

## 4. PODSTAWY TEORII PRZEPIYU PŁYNU PRZEZ OŚRODEK POROWATY

Michał Strzelecki, Tomasz Strzelecki

### 4.1 Prawa rządzące przesączaniem wody przez pory ośrodka dwufazowego

Wszystkie skały, w tym w szczególności grunty posiadają własności filtracyjne, dzięki którym ciecze i gazy mogą się przez nie przedostawać pod wpływem pola grawitacyjnego, gradientu ciśnienia w płynie, różnicy potencjału elektrycznego lub chemicznego, różnicy temperatur. Podstawowe prawo przepływu wody przez grunty zostało sformułowane przez Darcy'ego w latach 1852-1855 [Darcy H., 1856]. Darcy nie uwzględnił wcześniejszych prac Poiseuille'a [Strzelecki i in., 2008], który rozważając teoretycznie przepływ laminarny wody przez rurkę kapilarną, uzyskał uśrednione równanie ruchu analogiczne do równania Darcy'ego. Jak wiadomo prawo Darcy'ego w oryginalnej postaci wyraża się wzorem:

$$\vec{v} = k\vec{J} \quad (4.1)$$

gdzie  $k$  oznacza współczynnik filtracji,  $\vec{v}$  pole wektorowe prędkości filtracji, a  $J$  to spadek hydrauliczny wyrażający się wzorem:

$$\vec{J} = grad(H), \quad (4.2)$$

przy czym  $H$  oznacza wysokość hydrauliczną