więc $\alpha \rightarrow 1$, $N^{-1} \rightarrow 0$, otrzymujemy więc wspomnianą wcześniej zależność $\varepsilon = \varphi$ a naprężenie efektywne σ_{ij}'' redukuje się do naprężenia efektywnego w rozumieniu Terzagiego.

Zmianę zawartości płynu autor uzyskuje korzystając z zależności określającej masę płynu w porach $m^f = \rho^f \varphi$, jej zmiana wyniesie $dm_f = \varphi d\rho_f + \rho_f d\varphi$, zatem zmiana objętości płynu to $d\zeta = \frac{dm_f}{\rho_f} = \varphi \frac{d\rho_f}{\rho_f} + d\varphi$, skąd eliminując zmianę porowatości $d\varphi$ można uzyskać:

$$\frac{dm_f}{\rho_f} = b_{ij} d\varepsilon_{ij} + \frac{1}{M} dp. \quad (7.48)$$

Kolejną formą interpretacji równań, prezentują np. Derski [1975], Strzelecki i in [2008], którzy zamiast zawartości płynu w porach ośrodka ϑ posługują się zmianą objętości płynu θ . Zmiana objętości zajmowanej przez płyn wynika, oprócz jego ściśliwości, ze zmiany objętości porów. Opis ruchu płynu w ośrodku przedstawia zasada zachowania pędu uwzględniająca równanie Darcy'ego.

Wilmański [2006] podał w wątpliwość część założeń Biota, na przykład sprzężenie obu faz ośrodka, gdzie bez uwzględnienia gradientu porowatości, ośrodek można rozpatrywać, jako prostą mieszaninę, gdzie naprężenie w danej fazie, zależy wyłącznie od odkształceń tej fazy. Za niezgodne z zasadą materialnej obiektywności, według której związki konstytutywne powinny być niezmiennie bez względu na punkt odniesienia, Wilmański uznał też człony sprzężenia dynamicznego obu faz, które zależą od układu odniesienia i materiału. Zarzucił również, że model Biota nie opisuje zmian porowatości. Aby móc wykazać uzależnienie naprężenia od odkształceń obu faz i zachować zgodność z drugą zasadą termodynamiki, przedstawił model, w którym równania konstytutywne pokazują zależność naprężenia również od gradientu porowatości:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^0 + 2\mu\varepsilon_{ij} + (\lambda\varepsilon + Q\theta) \delta_{ij} - N(f - f_0) \delta_{ij} \\ \sigma &= \sigma^0 + \rho^f R\theta + Q\varepsilon + N_p(f - f_0), \end{aligned} \quad (7.49)$$

gdzie N_p to nowa stała materiałowa, określająca wpływ zmiany porowatości na naprężenia; człon ten może zaniknąć w modelu liniowym. Ostatecznie Wilmański uznał jednak, że opisane wady (które

występują w wielu liniowych modelach, choćby w klasycznej teorii sprężystości) nie dyskwalifikują modelu Biota, gdyż uwzględnienie opisanych przez niego efektów nie ma dużego wpływu na rezultaty.

Teoria porosprężystości, oprócz modelowania materiałów takich jak grunty i skały, znajduje również zastosowanie przy modelowaniu innych ośrodków porowatych, np. tkanek biologicznych takich, jak kości [Cowin 1999] ściany tętnic [Simon i in 1993], skóra [Mark i in 1994], mięsień sercowy [Yang i Taber 1991], mózg [Peña 1996], Płuca [Berger i in, 2016] czy torebka stawowa [Mow i in. 1986], gdzie tkanka jest traktowana jako ośrodek dwufazowy złożony z najczęściej nieściśliwych, szkieletu oraz płynu tkankowego. Interesujące podejście zaprezentowali Peña i in. [1998], którzy przedstawili teoretyczny model zakładający, że tkanka może być traktowana, jako materiał porosprężysty, złożony ze szkieletu (będącego również materiałem porosprężystym, zbudowanym z polimerów, takich jak kolagen) wypełniony, oprócz płynu tkankowego, porosprężystymi komórkami, pozwalający na zamodelowanie m.in. różnego ciśnienia płynu w komórkach i płynu tkankowego. Według tych autorów w tkankach twardych, takich, jak tkanka łączna, obciążenia przenoszone są głównie przez szkielet, natomiast w miękkich tkankach, takich, jak tkanka nabłonkowa, przez cytoszkielet. Dla skali komórek szkielet stanowią organelle, natomiast płyn jest płynem wewnątrzkomórkowym. Podczas procesu konsolidacji płyn wewnątrzkomórkowy wypływa przez ściany komórkowe do przestrzeni tkanki. Dokładniejszy opis cytoplazmy jako materiału porosprężystego przedstawili Moendarbary i in [2013]. Roose i in. [2003] Wykorzystali również model porosprężystości do zamodelowania naprężeń, jakie wywiera na otaczającej tkance rosnący guz.

7.2.4. Równania ciągłości przepływu

Równanie ciągłości przepływu dla ośrodka dwufazowego przedstawione zostanie przy użyciu następujących założeń i oznaczeń:

- Płyn porusza się w porach ośrodka z prędkością rzeczywistą \vec{v}_{rzecz}^f . Rozpatrując ośrodek składający się z płynu i szkieletu najczęściej używa się prędkości odniesionej do całego przekroju $\vec{v}^f = \vec{v}_{rzecz}^f f_A$, gdzie f_A to porowatość powierzchniowa. Podobnie określa się prędkość szkieletu: $\vec{v}^s = \vec{v}_{rzecz}^s (1 - f_A)$, gdzie \vec{v}_{rzecz}^s to prędkość rzeczywista szkieletu,; która jest również prędkością, z którą porusza się ośrodek (płyn + szkielet) przy braku przepływu płynu względem szkieletu. Płyn względem szkieletu porusza się z prędkością relatywną $\vec{v}_{rzecz}^r = \vec{v}_{rzecz}^f - \vec{v}_{rzecz}^s$, w odniesieniu do całego przekroju $\vec{v}^r = \vec{v}_{rzecz}^r f_A$. Składowe prędkości płynu, szkieletu, oraz prędkości względnej oznaczane będą odpowiednio jako v_i^f, v_i^s i v_i^r dla prędkości odniesionych do powierzchni ośrodka, oraz $v_{rzecz,i}^f, v_{rzecz,i}^s$ i $v_{rzecz,i}^r$ dla prędkości rzeczywistych.
- Porowatość powierzchniowa jest przyjmowana jako równa porowatości objętościowej $f_A = n$. Jest ona wielkością stałą dla określonego ośrodka. Niektórzy badacze, np. Kubik [1986], Kowalski [1992], Kubik i Cieszko [2005] uważają porowatość objętościową za niewystarczającą i proponują wykorzystanie 2 parametrów opisujących porowatość: porowatość objętościową i parametr struktury .
- Zgodnie z oznaczeniami wprowadzonymi przez Biota, gęstość ośrodka $\rho = \rho_{11} + 2\rho_{12} + \rho_{22}$. Masa szkieletu na jednostkę objętości wynosi $\rho_1 = (1 - n)\rho_s$, gdzie ρ_s to gęstość szkieletu, według Biota [1956] jest ona równa $\rho_1 = \rho_{11} + \rho_{12}$. Masa płynu w jednostce objętości jest

natomiast równa $\rho_2 = n\rho_1$, według Biota [1956] jest on równa $\rho_2 = \rho_{12} + \rho_{22}$, stąd $\rho = \rho_1 + \rho_2$. Współczynnik ρ_{12} określa dynamiczne sprzężenie faz, $\rho_{12} < 0$.

- Energia kinetyczna ośrodka dwufazowego wyraża się wzorem [Biot, 1956]:

$$2K = \int_{\Omega} (\rho^{11} v_i^s v_i^s + 2\rho^{12} v_i^s v_i^f + \rho^{22} v_i^f v_i^f) d\Omega. \quad (7.50)$$

- Naprężenia odnoszone są do powierzchni całkowitej ośrodka, za naprężenia ujemne uznaje się naprężenia ściskające, zatem naprężenie w płynie $\sigma = -pn$, gdzie p to ciśnienie płynu.
- Pory ośrodka dwufazowego wzajemnie się komunikują – nie ma por zamkniętych.
- Płyn jest ściśliwym, lepkiem płynem, newtonowskim.
- Podczas przepływu płynu względem szkieletu na skutek działania lepkości, na styku obu faz następuje dyssypacja energii – jest ona funkcją kwadratową prędkości względnej cieczy:

$$2D = \int_{\Omega} b v_i^r v_i^r d\Omega, \quad (7.51)$$

gdzie b to współczynnik uśrednionych oporów lepkich cieczy zależny od lepkości płynu i średnicy ziaren ośrodka porowatego.

W celu wyprowadzenia równań ciągłości przepływu dla ośrodka dwufazowego oraz płynu przesączającego się przez jego pory, można, zgodnie z pracą Strzeleckiego i in. (2008) skorzystać z reprezentatywnego elementu REV (Representative element of Volume) wypełnionego ośrodkiem. Element ten ma objętość Ω , ograniczony jest powierzchnią S , natomiast \vec{n} jest wektorem jednostkowym skierowanym normalnie i na zewnątrz do powierzchni S . Ośrodek (szkielet i płyn) przemieszcza się przez ścianki elementu z prędkością \vec{v}_{rzecz}^s .

Masa przemieszczającego się przez powierzchnię S ośrodka jest równa:

$$\int_S \rho v_{rzecz,i}^s n_i dS = \int_S \rho_1 v_{rzecz,i}^s n_i dS + \int_S \rho_2 v_{rzecz,i}^s n_i dS = \int_S \rho_s v_i^s n_i dS + \int_S \rho_l v_i^s n_i dS, \quad (7.52)$$

jednocześnie ma miejsce przepływ płynu względem szkieletu z prędkością $\vec{v}_{rzecz}^r = \vec{v}_{rzecz}^f - \vec{v}_{rzecz}^s$. Masa przepływającego płynu jest równa:

$$\int_S \rho_2 v_{rzecz,i}^r n_i dS = \int_S \rho_l v_i^r n_i dS. \quad (7.53)$$

Zmiana masy szkieletu i płynu przepływających przez powierzchnię S ograniczającą element w jednostce czasu jest równa:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\rho^1 + \rho^2)}{\partial t} d\Omega. \quad (7.54)$$

Sumarycznie można zatem napisać:

$$\int_S \rho v_{rzecz,i}^s n_i dS + \int_S \rho_l (v_i^f - v_i^s) n_i dS + \int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega = 0. \quad (7.55)$$

Korzystając z twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego:

$$\int_\Omega (\rho v_{rzecz,i}^s)_{,i} d\Omega + \int_\Omega (\rho_l v_i^r)_{,i} d\Omega + \int_\Omega \left(\frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2}{\partial t} \right) d\Omega = 0,$$

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho v_{rzecz,i}^s{}_{,i} + \rho_{,i} v_{rzecz,i}^s \right) d\Omega = - \int_S (\rho_l v_i^r)_{,i} d\Omega. \quad (7.56)$$

Korzystając z definicji pochodnej materialnej $\left(\frac{D^s}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_{rzecz,i}^s \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$, oraz faktu, że $v_{rzecz,i}^s{}_{,i} = \dot{\epsilon}$, w układzie lokalnym można zapisać równanie ciągłości ośrodka w postaci:

$$\frac{D^s \rho}{Dt} + \rho \dot{\epsilon} = -(\rho_l v_i^r)_{,i}. \quad (7.57)$$

Jeśli rozpatrujemy wyłącznie ruch płynu porowego względem szkieletu, równanie ciągłości zawiera jedynie wpływ masy płynu i zmianę jego ilości w czasie:

$$\int_S \rho_2 v_{rzecz,i}^s n_i dS + \int_S \rho_l v_i^r n_i dS + \int_\Omega \frac{\partial \rho_2}{\partial t} d\Omega = 0. \quad (7.58)$$

Korzystając z twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego:

$$\int_\Omega (\rho_2 v_{rzecz,i}^s)_{,i} d\Omega + \int_\Omega (\rho_l v_i^r)_{,i} d\Omega + \int_\Omega \frac{\partial \rho_2}{\partial t} d\Omega = 0,$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \rho_{2,i} v_{rzecz,i}^r + \rho_2 v_{rzecz,i,i}^r = -(\rho_2 v_{rzecz,i}^s)_{,i}. \quad (7.59)$$

Korzystając z pochodnej materialnej $\left(\frac{D^r}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_{rzecz,i}^r \frac{\partial}{\partial x^i} \right)$, w układzie lokalnym można zapisać równanie ciągłości płynu:

$$\frac{D^r \rho_2}{Dt} + \rho_2 (\dot{\theta} - \dot{\epsilon}) = -(\rho_2 v_{rzecz,i}^s)_{,i}. \quad (7.60)$$

Zakładając brak ruchu szkieletu $v_{rzecz,i}^s = 0$, czyli $v_{rzecz,i}^r = v_{rzecz,i}^f$. Wtedy:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \rho_{2,i} v_{rzecz,i}^f + \rho_2 v_{rzecz,i}^f = 0. \quad (7.61)$$

Stąd równanie ciągłości płynu ma postać:

$$div(\rho_i v_i^f) = -\frac{\partial(\rho_i n)}{\partial t}, \quad (7.62)$$

która zgodna jest z postacią równania ciągłości dla modelu hydrodynamicznego przepływu płynu przez ośrodek porowaty.

7.2.5. Zasada zachowania pędu

Pęd dla obu faz ośrodka i działające na nie siły bezwładności określić można używając założeń podanych przez Biota [1956]. Równanie energii kinetycznej wg Biota ma postać:

$$2K = \int_{\Omega} (\rho^{11} v_{rzecz,i}^s v_i^s + 2\rho^{12} v_{rzecz,i}^s v_{rzecz,i}^f + \rho^{22} v_{rzecz,i}^f v_{rzecz,i}^f) d\Omega, \quad (7.63)$$

stąd pęd szkieletu oraz płynu ośrodka dwufazowego można otrzymać przez zróżniczkowanie energii kinetycznej względem prędkości:

$$P_i^s = \frac{\partial K}{\partial v_{rzecz,i}^s} = \int_{\Omega} (\rho^{11} v_{rzecz,i}^s + \rho^{12} v_{rzecz,i}^f) d\Omega, \quad (7.64)$$

$$P_i^f = \frac{\partial K}{\partial v_{rzecz,i}^f} = \int_{\Omega} (\rho^{12} v_{rzecz,i}^s + \rho^{22} v_{rzecz,i}^f) d\Omega.$$

Siły bezwładności szkieletu i płynu opisują następujące zależności:

$$B_i^s = \int_{\Omega} \left(\rho^{11} \frac{\partial v_{rzecz,i}^s}{\partial t} + \rho^{12} \frac{\partial v_{rzecz,i}^f}{\partial t} \right) d\Omega, \quad (7.65)$$

$$B_i^f = \int_{\Omega} \left(\rho^{12} \frac{\partial v_{rzecz,i}^s}{\partial t} + \rho^{22} \frac{\partial v_{rzecz,i}^f}{\partial t} \right) d\Omega.$$

Funkcja dyssypacji energii podczas przepływu płynu przez pory ciała stałego ma postać:

$$2W_d = \int_{\Omega} b v_{rzecz,i}^r v_{rzecz,i}^r d\Omega, \quad (7.66)$$

gdzie b oznacza uśrednioną siłę oporu lepkiego, a W_d funkcję dyssypacji w postaci formy kwadratowej zależnej od prędkości relatywnej $\mathbf{v}^r = (v_{rzecz.i}^r)$.

Można określić siły oporu lepkiego działające na szkielet i płyn obliczając:

$$\begin{aligned} M_i^s &= \frac{\partial W_d}{\partial v_{rzecz.i}^s} = - \int_{\Omega} b v_{rzecz.i}^r d\Omega, \\ M_i^f &= \frac{\partial W_d}{\partial v_{rzecz.i}^f} = \int_{\Omega} b v_{rzecz.i}^r d\Omega. \end{aligned} \quad (7.67)$$

Zasada zachowania pędu dla fazy stałej ośrodka ma postać:

$$\int_S \sigma_{ij} n_j dS + \int_{\Omega} X_i (\rho - \rho_2) d\Omega = - \int_{\Omega} b v_{rzecz.i}^r d\Omega + \int_{\Omega} \left(\rho^{11} \frac{\partial v_{rzecz.i}^s}{\partial t} + \rho^{12} \frac{\partial v_{rzecz.i}^f}{\partial t} \right) d\Omega. \quad (7.68)$$

Po zastosowaniu twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego, związek lokalny można zapisać w postaci:

$$\sigma_{ij,j} + X_i \rho_2 = -b v_{rzecz.i}^r + \rho^{11} \frac{\partial v_{rzecz.i}^s}{\partial t} + \rho^{12} \frac{\partial v_{rzecz.i}^f}{\partial t}. \quad (7.69)$$

Dla fazy płynnej ośrodka zasada zachowania pędu będzie miała postać:

$$\int_S \sigma n_i dS + \int_{\Omega} X_i \rho_2 d\Omega = \int_{\Omega} b v_{rzecz.i}^r d\Omega + \int_{\Omega} \left(\rho^{12} \frac{\partial v_{rzecz.i}^s}{\partial t} + \rho^{22} \frac{\partial v_{rzecz.i}^f}{\partial t} \right) d\Omega \quad (7.70)$$

Związek lokalny po zastosowaniu zasady Gaussa-Ostrogradskiego ma postać:

$$\sigma_{,i} + X_i \rho_2 = b v_{rzecz.i}^r + \rho^{12} \frac{\partial v_{rzecz.i}^s}{\partial t} + \rho^{22} \frac{\partial v_{rzecz.i}^f}{\partial t}. \quad (7.71)$$

Równanie dla obu faz ośrodka łącznie ma postać:

$$\sigma_{ij,j} + \sigma_{,i} + X_i \rho = \rho^{11} \frac{\partial v_{rzecz.i}^s}{\partial t} + \rho^{12} \left(\frac{\partial v_{rzecz.i}^f}{\partial t} + \frac{\partial v_{rzecz.i}^s}{\partial t} \right) + \rho^{22} \frac{\partial v_{rzecz.i}^f}{\partial t}. \quad (7.72)$$

Zakładając proces quasi statyczny, gdzie przyspieszenia obu faz są małe, więc $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + \sigma_{,i} + X_i \rho &= 0, \\ \sigma_{,i} + X_i \rho_2 &= b v_{rzecz.i}^r. \end{aligned} \quad (7.73)$$

Z ostatniego równania można otrzymać prędkość względną płynu:

$$v_{rzecz.i}^r = \frac{1}{b}(\sigma_{,i} + X_i \rho_2) = \frac{1}{b}(\sigma_{,i} - g \rho_2) = -\frac{\rho_2 g}{b} \left(-\frac{\sigma_{,i}}{\rho_2 g} + 1 \right). \quad (7.74)$$

Zakładając definicję wysokości hydraulicznej H zgodnie z równaniem Bernoulliego:

$$H = \frac{E}{mg} = h + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}, \quad (7.75)$$

przy założeniu braku wpływu energii kinetycznej na przepływ płynu w ośrodku porowatym w postaci:

$$H = \frac{p}{\rho_l g} + x_3, \quad (7.76)$$

zgodnie z założeniem, że $\rho_2 = f \rho_l$ i $\sigma = -f p$, dla stałej porowatości $p_{,i} = -\frac{\sigma_{,i}}{f}$:

$$H_{,i} = -\frac{\sigma_{,i}}{\rho_2 g} + 1. \quad (7.77)$$

Wzór na prędkość względną płynu można zapisać w postaci:

$$v_i^r = -\frac{f^2 \rho_l g}{b} H_{,i}. \quad (7.78)$$

Porównując otrzymane równanie z prawem Darcy'ego:

$$v_i^r = -k H_{,i}, \quad (7.79)$$

można pokazać, że prawo Darcy'ego jest prostą konsekwencją zasady zachowania pędu dla przypadku przepływów laminarnych płynu przez ośrodek porowaty. Wprowadzając oznaczenia: $k = \frac{f^2 \rho_l g}{b}$,

można określić współczynnik oporu lepkiego $b = \frac{f^2 \rho_l g}{k}$.

7.3. Teoria porosprężystości w świetle teorii homogenizacji

Równania konstytutywne, odpowiadające równaniom dla teorii porosprężystości można również utrzymać za pomocą metod teorii homogenizacji. Teoria homogenizacji pozwala na określenie cech makroskopowych niejednorodnego ośrodka (zwanego ośrodkiem makroskopowo-ekwiwalentnym), takich, jak związki konstytutywne, równania bilansu wielkości fizycznych i parametry efektywne na

podstawie znajomości jego mikrostruktury: geometrii, równań równowagi, równań konstytutywnych oraz warunków brzegowych dla reprezentatywnego elementu objętości REV (ang. representative element of volume) [Strzelecki i in, 2008].

Metody teorii homogenizacji podzielić można na metody zakładające periodyczność lub losowość ośrodka. Matematyczne podstawy homogenizacji struktur periodycznych (HSP) przedstawili Bensoussan, Lions i Papanicolaou [1978], metoda następnie rozwijana była przez Sanchez-Palencię [1980] i in. z metod zakładających losowość ośrodka wymienić można metodę modelowania stochastycznego Krönera [1986], metody samostabilizujące [Zaoui 1987], Metody Gelhara [1987], Matherona [1967], oraz przedstawiane przez licznych autorów metody średnich.

Teoria asymptotycznej homogenizacji posługuje się dwiema skalami – mikroskopową, będącą skalą niejednorodności, oraz makroskopową, dla ośrodka ekwiwalentnego (taktowanego jako jednorodny).

Stosunek skali opisuje parametr $\varepsilon = \frac{l}{L}$, gdzie l jest wymiarem REV, natomiast L jest wymiarem w skali makroskopowej. Warunkiem możliwości skorzystania z tej metody jest rozdzielność skal, zatem parametr ε musi spełniać warunek $\varepsilon < 0.1$ [Strzelecki i in. 1996]. Wielkości L odpowiada zmienna X , natomiast wielkości l – zmienna Y . Dla obydwu układów definiuje się zmienne bezwymiarowe: w skali makro $x = X / L$ (tzw. zmienna wolna) i w skali mikro $y = Y / l$ (tzw. zmienna szybka), przy pokrywającym się układzie współrzędnych można napisać $x = y\varepsilon$ gdy układem odniesienia jest skala mikro, i $y = x / \varepsilon$, gdy układem odniesienia jest skala makro. Operator różniczkowy teorii homogenizacji ma postać

$$\frac{df}{dx_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial f}{\partial y_i} \quad (7.80)$$

Rozwiązanie zagadnienia polega na znormalizowaniu równania opisującego proces, czyli sprowadzeniu wartości fizycznych do bezwymiarowych funkcji parametru ε , następnie rozwinięciu asymptotycznym funkcji:

$$f(x, y) = f^{(0)}(x, y) + \varepsilon f^{(1)}(x, y) + \varepsilon^2 f^{(2)}(x, y) + \dots + \varepsilon^i f^{(i)}(x, y), \quad (7.81)$$

i po identyfikacji członów odpowiadających danej potędze parametru ε i założeniu $\varepsilon \rightarrow 0$, rozwiązaniu otrzymanych równań różniczkowych i powrocie do wartości fizycznych.

Wśród licznych prac dotyczących ośrodków porowatych wymienić można rozwiązanie zagadnienia izotermicznego przepływu cieczy przez ośrodek porowaty przez Ene i Sanchez-Palencię [1975], pracę dotyczącą drgań [Sanchez-Palencia 1980], rozwiązanie przepływu gazu [Auriault, Strzelecki i Bauer 1990], rozwiązanie przewodzenia ciepła w ośrodku porowatym [Auriault 1983], rozwiązania transportu zanieczyszczeń przez dyfuzję [Auriault i Lewandowska 1993] i adwekcję [Auriault i Lewandowska 1996]. Zagadnieniami dla skali wielokrotnej zajmowali się Auriault [1991], Royer [1996]. Rozwiązanie zagadnienia propagacji fal w ośrodku porosprężystym, odpowiadające modelowi M.A. Biota uzyskali Burridge i Keller [1982]. Wpływem mikrostruktury na parametry efektywne ośrodka porowatego zajmował się m.in. Łydzba [2002].

Przytaczane tu zagadnienie konsolidacji ośrodka porowatego opisane zostało przez Auriault i Sanchez Palencię [1977] dla porów wypełnionych płynem, oraz przez Auriault, Strzeleckiego i Bauera [1990] dla pustej matrycy porowatej lub matrycy wypełnionej gazem.

W przypadku, gdy pory ośrodka są puste, (ośrodek wypełnia przestrzeń Ω , szkielet wypełnia przestrzeń Ω_s), poszukiwaną funkcją jest tylko funkcja przemieszczenia szkieletu. W praktyce stan taki nie występuje, gdyż pory ośrodka zawsze wypełnione są cieczą lub gazem - stanowi jednak ono punkt wyjścia dla analizy zagadnienia przy porach wypełnionych płynem. Przyjmuje się wtedy [Auriault i in, 1990]:

- równanie równowagi szkieletu

$$\operatorname{div} \sigma_{ij}^{sf} = 0, \quad (7.82)$$

gdzie σ_{ij}^{sf} to tensor naprężenia ciała liniowo sprężystego, indeksy: s – dla szkieletu, f – wartość fizyczna.

- Związek konstytutywny dla szkieletu (prawo Hooke'a):

$$\sigma_{ij}^{sf} = a_{ijkh}^f e_{kh}(\vec{u}^f), \quad (7.83)$$

gdzie a_{ijkh} to tensor stałych sprężystości, a e_{kh} to tensor odkształcenia, zależny od wektora przemieszczenia \vec{u} .

- Warunek brzegowy w przypadku pustych porów:

$$\left(\sigma_{ij}^{sf} N_j \right) |_{\Gamma} = 0. \quad (7.84)$$

- Warunek brzegowy uzupełniają warunki periodyczności przemieszczeń i naprężeń:

$$\begin{aligned} \left[\vec{u}^f \right] &= 0, \\ \left[\sigma_{ij}^{sf} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (7.85)$$

Po podstawieniu rozwinięcia przemieszczeń w szereg asymptotyczny i identyfikacji trzech najniższych rzędów rozwinięcia, uzyskiwane są kolejno rozwiązania dla najniższych rzędów ε . Ich szczegółowy opis można znaleźć w pozycjach Strzelecki [1996] lub Auriault, Boutin, Geindreau [2009].

Z rozwiązania dla rzędu ε^0 wynika, że przemieszczenia zależą tylko od zmiennej makroskopowej:

$$\vec{u}^{(0)} = \vec{u}^{(0)}(x). \quad (7.86)$$

Uzyskane tą metodą równanie konstytutywne ośrodka ciągłego ma postać:

$$\sigma_{ij}^{T(0)} = c_{ijkh} e_{xkh}(\vec{u}^{(0)}), \quad (7.87)$$

gdzie
$$c_{ijkh} = a_{ijkh} + a_{ijkh} e_{ykh} \left(\xi_i^{lm} \right).$$

W skali makroskopowej równanie równowagi ma postać:

$$\sigma_{ij}^{T(0)},j = 0. \quad (7.88)$$

Naprężenie σ^T w skali makroskopowej jest naprężeniem cząstkowym – w tej skali nie odróżnia się już obszarów zajmowanych przez szkielet i miejsc pustych, dotyczy ono całej powierzchni ośrodka. W przypadku pustych porów jest ono równe naprężeniu cząstkowemu σ^s .

Metodą teorii homogenizacji został tu uzyskany tensor stałych materiałowych dla ośrodka ciągłego, natomiast opisujące go równanie konstytutywne pozostało bez zmian (prawo Hooke'a).

W rzeczywistości pory ośrodka zawsze wypełnione są płynem – najczęściej jest to woda lub powietrze. Fazę gazową może stanowić też para wodna. Oprócz przemieszczenia szkieletu, poszukiwanymi funkcjami są tu prędkość przepływu płynu $\vec{v}^{(0)}$, oraz jego ciśnienie $p^{(0)}$; w przypadku płynu ściśliwego, również jego gęstość $\rho^{(0)}$.

W przypadku, gdy pory wypełnia nieściśliwy płyn Newtona, za który w pewnym przybliżeniu można uznać wodę, oprócz równania równowagi i równania konstytutywnego dla fazy stałej, należy również uwzględnić równanie ruchu cieczy:

$$\text{div } \sigma_{ij}^{ff} = 0, \quad (7.89)$$

Równanie konstytutywne cieczy przybiera postać:

$$\sigma^{ff} = -p^f I_{ij} + 2\mu D_{ij}, \quad (7.90)$$

gdzie I_{ij} to tensor jednostkowy, a D_{ij} to tensor prędkości dewiatora odkształceń:

$$D_{ij} = e_{ij} \left(\vec{v}^f \right) - \frac{1}{3} \delta_{ij} e_{kk} \left(\vec{v}^f \right), \quad (7.91)$$

gdzie δ_{ij} to delta Kroneckera, oraz równanie ciągłości przepływu:

$$\text{div} \left(v_i^f \right) = 0. \quad (7.92)$$

Warunki brzegowe mają wtedy postać:

$$\begin{aligned} \left[(\sigma_{ij}^{sf} - \sigma_{ij}^{lf}) N_j \right] |_{\Gamma} &= 0, \\ \left[v_i^f - \dot{u}_i^f \right] |_{\Gamma} &= 0. \end{aligned} \quad (7.93)$$

Z rozwiązań dla rzędu ε^{-1} dla ciśnienia i dla rzędu ε^0 dla przemieszczeń i prędkości, wynika, że ciśnienie i przemieszczenia w płynie zależą tylko od zmiennej makroskopowej. z kolei rozwiązanie dla prędkości prowadzi do prawa Darcy'ego:

$$w_i^{f(0)} = -\tilde{k}_{ij} \text{grad } p^{(0)}, \quad (7.94)$$

gdzie \vec{w} to prędkość płynu względem szkieletu: $w_i = v_i - \dot{u}_i$, natomiast $\tilde{k}_{ij} = \frac{l^2}{\mu} k_{ij}(y)$. Tensor $k_{ij}(y)$ jest funkcją zmiennej lokalnej.

W skali ośrodka naprężenie w szkielecie określa związek:

$$\sigma_{ij}^{T(0)} = c_{ijkh} e_{xkh} \left(u^{(0)} \right) - \alpha_{ij} p^{(0)}, \quad (7.95)$$

gdzie α_{ij} to tensor sprężystości określający wpływ ciśnienia płynu w porach na stan naprężenia:

$$\alpha_{ij} = n I_{ij} + a_{ijlm} e_{ylm} (\vec{\eta}), \quad (7.96)$$

gdzie $n = \frac{|\Omega_f|}{|\Omega|}$.

Rozwiązanie równania ciągłości przepływu ma postać:

$$\frac{\partial (v_i^{(0)} - n \dot{u}_i^{(0)})}{\partial x_i} = -\gamma_{ij} \dot{e}_{xij} (\vec{u}^{(0)}) - \beta \dot{p}^{(0)}, \quad (7.97)$$

Gdzie $\gamma_{ij} = n I_{ij} - \xi_{p,p}^{ij}$ i $\beta = \eta_{p,p}$.

Podsumowując, makroskopowe zachowania ośrodka porowatego wypełnionego nieściśliwym płynem Newtona, opisują następujące równania:

$$\frac{\partial \left(c_{ijkh} e_{xkh}(\vec{u}) - \alpha_{ij} p \right)}{\partial x_j} = 0, \quad (7.98)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\tilde{k}_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) = -\gamma_{ij} \dot{e}_{xij}(\vec{u}) - \beta \dot{p}.$$

Układ ten odpowiada układowi równań modelu porospężystości Biota-Darcy'ego – trzy równania równowagi i równanie przepływu. W przypadku, gdy wypełniający pory płyn jest ściśliwy, poszukiwaną funkcją jest również jego gęstość. Równania dla szkieletu oraz warunki brzegowe pozostają bez zmian względem modelu dla płynu nieściśliwego, modyfikacji ulegają równania dla płynu (w tym przykładzie model Stokesa z uwzględnieniem ściśliwości barotropowej):

- Równanie ruchu:

$$\operatorname{div} \sigma_{ij}^f = \rho^f \frac{D\vec{v}^f}{Dt}, \quad (7.99)$$

- Równanie konstytutywne płynu:

$$\sigma_{ij}^f = -p^f I_{ij} + 2\mu D_{ij} + \lambda e_{ii}(\vec{v}^f) I_{ij}. \quad (7.100)$$

Po uwzględnieniu równania konstytutywnego, równanie ruchu ma postać:

$$\mu \nabla^2 \vec{v}^f - (\lambda + \mu) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{v}^f) - \operatorname{grad} p^f = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}^f}{\partial t} + (\vec{v}^f \operatorname{grad}) \vec{v}^f \right). \quad (7.101)$$

W pracy Auriault, Strzelecki, Bauer [1993] przedstawione są rozwiązania dla przepływu ustalonego i nieustalonego, dla różnych rzędów wielkości liczb bezwymiarowych Q_l (stosunek sił powstających z działania gradientu ciśnienia do sił oporu lepkiego przepływającej cieczy), R_{rl} (liczba Reynoldsa), R_{el} (chwilowa liczba Reynoldsa), oraz liczby Strouhala $S = R_{rl} / R_{el}$. Autorzy pracy wykazali, że proces jest niehomogenizowalny dla liczby Strouhala $S = O(\varepsilon^{-1})$, natomiast dla rzędów wyższych, niż $O(1)$, przepływ nieustalony sprowadza się do przypadku przepływu ustalonego. w przypadku, gdy liczba Reynoldsa rośnie w stosunku do Q ($Q = O(\varepsilon^{-1})$ i $R_{el} = O(1)$), prawo przepływu przestaje być liniowe.

Rozwiązanie dla prędkości, przemieszczeń i ciśnienia dla niższych rzędów ε odpowiada rozwiązaniu dla płynu nieściśliwego, skąd otrzymać można przy analogicznym postępowaniu związek konstytutywny:

$$\sigma_{ij}^{T(0)} = c_{ijkh} e_{xkh}(\vec{u}^{(0)}) - \alpha_{ij} p^{(0)}, \quad (7.102)$$

oraz równanie równowagi:

$$\operatorname{div}_x \sigma_{ij}^{T(0)} = 0. \quad (7.103)$$

Po ich uwzględnieniu w równaniu ciągłości przepływu dla rzędu \mathcal{E} otrzymuje się następujące równanie w skali makro:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) + A \vec{u} v_{ij} \operatorname{grad} p + \rho (\chi_{ij} \dot{e}_{ij} + \beta \dot{p}) = -n \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (7.104)$$

gdzie A to współczynnik podatności cieczy: $A = -\frac{\partial f}{\partial p} / \frac{\partial f}{\partial \rho}$, v_{ij} to tensor ściśliwości płynu, χ_{ij} to tensor drugiego rzędu, $\chi_{ij} = \gamma_{ij} - n I_{ij}$, a β to parametr efektywny.

Zatem układ równań konsolidacji dla ośrodka ekwiwalentnego ma postać

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} c_{ijkh} e_{xkh}(\vec{u}) - \alpha_{ij} p &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\rho \tilde{k}_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) &= -\rho (\gamma_{ij} \dot{e}_{xij}(\vec{u}) - \beta \dot{p}) - A \vec{u} v_{ij} \operatorname{grad} p - n \frac{\partial \rho}{\partial t}, \\ f(p, \rho) &= 0. \end{aligned} \quad (7.105)$$

W przypadku, założenia nieściśliwości płynu: $A = 0$, $\rho = \text{const}$, układ równań sprowadza się do układu równań klasycznej teorii konsolidacji dla cieczy nieściśliwej. w przypadku małej ściśliwości ($\rho^{(1)} = 0, v_{ij} = 0$), zdefiniowanej, jako:

$$\dot{p} = k_l \frac{\dot{\rho}}{\rho}, \quad (7.106)$$

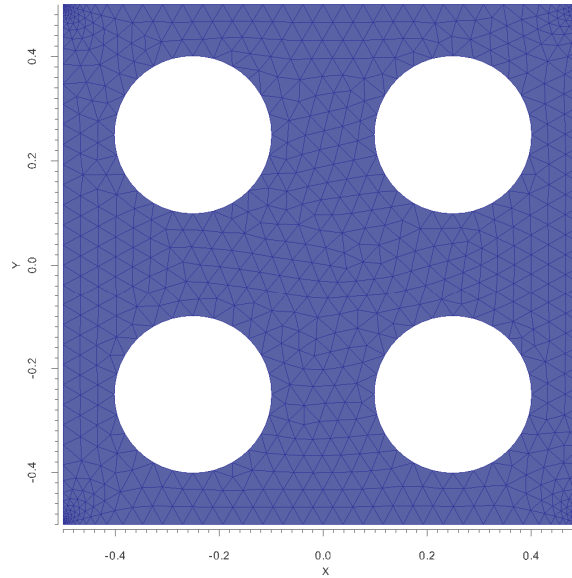
gdzie k_l to współczynnik ściśliwości cieczy, równanie przepływu ma postać:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\rho \tilde{k}_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) = \gamma_{ij} \dot{e}_{xij}(\vec{u}) - \beta^* \dot{p}, \quad (7.107)$$

gdzie β^* jest zmodyfikowanym współczynnikiem uwzględniającym wpływ ściśliwości płynu, $\beta^* = \beta + n k_l^{-1}$. Taka postać równania odpowiada propozycji Bauera i Gergowicza [1986].

Współczynniki równań w skali makro uzyskać można metodami numerycznymi, przeprowadzając obliczenia na elemencie REV. Zakładając, zgodnie z metodą zbieżności dwuskalowej, że wszystkie rozważane funkcje zależą od dwóch zmiennych określających odpowiednio zmiany makroskopowe i

mikroskopowe, wartości parametrów można uzyskać rozważając proces odkształceń komórki periodycznej Ω_y . Prosty przykład określenia parametrów A i N ośrodka porowatego przedstawiony został w pracy Strzeleckiego i Kosteckiego [2008]: parametry ośrodka uśrednionego uzyskano tam zakładając jednostkowe odkształcenia płaskiego elementu REV w skali makroskopowej w płaskim stanie odkształcenia. Poniżej przedstawiony zostanie przykład o nieco innej geometrii (rys 7.1) w celu bardziej widocznego ukazania warunku periodyczności. Element ten się ze sprężystej matrycy oraz okrągłych porów przy porowatości w zakresie $f = 0.01-0.71$.



Rys. 7.1. Element REV z siatką elementów skończonych przy porowatości $f = 0.3$

Związki konstytutywne płaskiego modelu sprężystego wyrażają się równaniami:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 2\hat{N}E_x + \hat{A}(E_x + E_y) + 2\hat{N}\frac{\partial w_x}{\partial x} + \hat{A}\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y}\right), \\ \sigma_{yy} &= 2\hat{N}E_y + \hat{A}(E_x + E_y) + 2\hat{N}\frac{\partial w_y}{\partial y} + \hat{A}\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y}\right), \\ \sigma_{xy} &= 2\hat{N}\left[E_{xy} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_y}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial y}\right)\right],\end{aligned}\tag{7.108}$$

gdzie E_x to wydłużenie względne (w skali makro) wzdłuż osi x , E_y to wydłużenie względne wzdłuż osi y , E_{xy} to odkształcenie postaciowe, w_x i w_y to składowe wektora przemieszczenia, \hat{N} i \hat{A} są stałymi Lamégo dla ośrodka bez porów. Układ równań równowagi ma postać:

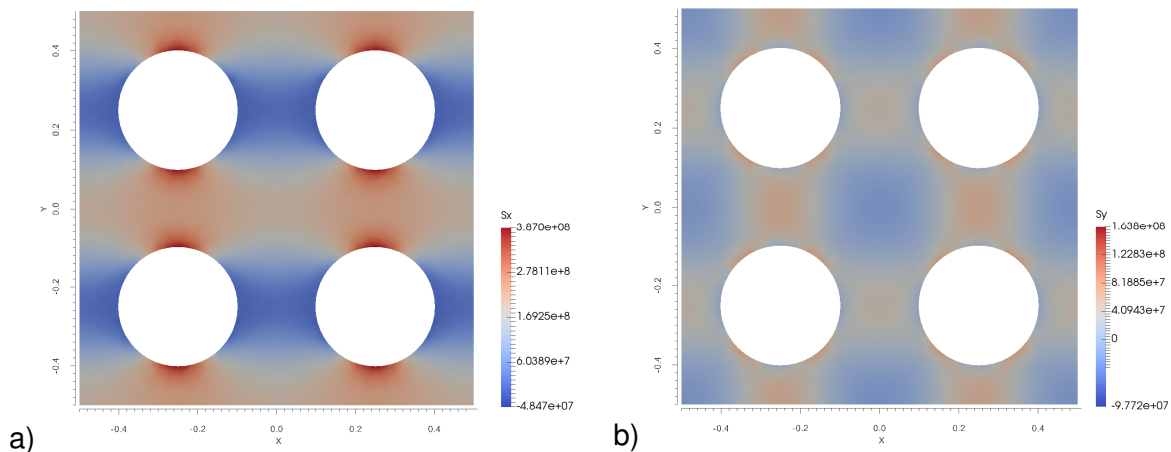
$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= 0.\end{aligned}\tag{7.109}$$

Musi on spełniać warunek brzegowy $\left[(a_{ijkh}(\vec{w})) N_j \right]_{\Gamma} = 0$, oraz warunki periodyczności $[\vec{w}] = 0$ i $[a_{ijkh} e_{kh}(\vec{w})] = 0$, gdzie a_{ijkh} to tensor stałych sprężystości, e_{kh} to tensor odkształceń, z zamykającym warunkiem całkowym:

$$\int_{\Omega_s} w_x d\Omega_s = 0, \quad \int_{\Omega_s} w_y d\Omega_s = 0 \quad (7.110)$$

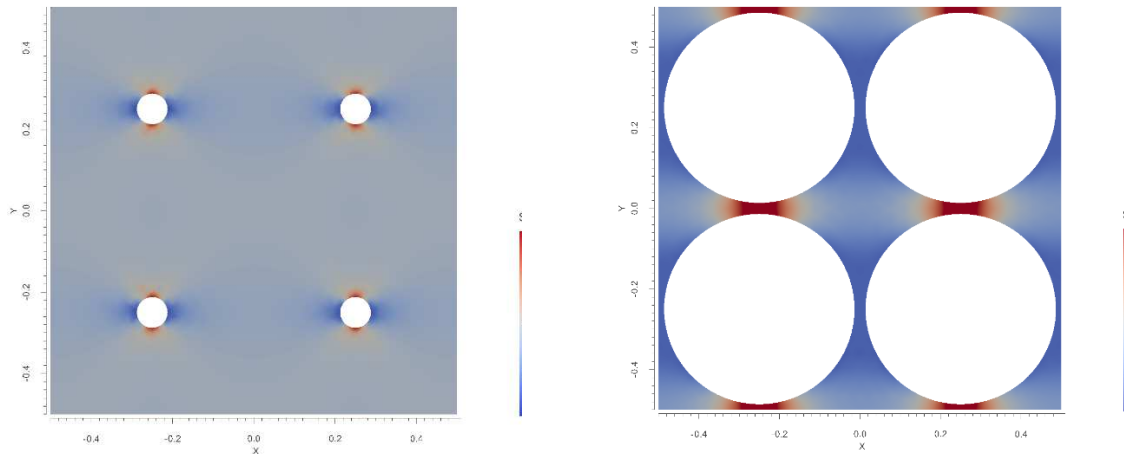
Obliczenia wielkości poszukiwanych parametrów można uzyskać przyjmując jednostkowe wydłużenie w jednym kierunku $E_x = 1$ albo $E_y = 1$ (dla przyjętego symetrycznego układu w obu przypadkach wyniki są jednakowe).

Poszukiwane wartości $2N + A$ i A otrzymać można określając średnie naprężenia $\sigma_{xx} = 2NE_x + A(E_x + E_y)$ i $\sigma_{yy} = 2NE_y + A(E_x + E_y)$. Rozkład naprężeń σ_{xx} i σ_{yy} w skali periodycznej komórki przedstawiono na rys.7.2

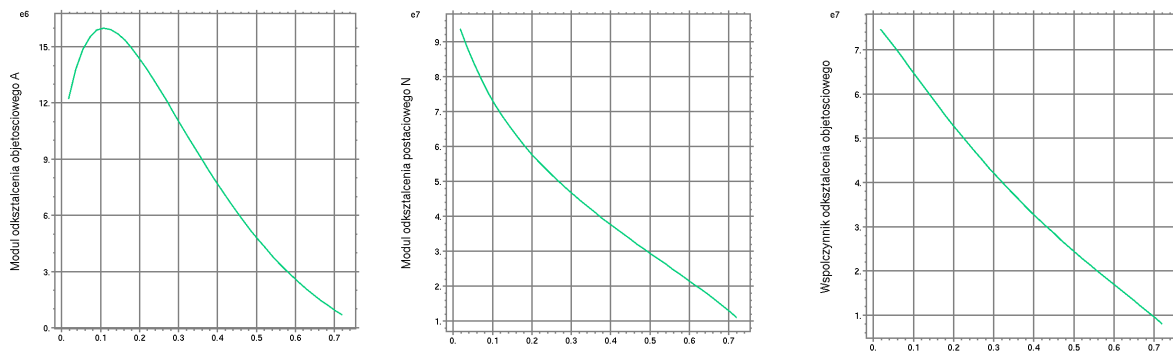


Rys. 7.2: Rozkład naprężeń w skali lokalnej przy $f = 0.3$, $E_x = 1$, $E_y = 0$, $E_{xy} = 0$: a) σ_{xx} b) σ_{yy}

Wartości uśrednionych parametrów zależą od porowatości. Rysunek 7.3. Przedstawia wartości naprężeń σ_{xx} w komórce periodycznej dla minimalnej i maksymalnej z analizowanych wartości, natomiast 7.4. zależność parametrów A , N i $K = A + 2/3N$ od porowatości. Wyniki te pokrywają się z wartościami uzyskanymi przy geometrii zastosowanej przez Strzeleckiego i Kosteckiego [2008].



Rys. 7.3: Rozkład naprężeń σ_{xx} w skali lokalnej przy $f = 0.01$ i $f = 0.713$, ($E_x = 1$)



Rys. 7.4. Zależność parametrów A, N i K od porowatości

Określenie pozostałych parametrów Biota i znalezienie zależności funkcyjnych od porowatości ośrodka wymaga rozwiązania bardziej skomplikowanego układu równań w skali mikroskopowej. W przypadku wody jako płynu porowego można przyjąć założenie, że jest ona mniej ściśliwa niż szkielet ośrodka porowatego i parametr R , który określa związek pomiędzy dylatacją cieczy a ciśnieniem cząstkowym cieczy zależy liniowo od porowatości. Na podstawie pracy Biota Willisa [1959] oraz Emmricha [1984] można również stwierdzić, że pomiędzy parametrami Biota H i R i porowatością f zachodzi prosta relacja $H = R / f$.

7.4. Teoria porosprężystości w świetle termodynamiki

7.4.1. Pierwsza zasada termodynamiki

Zgodnie z pierwszą zasadą termodynamiki, zmiana energii wewnętrznej układu jest równa sumie energii w formie ciepła i pracy mechanicznej wykonanej na układzie. Zasada ta jest formą zasady zachowania energii, rozszerzoną na procesy termodynamiczne. Można ją zapisać w postaci ogólnej, jako:

$$\dot{L} + \dot{Q} = \frac{\partial}{\partial t}(W + K), \quad (7.111)$$

gdzie \dot{L} to moc sił działających na układ, Q to ciepło, W to energia wewnętrzna, natomiast K to energia kinetyczna układu.

W przypadku ośrodków dwufazowych, na podstawie prac De Groot, Mazur [1965], Derski [1975], Strzelecki i in [2008] można opisać energię wewnętrzną układu jako sumę energii wewnętrznej jego składników:

$$\dot{w} = \dot{w}_1 + \dot{w}_2, \quad (7.112)$$

gdzie w_1 to energia wewnętrzna szkieletu, a w_2 to energia wewnętrzna płynu. Na szkielet działają siły powierzchniowe, siły grawitacji oraz siły oporu lepkiego. Sumę ich mocy można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \dot{L}_1 &= \dot{L}_1^S + \dot{L}_1^G + \dot{L}_1^\eta = \int_S \sigma_{ij} n_j v_{rzecz.i}^s dS + \int_\Omega X_i \rho^1 v_{rzecz.i}^s d\Omega + \int_\Omega b v_1^r v_{rzecz.i}^s d\Omega \\ &= \int_\Omega \left(v_{rzecz.i}^s (\sigma_{ij,j} + X_i \rho^1 + b v_{rzecz.1}^r) + \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (7.113)$$

Zmiana energii cieplnej dostarczonej do szkieletu (lub odebranej) przez powierzchnię S jest równa:

$$\dot{Q}_1 = - \int_S q_i^s n_i dS = - \int_\Omega q_{i,i}^s d\Omega.$$

Energia wewnętrzna jest funkcją stanu, nie jest znana jej całkowita wartość, w opisie procesów termodynamicznych określa się jej zmianę, wynikającą ze zmiany parametrów stanu układu. Dla opisu ośrodka ciągłego można posłużyć się zmianą energii wewnętrznej szkieletu na jednostkę objętości:

$$\frac{\partial}{\partial t} W_1 = \int_\Omega \dot{w}_1 d\Omega. \quad (7.114)$$

Zmiana energii kinetycznej dla szkieletu wyniesie:

$$\frac{\partial K_1}{\partial t} = \int_\Omega v_{rzecz.i}^s \left(\rho_{11} \frac{\partial v_{rzecz.i}^s}{\partial t} + \rho_{12} \frac{\partial v_{rzecz.i}^l}{\partial t} \right). \quad (7.115)$$

Stąd dla szkieletu I zasadę termodynamiki można zapisać w postaci:

$$\int_\Omega v_{rzecz.i}^s (\sigma_{ij,j} + X_i \rho^1 + b v_{rzecz.1}^r - \rho_{11} \frac{\partial v_{rzecz.i}^s}{\partial t} - \rho_{12} \frac{\partial v_{rzecz.i}^l}{\partial t}) d\Omega + \int_\Omega (\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - q_{i,i}^s) d\Omega = \int_\Omega \dot{w}_1 d\Omega. \quad (7.116)$$

Wykorzystując równanie zachowania pędu, lokalną zmianę energii wewnętrznej dla szkieletu można opisać wzorem [Strzelecki i in. 2008]:

$$\dot{w}_1 = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - q_{i,i}^s. \quad (7.117)$$

W podobny sposób kolejne człony równania (7.111) można zapisać dla płynu:

- moc sił działających na układ:

$$\dot{L}_2 = \dot{L}_2^S + \dot{L}_2^G + \dot{L}_2^\eta = \int_{\Omega} \left(v_{rzecz,i}^l (\sigma_{,i} + X_i \rho^2 - b v_{rzecz,i}^r) + \sigma \dot{\theta}_{ij} \right) d\Omega, \quad (7.118)$$

- zmiana energii cieplnej dostarczonej do płynu:

$$\dot{Q}_2 = - \int_s q_i^l n_i dS = - \int_{\Omega} q_{i,i}^l d\Omega, \quad (7.119)$$

- zmiana energii kinetycznej płynu:

$$\frac{\partial K_2}{\partial t} = \int_{\Omega} v_{rzecz,i}^l \left(\rho_{12} \frac{\partial v_{rzecz,i}^s}{\partial t} + \rho_{22} \frac{\partial v_{rzecz,i}^l}{\partial t} \right). \quad (7.120)$$

- Stąd i zasadę termodynamiki można zapisać w postaci:

$$\int_{\Omega} \dot{w}_2 d\Omega = \int_{\Omega} v_{rzecz,i}^l (\sigma_{,i} + X_i \rho^2 - b v_{rzecz,i}^r) - \rho_{12} \frac{\partial v_{rzecz,i}^s}{\partial t} - \rho_{22} \frac{\partial v_{rzecz,i}^l}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} (\sigma \dot{\theta} - q_{i,i}^l) d\Omega. \quad (7.121)$$

Po zastosowaniu zasady zachowania pędu dla płynu lokalną zmianę energii wewnętrznej płynu opisuje wyrażenie:

$$\dot{w}_2 = \sigma \dot{\theta} - q_{i,i}^l \quad (7.122)$$

Dla ośrodka dwufazowego, zgodnie z (7.112), zmiana energii wewnętrznej wyniesie:

$$\dot{w} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + \sigma \dot{\theta} - q_{i,i}^s - q_{i,i}^l. \quad (7.123)$$

Zakładając, że ciepło przepływające przez układ jest równe sumie ciepła przepływającego przez obie fazy, $q_{i,i} = q_{i,i}^s + q_{i,i}^l$, można napisać:

$$\dot{w} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + \sigma \dot{\theta} - q_{i,i}. \quad (7.124)$$

7.4.2. Druga zasada termodynamiki

Zgodnie z II zasadą termodynamiki, w układzie zamkniętym istnieje funkcja stanu niemalejąca z czasem: entropia. Entropię jako wielkość fizyczną przedstawić można analogicznie do objętości. Zgodnie z pierwszą zasadą termodynamiki, zmiana energii wewnętrznej jest równa sumie wykonanej

pracy i dostarczonego/odebranego ciepła. Jeśli jako czynnik aktywny przyjąć ciśnienie oraz temperaturę, wtedy:

- praca mechaniczna wykonana zostaje wskutek działania ciśnienia, które powoduje przyrost lub ubytek objętości

$$dW = pdV, \quad (7.125)$$

- ciepło dostarczone/odebrane jest z układu wskutek działania temperatury. Wielkość ulegająca zmianie to entropia:

$$dQ = TdS. \quad (7.126)$$

Stąd entropię definiuje się za pomocą różniczki:

$$dS = \frac{dQ}{T}. \quad (7.127)$$

Druga zasada termodynamiki określa kierunek procesów samorzutnych. De Groot i Mazur [1965] oraz Derski [1975] posługują się entropią właściwą, odniesioną do jednostki objętości:

$$S = \int_{\Omega} s d\Omega. \quad (7.128)$$

Jeśli

$$\dot{Q} = - \int_s q_i n_i dS = - \int_{\Omega} q_{i,i} d\Omega, \quad (7.129)$$

oraz

$$\dot{S} = \frac{\dot{Q}}{T}, \quad (7.130)$$

wówczas

$$\dot{S} = \frac{\dot{Q}}{T^0} = - \int_{\Omega} \frac{q_{i,i}}{T} d\Omega. \quad (7.131)$$

Skoro

$$\left(\frac{q_i}{T} \right)_{,i} = \frac{q_{i,i}}{T} - \frac{q_i T_{,i}}{T^2}, \quad (7.132)$$

można napisać, że

$$\dot{s} = -\frac{q_{i,i}}{T} = -\left(\frac{q_i}{T}\right)_{,i} + \frac{q_i T_{,i}}{T^2}. \quad (7.133)$$

Stąd

$$\dot{s} = \dot{s}_z + \dot{s}_w, \quad (7.134)$$

gdzie $\dot{s}_z = -\left(\frac{q_{i,i}}{T}\right)_{,i}$ to lokalna entropia zewnętrzna, odnosząca się do odwracalnej części procesu

przewodzenia ciepła, która może przyjmować znak ujemny lub dodatni, natomiast $\dot{s}_w = -\frac{q_i T_{,i}}{(T)^2}$ to

lokalna entropia wewnętrzna, odnosząca się do procesu nieodwracalnego. w przypadku procesu odwracalnego $\dot{s}_w = 0$. Drugą zasadę termodynamiki definiuje się również za pomocą nierówności Clausiusa-Duhema:

$$\dot{S}_w = -\int_{\Omega} \frac{q_i T_{,i}}{T^2} \geq 0 \quad (7.135)$$

Po uwzględnieniu entropii zewnętrznej w równaniu bilansu energii wewnętrznej ośrodka (7.124):

$$\dot{w} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \sigma \dot{\theta} - q_{i,i}, \quad (7.136)$$

gdzie $q_{i,i} = \text{div}(\vec{q}) = \text{div}(\vec{q}^1 + \vec{q}^2)$, otrzymujemy:

$$\dot{w} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \sigma \dot{\theta} + \dot{s} T. \quad (7.137)$$

W równaniu tym występuje sześć parametrów stanu, z których trzy są niezależne. Można założyć, że energia wewnętrzna jest funkcją odkształceń szkieletu, dylatacji cieczy i entropii: $w = w(\varepsilon_{ij}, \theta, s)$.

Różniczka zupełna ma wtedy postać:

$$\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial w}{\partial s} \dot{s}. \quad (7.138)$$

Stąd: $\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}}$, $\sigma = \frac{\partial w}{\partial \theta}$ i $T = \frac{\partial w}{\partial s}$. Z tej zależności można otrzymać związki konstytutywne,

Związki takie (dla ośrodków sprężystych) przez Nowackiego [1975] określane są jako trzecia postać

związków konstytutywnych. Z drugiej zasady termodynamiki wynika również prawo przewodnictwa cieplnego.

7.4.3. Związki konstytutywne dla ośrodka dwufazowego składającego się z ciała stałego i płynu.

Związki konstytutywne dla ośrodka dwufazowego można określić przy pomocy praw termodynamiki, analogicznie, jak dla ośrodka jednofazowego. Zagadnieniem określania związków konstytutywnych dla ośrodków sprężystych zajmował się Nowacki [1975]. Wyróżnił on 3 postaci związków konstytutywnych:

- I postać – związki określające zależność naprężenia i entropii od odkształcenia i temperatury, wyprowadzone przy użyciu energii swobodnej
- II postać – związki określające zależność odkształcenia i entropii od naprężenia i temperatury, wyprowadzone przy użyciu entalpii swobodnej (potencjału Gibbsa)
- III postać – związki określające zależność naprężenia i temperatury od odkształcenia i entropii, wyprowadzone przy użyciu energii wewnętrznej jako funkcji stanu

W podobny sposób określić można związki dla ośrodka porosprężystego. Pierwszą postać związków dla tego typu ośrodka przedstawili Coussy [1995] i Strzelecki [2008], różnią się one temperaturą odniesienia.

Związki te wyprowadza się przy użyciu energii swobodnej Helmholtza, definiowanej jako:

$$F = W - ST \quad (7.139)$$

W odniesieniu do jednostki objętości, $F = \int_{\Omega} \chi d\Omega$. Jej zmianę w czasie można zapisać następującym wzorem:

$$\dot{\chi} = \dot{w} - \dot{s}T - s\dot{T} \quad (7.140)$$

Zgodnie ze wzorem na zmianę energii wewnętrznej ośrodka dwufazowego (7.138), można zapisać:

$$\dot{\chi} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + \sigma \dot{\theta} - s\dot{T}, \quad (7.141)$$

lub

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + \sigma \dot{\theta} - s\dot{T} - \dot{\chi} = 0. \quad (7.142)$$

W pierwszej kolejności przedstawione zostanie postępowanie przy złożeniu procesu izotermicznego w celu porównania związków konstytutywnych uzyskanych tą metodą z klasycznymi związkami podanymi przez Biota [1957]. Dla procesu izotermicznego ($s\dot{T} = 0$) powyższy związek przyjmuje postać:

$$\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + \sigma\dot{\theta} - \dot{\chi} = 0. \quad (7.143)$$

Przy założeniu, że lokalna energia swobodna jest funkcją odkształceń: $\chi = \chi(\varepsilon_{ij}, \theta)$, oraz jej zmiana jest różniczką zupełną, $d\chi = \frac{\partial\chi}{\partial\varepsilon_{ij}}d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial\chi}{\partial\theta}d\theta$, a przyrosty parametrów stanu są pochodnymi cząstkowymi względem czasu, jej zmianę w czasie można zapisać w postaci:

$$\dot{\chi} = \frac{\partial\chi}{\partial\varepsilon_{ij}}\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial\chi}{\partial\theta}\dot{\theta}, \quad (7.144)$$

stąd:

$$\left(\sigma_{ij} - \frac{\partial\chi}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)\dot{\varepsilon}_{ij} + \left(\sigma - \frac{\partial\chi}{\partial\theta}\right)\dot{\theta} = 0, \quad (7.145)$$

czyli:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial\chi}{\partial\varepsilon_{ij}} \quad \text{oraz} \quad \sigma = \frac{\partial\chi}{\partial\theta}. \quad (7.146)$$

W celu otrzymania związków funkcję energii swobodnej należy rozwinąć w szereg Taylora w okolicy stanu naturalnego:

$$\chi(\varepsilon_{ij}, \theta) = \chi(0,0) + \frac{\partial\chi(0,0)}{\partial\varepsilon_{ij}}\varepsilon_{ij} + \frac{\partial\chi(0,0)}{\partial\theta}\theta + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\chi(0,0)}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + 2\frac{\partial^2\chi(0,0)}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\theta}\varepsilon_{ij}\theta + \frac{\partial^2\chi(0,0)}{\partial\theta\partial\theta}\theta^2\right] + \dots$$

W stanie naturalnym przyjmuje się, że energia swobodna $\chi(0,0)$ oraz naprężenie w szkielecie $\frac{\partial\chi(0,0)}{\partial\varepsilon_{ij}}$ są równe zero, natomiast naprężenie w płynie $\frac{\partial\chi(0,0)}{\partial\theta}$ w stanie naturalnym równe jest naprężeniu pochodzącemu od ciśnienia atmosferycznego. Stąd po zastosowaniu podstawień:

$$\frac{\partial^2\chi(0,0)}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}} = c_{ijkl}, \quad \frac{\partial^2\chi(0,0)}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\theta} = \beta_{ij}, \quad \frac{\partial^2\chi(0,0)}{\partial\theta\partial\theta} = \gamma, \quad (7.147)$$

równanie to można zapisać z dokładnością do małych wartości drugiego rzędu w postaci:

$$\chi(\varepsilon_{ij}, \theta) = \sigma_a\theta + \frac{1}{2}\left(c_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + 2\beta_{ij}\varepsilon_{ij}\theta + \gamma\theta^2\right). \quad (7.148)$$

Różniczkując zgodnie z (7.146), można otrzymać związki konstytutywne:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} + \beta_{ij}\theta, \quad (7.149)$$

$$\sigma - \sigma_a = \beta_{ij}\varepsilon_{ij} + \gamma\theta.$$

Tensor c_{ijkl} jest tensorem czwartego rzędu, co udowodnił Nowacki [1975]. Dla ośrodków izotropowych, zgodnie z pracą Nowackiego (1975), tensor c_{ijkl} można przedstawić przy użyciu stałych Lamégo:

$$c_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \quad (7.150)$$

Stałe λ i μ przez Biota oznaczone zostały odpowiednio, jako A oraz N . Tensor drugiego rzędu β_{ij} , określający wzajemne oddziaływanie płynu oraz szkieletu. Zakładając, że na odkształcenie szkieletu ma wpływ tylko odkształcenie objętościowe płynu, $\beta_{ij} = \beta\delta_{ij}$, tensor ten oznaczyć można przy pomocy stałych materiałowych Biota jako $\beta_{ij} = Q\delta_{ij}$, natomiast stała $\gamma = R$ wyraża zmianę objętości płynu pod wpływem ciśnienia. Związki te można zapisać wtedy w postaci:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2N\varepsilon_{ij} + (A\varepsilon + Q\theta)\delta_{ij}, \\ \sigma - \sigma_a &= Q\varepsilon_{ij} + R\theta, \end{aligned} \quad (7.151)$$

co stanowi klasyczny zapis związków konstytutywnych teorii porosprężystości Biota.

Korzystając z entalpii swobodnej można uzyskać również II postać związków konstytutywnych. Potencjał Gibbsa dla procesu samorzutnego jest funkcją malejącą i osiąga minimum w stanie równowagi. Różniczkę potencjału Gibbsa dla ośrodka dwufazowego można zapisać w postaci [Uciechowska-Grakowicz 2016]:

$$dG = dF + pdV + Vdp, \quad (7.152)$$

gdzie

$$\begin{aligned} pdV &= -\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}V - \sigma d\theta V, \\ Vdp &= -d\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}V - d\sigma\theta V. \end{aligned} \quad (7.153)$$

Przyjmując założenie, że różniczka jest zmianą funkcji w czasie, wykorzystując równanie opisujące zmianę entalpii swobodnej ośrodka dwufazowego (7.152), w odniesieniu do jednostki objętości można ją zapisać w postaci:

$$\dot{g} = -s\dot{T} - T\dot{s}_w - \dot{\sigma}_{ij}\varepsilon_{ij} - \dot{\sigma}\theta. \quad (7.154)$$

Dla procesu izotermicznego:

$$\dot{g} = -s\dot{T} - \dot{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij} - \dot{\sigma}\theta. \quad (7.155)$$

Zakładając, że parametrem stanu, oprócz naprężeń w obu fazach jest temperatura, można zapisać różniczkę potencjału Gibbsa:

$$dg = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial g}{\partial \sigma} d\sigma, \quad (7.156)$$

czyli

$$Tds = -d\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - d\sigma\theta - \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} - \frac{\partial g}{\partial \sigma} d\sigma. \quad (7.157)$$

Aby druga zasada termodynamiki została spełniona:

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}; \quad \theta = -\frac{\partial g}{\partial \sigma}. \quad (7.158)$$

Podobnie, jak w przypadku energii swobodnej, w celu uzyskania związków konstytutywnych, należy rozwinąć potencjał Gibbsa w szereg Taylora w otoczeniu stanu naturalnego.:

$$g(\sigma_{ij}, \sigma) = g(0,0) + \frac{\partial g(0,0)}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij} + \frac{\partial g(0,0)}{\partial \sigma} \sigma + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g(0,0)}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + 2 \frac{\partial^2 g(0,0)}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma} \sigma_{ij} \sigma + \frac{\partial^2 g(0,0)}{\partial \sigma^2} \sigma^2 \right). \quad (7.159)$$

Po zastosowaniu podstawień:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g(0,0)}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} &= -s_{ijkl}, \\ 2 \frac{\partial^2 g(0,0)}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma} &= -t_{ij}, \\ \frac{\partial^2 g(0,0)}{\partial \sigma \partial \sigma} &= -u, \end{aligned} \quad (7.160)$$

z dokładnością do małych wartości drugiego rzędu można napisać:

$$2g(\sigma_{ij}, \sigma) = -s_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} - t_{ij} \sigma_{ij} \sigma - u \sigma \sigma. \quad (7.161)$$

W płynie nie występują odkształcenie postaciowe, można więc napisać $t_{ij} = t\delta_{ij}$. Związki konstytutywne można więc zapisać w postaci:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= -\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ijkl}\sigma_{kl} + t\sigma\delta_{ij}, \\ \theta &= -\frac{\partial g}{\partial \sigma} = t\delta_{ij}\sigma_{ij} + u\sigma,\end{aligned}\tag{7.162}$$

Tensor podatności s_{ijkl} jest odwrotnością tensora sztywności $s_{ijkl} = c_{ijkl}^{-1}$, dla szkieletu izotropowego,

może on zostać przedstawiony przy użyciu oznaczeń $A = \frac{A}{2N(2N+3A)}$ i $N = \frac{1}{4N}$:

$$s_{ijkl} = A\delta_{ij}\delta_{kl} + N(\delta_{ik}\delta_{jk} + \delta_{il}\delta_{jk})\tag{7.163}$$

Dla odkształceń objętościowych, oznaczając $t = 1/H$, oraz $u = 1/R$, związki te można zapisać w formie odpowiadającej tej podanej przez Biota [1941]:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{\sigma_m}{K} + \frac{\sigma}{H}, \\ \theta &= \frac{\sigma_m}{H} + \frac{\sigma}{R}.\end{aligned}\tag{7.164}$$

7.5. Konsolidacja układu ciało stałe – gaz

Woda jest płynem słabo ściśliwym, w modelach filtracji i konsolidacji Terzaghiego uznawana jest za płyn nieściśliwy. W przypadku modelu konsolidacji Biota zakłada się, że jest płynem ściśliwym, choć czasem ta ściśliwość bywa pomijana. Gaz jest płynem mocno ściśliwym, ponadto jego objętość jest silnie zależna od temperatury. Ściśliwość ciał sprężystych definiowana jest jako odwrotność współczynnika sprężystości objętościowej:

$$\beta = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p},\tag{7.165}$$

jest ona zazwyczaj przyjmowana, jako wartość stała dla danej substancji w określonych warunkach. W przypadku gazów, zależność objętości od ciśnienia jest nieliniowa, stąd przy określaniu współczynnika ściśliwości należy posługiwać się wartościami bezwzględnymi. Zależności między ciśnieniem, objętością i temperaturą opisują prawa gazowe. Poniżej przedstawione zostaną różne sposoby uwzględnienia ściśliwości fazy płynnej.

Detournay i Cheng [1993] dla bardzo ściśliwego płynu definiują współczynniki porospężyste w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
 K_u &= K \left(1 + \frac{\alpha^2 K_f}{\phi K} \right), \\
 B &= \frac{K_f}{K_p}, \\
 M &= \frac{K_f}{\phi}.
 \end{aligned}
 \tag{7.166}$$

Określają oni następujące wartości graniczne: Jeśli $K_f \rightarrow 0$, to $B \rightarrow 0$, $K_u \rightarrow K$ i $M \rightarrow 0$, czyli ośrodek zachowuje się jak materiał sprężysty bez płynu.

Verruijt [2015] proponuje dla ośrodka wypełnionego gazem modyfikację równania opisującego wpływ płynu z objętości kontrolnej. W równaniu filtracji (7.122) w gruntach nasyconych wodą człon $S\dot{p}$ jest niewielki w porównaniu do członu $\alpha\dot{\varepsilon}$, w przypadku gazów natomiast sytuacja jest odwrotna. Verruijt proponuje, żeby w przypadku płynu silnie ściśliwego pominąć człon opisujący odkształcenie szkieletu i używać równania w formie:

$$k\nabla^2\sigma = S\dot{\sigma}.$$
(7.167)

W układzie ciało stałe-gaz, oprócz interakcji mechanicznych między fazami, mogą występować zjawiska sorpcji. Szczególnie narażone na takie zjawiska są wapienie i węgiel. w przypadku występowania tego zjawiska, ośrodek na który działa ciśnienie p zamiast zmniejszać, zwiększa swoją objętość. Łydźba [1991] podał równania konstytutywne dla układu węgiel kamienny - gaz, w którym występują zjawiska sorpcji i desorpcji (model zakłada brak oddziaływań mechanicznych i chemicznych między fazami). Odkształcenie objętościowe szkieletu jest w tym modelu zależne od odkształcenia sprężystego, oraz od odkształcenia wynikającego z sorpcji:

$$\varepsilon = \varepsilon_k + \varepsilon_p,$$
(7.168)

gdzie ε_k to odkształcenie sprężyste, a ε_p to odkształcenie wynikające ze zjawiska sorpcji:

$$\varepsilon_p = a_1 + a_2 \ln\left(\frac{\tilde{p}}{p_0}\right) F(\tilde{p}),$$
(7.169)

gdzie a_1 i a_2 to parametry określające wpływ sorpcji na zmianę objętości, $F(\tilde{p})$ to izoterma sorpcji, a \tilde{p} to ciśnienie w stanie równowagi. Po zastosowaniu Izotermi Langmuira, związek opisujący zależność naprężenie od odkształcenia ma postać:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{ij} + \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} - \frac{E}{3(1-2\nu)} \left[a_1 + a_2 \ln\left(\frac{\tilde{p}}{p_0}\right) \right] \frac{A \frac{\tilde{p}}{p_0}}{B + \frac{\tilde{p}}{p_0}} \delta_{ij}.$$
(7.170)

Coussy [2010] dla ściśliwego płynu porowego proponuje zastosowanie równania konstytutywnego:

$$\frac{d\rho^f}{\rho^f} = \frac{dp}{K^f}, \quad (7.171)$$

gdzie K^f jest modułem sprężystości objętościowej płynu. Jeśli $\rho_f \phi$ jest masą płynu, który znajduje się w porach objętości kontrolnej $d\Omega_0$, zakładając niewielkie odkształcenia ($\phi / \phi_0 \ll 1$), równanie konstytutywne dla płynu ma postać:

$$\frac{d(\rho^f \phi)}{\rho^f} = \alpha d\varepsilon + \frac{dp}{M}, \quad (7.172)$$

gdzie $M^{-1} = \phi_0 / K^f + 1 / N$. Jeśli płyn porowy jest ściśliwą cieczą, moduł K^f Coussy uznaje za niezależny od ciśnienia. w przypadku gazu, jego ciśnienie opisując można równaniem gazu doskonałego:

$$p = \frac{\rho^f RT}{M_G}, \quad (7.173)$$

gdzie M_G to masa molowa, a ρ^f to aktualna gęstość gazu. Wtedy:

$$\frac{d\rho^f}{\rho^f} = \frac{dp}{p}, \quad \text{więc} \quad K^f = p, \quad (7.174)$$

czyli

$$\frac{d(\rho^f \phi)}{\rho^f} = \alpha d\varepsilon + \frac{dp}{N} + \frac{\phi_0 dp}{p}, \quad (7.175)$$

Przy przepływie nienasyconym (ciecz + gaz), z uwzględnieniem efektów powierzchniowych między fazami, równania dla warunków nieizotermicznych wg Coussy'ego mają postać:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \left(K - \frac{2}{3} N \right) \varepsilon \delta_{ij} + 2N \varepsilon_{ij} - \alpha \left[\chi p_1 + (1 - \chi) p_2 \right] \delta_{ij} - 3aKT \delta_{ij}, \\ \varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 = \alpha \varepsilon + \frac{(\alpha \chi - \phi_0 S_1) p_1 + [\alpha (1 - \chi) - \phi_0 S_2] p_2}{M (\alpha - \phi_0)} + 2a_\varphi T, \end{aligned} \quad (7.176)$$

gdzie χ to stała zależna od saturacji S , T to temperatura, a, a_φ to współczynniki.

Związki konstytutywne oparte na prawie Boyle'a-Mariotte'a dla procesów izotermicznych zaproponowali Strzelecki i in [1993]. Model ten umożliwi zachowanie liniowej postaci układu równań konsolidacji, modyfikując jedynie ich współczynniki:

$$N^{sg}\nabla^2 u_i + 3(M^{sg} + N)\gamma_{0,i} = -\frac{H^{sg}}{R^{sg}}\sigma_{w,i}, \quad (7.177)$$

$$C\nabla^2 \sigma_w = \frac{1}{R^{sg}}\dot{\sigma}_w - 3\frac{H^{sg}}{R^{sg}}\dot{\gamma}_0 + W,$$

gdzie indeks „sg” oznacza współczynnik zmodyfikowany dla gazu. Poniżej związki te zostaną przedstawione w nieco zmienionej postaci. Wychodząc z układu równań opisującego odkształcenie objętościowe w ośrodku nasyconym wodą,

$$\begin{aligned} \sigma_m &= K\varepsilon + Q\theta, \\ \sigma &= Q\varepsilon + R\theta, \end{aligned} \quad (7.178)$$

uzyskać można związki odwrotne:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\sigma_m}{K} + \frac{\sigma}{B}, \\ \theta &= \frac{\sigma_m}{B} + \frac{\sigma}{C}, \end{aligned} \quad (7.179)$$

gdzie $K = \frac{2}{3}N + A - \frac{Q^2}{R}$, $B = -\frac{R}{Q}K + Q$, oraz $C = \frac{RK}{\frac{2}{3}N + A}$. Dla płynu ściśliwego, przy

uwzględnieniu równania Boyle'a-Mariotte'a,

$$pV = const. \quad (7.180)$$

oraz ciśnienia atmosferycznego, związki dla odkształceń można napisać w postaci:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\sigma_m}{K} - \frac{\sigma - \sigma_a}{B}, \\ \theta &= -\frac{\sigma_m}{B} + \frac{\sigma - \sigma_a}{\sigma}. \end{aligned}$$

gdzie B to parametr określający sprężenie faz.

W celu określenia na ich podstawie związków odwrotnych należy rozwiązać równanie kwadratowe:

$$\sigma_m^2 + \sigma_m \left[\frac{K}{B}\sigma_a - K\varepsilon + B(\theta + 1) \right] + K(\theta + 1)(\sigma_a - B\varepsilon) - K\sigma_a = 0. \quad (7.181)$$

Zakładając, że przy braku obciążeń odkształcenia zarówno szkieletu, jak i gazu są równe zero, szukanym wynikiem będzie pierwiastek spełniający równanie $\sigma_m(0,0) = 0$. Warunek ten spełniony jest dla wyrażenia:

$$\sigma_m = \frac{1}{2} \left[-\frac{K}{B} \sigma_a + K\varepsilon - B(\theta+1) + \sqrt{\left[\frac{K}{B} (\sigma_a - B\varepsilon) - B(\theta+1) \right]^2 - 4K\sigma_a} \right], \quad (7.182)$$

Wobec tego związek opisujący naprężenia w płynie ma postać:

$$\sigma = \frac{B}{2K} \left[\frac{K}{B} \sigma_a - K\varepsilon - B(\theta+1) + \sqrt{\left[\frac{K}{B} (\sigma_a - B\varepsilon) - B(\theta+1) \right]^2 - 4K\sigma_a} \right]. \quad (7.183)$$

Kolejnym krokiem w celu uzyskania współczynników dla gazu jest rozwinięcie związków w szeregi MacLaurina:

$$\begin{aligned} \sigma_m = & \left[\frac{K}{2} + K \frac{\left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right)}{2 \left(B + \frac{K\sigma_a}{B} \right)} \right] \varepsilon - \left[\frac{B}{2} - \frac{B \left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right)}{2 \sqrt{\left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right) + 4K\sigma_a}} \right] \theta \\ & + \frac{K^2 \left(B + \frac{K\sigma_a}{B} \right) - K^2 \frac{\left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right)}{\left(B + \frac{K\sigma_a}{B} \right)}}{4 \left(B + \frac{K\sigma_a}{B} \right)^2} \varepsilon^2 \\ & + \frac{B^2 \sqrt{\left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right) + 4K\sigma_a} - B^2 \frac{\left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right)^2}{\sqrt{\left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right)^2 + 4K\sigma_a}}}{4 \left[\left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right)^2 + 4K\sigma_a \right]} \theta^2, \end{aligned} \quad (7.184)$$

$$\begin{aligned} \sigma = \sigma_a - \frac{B}{2K} \left[K - \frac{K \left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right)}{\sqrt{\left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right)^2 + 4K\sigma_a}} \right] \varepsilon - \frac{B}{2K} B - \frac{B \left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right)}{\sqrt{\left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right)^2 + 4K\sigma_a}} \theta \\ + \frac{B}{4K} \frac{K^2 \sqrt{\left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right)^2 + 4K\sigma_a} - \frac{K^2 \left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right)^2}{\sqrt{\left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right)^2 + 4K\sigma_a}}{\left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right)^2 + 4K\sigma_a} \varepsilon^2 \\ \frac{B}{4K} \frac{B^2 \sqrt{\left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right)^2 + 4K\sigma_a} - \frac{B^2 \left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right)^2}{\sqrt{\left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right)^2 + 4K\sigma_a}}{\left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right)^2 + 4K\sigma_a} \theta^2. \end{aligned} \quad (7.185)$$

Dla małych odkształceń można przyjąć liniowe człony szeregów. Mają one postać:

$$\begin{aligned} \sigma_m = \frac{K}{2} \left(1 + \frac{\Psi}{\Phi} \right) \varepsilon + \frac{B}{2} \left(-1 + \frac{\Psi}{\Phi} \right) \theta, \\ \sigma = \sigma_a + \frac{B}{2} \left(-1 + \frac{\Psi}{\Phi} \right) \varepsilon + \frac{B^2}{2K} \left(-1 + \frac{\Psi}{\Phi} \right) \theta, \end{aligned} \quad (7.186)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \Phi = \left(B + \frac{K\sigma_a}{B} \right), \\ \Psi = \left(B - \frac{K\sigma_a}{B} \right). \end{aligned} \quad (7.187)$$

Podstawiając : $K^{sg} = \frac{K}{2} \left(1 + \frac{\Psi}{\Phi} \right)$, $Q^{sg} = \frac{B}{2} \left(-1 + \frac{\Psi}{\Phi} \right)$, $R^{sg} = \frac{B^2}{2K} \left(-1 + \frac{\Psi}{\Phi} \right)$, równania można zapisać w znanej postaci:

$$\begin{aligned} \sigma_m = K^{sg} \varepsilon + Q^{sg} \theta, \\ \sigma = Q^{sg} \varepsilon + R^{sg} \theta \end{aligned} \quad (7.188)$$

Pozostałe stałe materiałowe można obliczyć na podstawie uzyskanych współczynników równań dla gazu [za Strzeleckim i in. 2008]: $A^{sg} = K^{sg} - \frac{2}{3}N$, $M^{sg} = A^{sg} - \frac{Q^{sg}}{R^{sg}}$, $H^{sg} = Q^{sg} + R^{sg}$. Układ równań konsolidacji ośrodka wypełnionego gazem ma zatem postać:

$$N\nabla^2 u_i + (M^{sg} + N)\varepsilon_{,i} = -\frac{H^{sg}}{R^{sg}}\sigma_{,i},$$

$$\frac{C}{f}\nabla^2 \sigma = \frac{1}{R^{sg}}\dot{\sigma} - \frac{H^{sg}}{R^{sg}}\dot{\varepsilon}.$$
(7.189)

Układ można uzupełnić o człony związane z temperaturą w przypadku potrzeby opisu konsolidacji w warunkach nieizotermicznych. W przypadku dużych odkształceń, należy użyć kolejnych członów rozwinięcia.

Prawo Boyle'a-Mariotte'a można również wykorzystać bezpośrednio w związkach konstytutywnych uzależniających naprężenia od odkształceń. Posługując się naprężeniem porowym w miejsce ciśnienia prawo to można zapisać w postaci $\sigma V = const$. Objętość przy dowolnym naprężeniu można zapisać w odniesieniu do objętości w stanie początkowym $V = V_0(1 + \theta)$. Jeśli jako punkt odniesienia przyjmiemy naprężenie wywołane ciśnieniem atmosferycznym, czyli:

$$\sigma_a V_a = \sigma V_a (1 + \theta),$$
(7.190)

naprężenie można zapisać w funkcji odkształcenia:

$$\sigma = \frac{\sigma_a}{1 + \theta}.$$
(7.191)

Z prawa Boyle'a-Mariotte'a wynika również definicja współczynnika ściśliwości dla gazu $\beta = \frac{1}{p}$, co

przy użyciu powyższych zależności można zapisać w postaci $\beta = \frac{(1 + \theta)}{p_a}$ lub stosując wcześniej

stosowane oznaczenie $R = -\frac{\sigma_a}{(1 + \theta)f}$, zatem nie jest on stałą materiałową, lecz funkcją. Dlatego

równania konstytutywne ośrodka dwufazowego dla procesów izotermicznych przyjmują postać:

$$\sigma_{ij} = 2N\varepsilon_{ij} + (A\varepsilon + Q\theta)\delta_{ij},$$

$$\sigma - \sigma_a = Q\varepsilon - \frac{\sigma_a}{(1 + \theta)f}\theta,$$
(7.192)

Dodatkowo, należałoby zwrócić uwagę, że w przypadku cieczy prędkości filtracji są niewielkie, przepływ jest laminarny, zatem do opisu przepływu można użyć prawa Darcy'ego; w równaniach

zachowania pędu przy małych prędkościach pomijamy człony związane z bezwładnością. W przypadku gazów, zwłaszcza przy wysokiej temperaturze i ciśnieniu, powodujących szybki przepływ gazu o dużej gęstości, bezwładność zaczyna odgrywać większą rolę, i w porach gruntu może występować przepływ turbulentny.

Przy przepływie laminarnym opory ruchu zależne są tylko od lepkości przepływającej cieczy, widoczne jest to w formie równania Darcy'ego zaproponowanej dla przepływów jednowymiarowych przez Beara [1972]:

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\mu}{\kappa} \bar{v}^f, \quad (7.193)$$

gdzie κ to współczynnik przepuszczalności, a μ to lepkość dynamiczna płynu, $\kappa = \frac{k\mu}{\gamma}$. Przy

wyższych prędkościach przepływ laminarny przechodzi w turbulentny i zależność między gradientem wysokości hydraulicznej a prędkością przestaje być liniowa, zaczynają mieć znaczenie opory związane z masą przepływającego płynu, będące funkcją kwadratową prędkości przepływu. Stąd do równania Darcy'ego została wprowadzona poprawka Forchheimera [1901], wśród zapisów tego równania, jedną z najbardziej popularnych jest forma podana przez Beara [1972]:

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\mu}{\kappa} \bar{v}^f + \beta \rho \bar{v}^{f^2}, \quad (7.194)$$

Gdzie β to współczynnik Forchheimera, znany również, jako współczynnik fluacji.

Bardziej szczegółowa klasyfikacja reżimów przepływu płynów przez ośrodki porowate została opracowana Chauvetau & Trirriot [1967], następnie zmodyfikowana przez Skjetne [1995]. Dla ośrodków o prostej geometrii wyróżnia ona 4 reżimy [za Skjetne & Auriault, 1999]:

- przepływ o liniowej charakterystyce, opisywany przez równanie Darcy'ego
- przepływ o słabej bezwładności, opisywany przez równanie sześciennic:

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\mu}{\kappa} \bar{v}^f + \frac{\gamma \rho}{\mu} \bar{v}^{f^3}, \quad (7.195)$$

gdzie γ to stała materiałowa ośrodka,

- przepływ o dużej bezwładności, opisywany równaniem potęgowym:

$$-\frac{dp}{dx} = a \bar{v}^f + b \bar{v}^{fm}, \quad (7.196)$$

gdzie a i b to współczynniki materiałowe, oraz $1 < m < 2$, lub w wersji uproszczonej:

$$-\frac{dp}{dx} = b \bar{v}^{fm}, \quad (7.197)$$

W przypadku ośrodków anizotropowych, wg Skjetne & Auriault [1999], przepływ o dużej bezwładności opisuje równanie odpowiadające równaniu Forchheimera (7.194), przy czym współczynnik κ jest różny od współczynnika przepuszczalności przy przepływie laminarnym, a współczynnik β jest zależny od kierunku.

- Przepływ turbulentny, opisany równaniem:

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\mu}{\kappa_{fht}} \bar{v}^f + \beta_t \rho \bar{v}^{f^2}, \quad (7.198)$$

gdzie: $\kappa_{fht} \neq \kappa_{fh}$ i $\beta_t \neq \beta$.

Analizę zagadnienia nieliniowej filtracji metodami asymptotycznej homogenizacji przeprowadzili m.in. Mei & Auriault [1991], Rasoloarijaona & Auriault [1994], gdzie dla reżimu przepływu o niewielkiej bezwładności (Przy siłach lepkości będących tego samego rzędu, co siły bezwładności) otrzymali oni człon korygujący równanie Darcy'ego będący funkcją sześcienną prędkości filtracji (jego wartość, zgodnie z prezentowanymi przez nich wynikami badań laboratoryjnych, jest jednak niewielka), człon ten zanika dla reżimu o dużej bezwładności (Przy dominacji sił bezwładności nad siłami lepkości), gdzie spadek ciśnienia opisany jest funkcją kwadratową prędkości, co odpowiada równaniu Forchheimera.

Zgodnie z pracą Skjetne&Auriault [1999], przepływ o małej bezwładności występuje przy liczbie Reynoldsa $Re \ll 1$ do $Re = O(1)$, natomiast w pełni turbulentny występuje przy $Re \gg 1$. Dla ośrodków porowatych liczbę Reynoldsa definiuje się np. przez formułę podaną przez Beara [1972]:

$$Re = \frac{v^f d_m}{\nu} \quad (7.199)$$

Gdzie d_m to średnica miarodajna ziaren (przyjmowana jako d_{10}), a ν to lepkość kinematyczna. w miarę wzrostu liczby Reynoldsa człon liniowy staje się pomijalny, zatem przepływ taki lepiej opisuje równanie Chezy-Krasnopolskiego [Kulma, 1995]:

$$\nu = K \sqrt{I} \quad (7.200)$$

Gdzie K to współczynnik oporów nieliniowych a i to spadek hydrauliczny (spadek wysokości H); używając oznaczeń jak w równaniu (7.200) można napisać $K = 1 / \sqrt{\beta \rho}$ Współczynniki filtracji i fluacji wyznaczyć można laboratoryjnie, oprócz tego istnieje wiele formuł empirycznych. Zestawienie formuł dla określania współczynników filtracji i fluacji oraz opis metody wyznaczania laboratoryjnego można znaleźć np. w pracy Sobieski i in. [2016].

7.6. Literatura do rozdziału 7

AURIAULT J.-L., SANCHEZ-PALENCIA, E., (1977)

Etude du comportement macroscopique d'un milieu poreux sature deformable, *Journal de*

- Mecanique*, vol 16, 576-603.
- AURIAULT J.-L., (1983)
Effective macroscopic description for heat conduction in periodic composites, *J Heat Mass Transfer* vol 26, 861-869
- AURIAULT, J.-L., STRZELECKI T, BAUER J., HE S., (1990)
Porous de-formable media saturated by a very compressible fluid: quasi-statics, *Eur. J. Mech., A/Solids*, 9, vol 4, 373-392
- AURIAULT J.-L., (1991)
Heterogeneous Medium. Is an Equivalent Macroscopic Description Possible?, *Int. J. Engng. Sci.*, 29, 7, s. 785 - 795.
- AURIAULT J.-L., LEWANDOWSKA J., (1993)
Homogenization of diffusion and adsorption macrotransport in porous media: Macrotransport in absence of advection”, *Geotechnique*, vol. 43, 457-469, 1993
- AURIAULT J.-L., LEWANDOWSKA J., (1996)
„Diffusion/adsorption/advection macrotransport in soils”, *Eur J. Mech A/Solids*, vol 15, 681-704
- AURIAULT J-L, BOUTIN C, GEINDREAU C., (2009)
Homogenization of Coupled Phenomena in Heterogenous Media, Wiley, ISBN 978-1-84821-161-2
- BAUER J, GERGOWICZ Z., (1986)
Próba skonstruowania teoretycznego modelu węgla wyrzutowych, Raport Serii SPR Nr. 388, Instytut Geotechniki Politechniki Wrocławskiej.
- BEAR J. (1972)
Dynamics of fluids in Porous Media, Elsevier, Nowy Jork
- BENSSOUSSAN A, LIONS J.L., PAPANICOLAU G. (1978)
Asymptotic Analysis for Periodic Structures, North-Holland, Amsterdam
- BERGER, L., BORDAS, R., BURROWES, K., GRAU, V., TAVENER, S., KAY, D. (2016)
A poroelastic model coupled to a fluid network with applications in lung modelling., *Int J Numer Method Biomed Eng.* 32(1)
- BIOT, M.A., (1935)
Le probleme de la consolidation des matieres argileuses sous une charge, *An. Soc. Sc. de Brux.*, ser. B, vol. 55, pp. 110-113
- BIOT, M.A., (1941)
General Theory of Three-Dimensional Consolidation, *Journal of Applied Physics*, vol 12, no 2 pp 155-164,
- BIOT, M.A., (1955)
Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. *J. Appl. Phys.* 26, 182
- BIOT, M.A (1956)
Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. I. Low-Frequency Range. *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol 28, pp 168-178
- BIOT M.A., WILLIS D.G., (1957)
The Elastic Coefficients of the Theory of Consolidation, *J. Appl. Mech.*, 24,
- BURRIDGE, R., KELLER, J.B., (1982)
Biot's poroelasticity equations by homogenization, *Macroscopic Properties of Disordered*

- Media, *Proceedings of a Conference Held at the Courant Institute June 1–3, 1981*, pp 51-57,
DOI 10.1007/3-540-11202-2_4
- CHAUVETEAU G., THIORRIOT C. (1967)
Regimes d'écoulement en milieu poreux et limite de la loi de Darcy, *La Houille Blanche* 2,
141-148.
- COUSSY O., (1995)
Mechanics of porous continua, Wiley & Sons
- COUSSY O., (2007)
Revisiting the constitutive equations of unsaturated porous solids using a Lagrangian
saturation concept *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*;31:1675–1694
- COUSSY O. (2010)
Mechanics and Physics of Porous Solids, John Wiley
- COWIN S.C., (1999)
Bone Poroelasticity, *Journal of Biomechanics*, vol 32 issue 3 pp 217-238
- DE GROOT S.R., MAZUR P. (1984)
Non Equilibrium Thermodynamics North-Holland Publishing Company, Amsterdam
- DETOURNAY, E. AND CHENG, A.H.-D., (1993)
Fundamentals of poroelasticity, Chapter 5 in *Comprehensive Rock Engineering: Principles,
Practice and Projects, Vol. II, Analysis and Design Method*, ed. C. Fairhurst, Pergamon
Press, pp. 113-171
- DERSKI W., (1975)
Zarys Mechaniki Ośrodków Ciągłych, PWN, Warszawa
- EMMRICH R. (1984)
Experimental verification of electrokinetic consolidation model, PhD thesis in Polish,
Wrocław University of Technology, Institute of Geotechnics, Report ser. PRE No. 307
- ENE H. SANCHEZ-PALENCIA E., (1975)
Equations et phenomenes de surface poul ecoulement dans un modele de milieu poreux, *J
Mechanique* vol 14, 73-108
- FILLUNGER P., (1915)
Versuche über die Zugfestigkeit bei allseitigem Wasserdruck. *Österr. Wochenschrift für den
öffentlichen Baudienst*. Vol. 29, p. 443-448.
- FILLUNGER P., (1936)
Erdbaumechanik? Selbstverlag des Verfassers, Wien.
- FORCHHEIMER, P., (1901)
Wasserbewegung durch Boden. *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, 45, pp. 1782-
1788
- GELHAR L.W. (1987)
Stochastic analysis of solute transport in saturated and unsaturated porous media,
Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media, ed. J. Bear i Y. Corapcioglu,
Martinus Nijhof Publichers, s 657-700.
- GERSEWANOW, N.M. (1937)
Osnowy dynamiki gruntowoj massy Moskwa-Leningrad
- KOWALSKI, S. J. (1992).
On the motion of a fluid-saturated porous solid. *Transport in Porous Media*, 9(1-2), 39–47.

- KRÖNER E. (1986)
 Statistical Modeling, w *Modeling Small Deformations of Polycrystal*, chap. 8, J. Gittus, J. Zarka ed., Elsevier Appl Sci. Publ., London.
- KUBIK, J. (1986)
 A macroscopic description of geometrical ore structure of porous solids, *Int J Engng Sci* vol 24 No 6 pp 971-980
- KUBIK, J., & CIESZKO, M. (2005)
 Analysis of matching conditions at the boundary surface of a fluid-saturated porous solid and a bulk fluid: the use of Lagrange multipliers. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 17(4)
- KULMA, R., (1995)
Podstawy obliczeń filtracji wód podziemnych, Wydawnictwa Dydaktyczne AGH
- LADE, P.V., DE BOER R., (1997)
 The concept of effective stress for soil, concrete and rock *Geotechnique*, 47, pp. 61-78
- ŁYDŹBA D, (1991)
 Constitutive equations of gas-coal medium *Studia Geotechnica et Mechanica*, vol XIII, No 3-4, 51-62
- ŁYDŹBA D., (2002)
Zastosowania Asymptotycznej Homogenizacji w Mechanice Gruntów i Skał, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej
- MATHERON G. (1967)
Éléments pour une théorie des milieux poreux, Paris, Masson et Cie,
- MARK, A.F.T., HUANG L.D., WANG Q.Q. (1994)
 A biphasic poroelastic analysis of the flow dependent subcutaneous tissue pressure and compaction due to epidermal loadings – issues in pressure sore. *ASME J. Biomech Engng*. 116:421-429
- MEI C. C., AURIAULT J.-L., (1991)
 The effect of weak inertia on flow through a porous medium, *J. Fluid Mech.* 222, 647-663.
- NOWAKOWSKI, A. (2015)
 O granicach stosowalności klasycznych związków Terzagiego i Biota w mechanice skał, *Prace Instytutu Mechaniki Górotworu PAN* Vol. 17, no. 1-2
- MOEENDARBARY E, VALON L, FRITZSCHE M, HARRIS AR, MOULDING DA, THRASHER AJ, STRIDE E, MAHADEVAN L, CHARRAS GT., (2013)
 The cytoplasm of living cells behaves as a poroelastic material. *Nat Mater.* Mar;12(3):253-61
- MOW, V.C. KWAN M.K., LAI W.M., HOLMES M.H., (1986)
 A finite deformation theory for nonlinearly permeable soft hydrated biological tissues. In G.W. Schmid-Shonbein (ed) *Frontiers in Biomechanics* 153-179, New York, Springer – verlag.
- NOWACKI W., (1975)
Teoria sprężystości, PWN Warszawa
- NUR, A., BYERLEE, J.D. (1971)
 An exact effective stress law for elastic deformation of rock with fluids. *J. Geophys. Res.* **76**, 6414
- PEÑA, A. (1996)

- A theoretical study of brain biomechanics via the poroelastic theory and the finite element method.* PhD dissertation, University of Cambridge
- PEÑA, A., BOLTON M.D., PICKARD J.D., (1998)
Cellular poroelasticity: A theoretical model for soft tissue mechanics, *The Biot Conference on Poromechanics*, 1998, Louvain-la-Neuve, Belgium pp. 475-480
- PIĘTKOWSKI R., (1957)
Mechanika gruntów
- ROOSE T., NETTI, P.A., MUNN, L.L., BOUCHER, Y., JAIN, R.K., (2003)
Solid stress generated by spheroid growth estimated using a linear poroelasticity model. *Microvascular Research* Volume 66, Issue 3 , Pages 204–212,
- RASOLOARIJAONA M., AURIAULT, J.L., (1994)
Nonlinear seepage flow through a rigid porous medium, *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 13 pp. 177-195
- ROYER P., AURIAULT J.L., STRZELECKI T., (1996)
Macroscopic behaviour of gas flow with adsorption a fractured porous medium, *Mech. Res. Com.*, Vol. 23, no.1, 67-73
- SANCHEZ-PALENCIA, E (1980)
Non-homogeneous media and vibration theory, Springer Verlag
- SIMON, B.R., KAUFMANN M.V., MCAFEE M.A., BALDWIN A.L., (1993)
Finite element models for arterial wall mechanics, *ASME J. Biomech Engng* 115; 489-496
- SKEMPTON, A.W. (1954)
The pore pressure coefficients A and B, *Geotechnique*, 4, 143-147.
- SKJETNE E. (1995)
High-velocity flow in porous media: analytical, numerical, and experimental studies (Thesis)
- SKJETNE E., AURIAULT J.L. (1999)
New insights on steady, non-linear flow in porous media, *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 18(1): 131-145
- SOBIESKI W., LIPÍŃSKI, S., DUDD A., W., TRYKOZKO A., MAREK M., WIĄCEK J., MATYKA M., GOŁEMBIEWSKI, J., (2016)
Granularne ośrodki porowate, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie
- STRZELECKI T. (RED.) , AURIAULT J.L., BAUER J., KOSTECKI S., PUŁA W. (1996)
Mechanika ośrodków niejednorodnych, Teoria homogenizacji. Wydawnictwo DWE Wrocław, STRZELECKI T., BAUER J. & AURIAULT J. L. (1993)
Constitutive Equation of a Gas-Filled Two-Phase Medium, *Transport In Porous Media* vol 10: 197-202
- STRZELECKI T., KOSTECKI S. (2008)
Non-linear Biot–Darcy’s process of consolidation, *Studia Geotechnica et Mechanica*, Vol. XXX, No. 1–2
- STRZELECKI T, KOSTECKI S, ŻAK S. (2008)
Modelowanie przepływów przez ośrodki porowate, DWE, Wrocław,
- SUKLJE, L., (1969)
Rheological aspects of soil mechanics, New York.
- SZYMAŃSKI, A., (2007)
Mechanika gruntów, Wydawnictwo SGGW, Warszawa

UCIECHOWSKA-GRAKOWICZ, A., (2016)

Druga postać związków konstytutywnych procesów nieizotermicznych ośrodków dwufazowych uzyskana przy użyciu potencjału Gibbsa. *Nauki techniczne i inżynierskie [Dokument elektroniczny]*. Cz. 6 / [red. nauk. Jacek Leśny, Jędrzej Nyckowiak]. Poznań : Młodzi Naukowcy, 2016. s. 78-83.

VERRUIJT A., (2015)

Theory and problems of poroelasticity, Delft University of Technology

VON TERZAGHI K., (1923)

Die Berechnung der Durchlässigkeitsziffer des Tonen aus dem Verlauf der Spannungserscheinungen. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien Math.-Naturwiss. Kl., Abt. 2A, 132, 105.

VON TERZAGHI, K., PECK, R.B., MESRI, G., (1996)

Soil Mechanics in Engineering Practice, Third Edition, John Wiley & Sons, New York

WILMAŃSKI K., (2006)

A few remarks on Biot's model and linear acoustics of poroelastic saturated materials *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 26(6-7):509-536

YANG M., TABER L.A., (1991)

The possible role of poroelasticity in the apparent viscoelastic behavior of passive cardiac muscle, *J Biomech* 24:587-597

ZAOUÏ A., (1987)

Approximate Statistical Modelling and Applications, dans *Lecture Notes in Physics* nr 272 *Homogenization Techniques for Composite Media*, Springer-Verlag Berlin, strony 338 - 397.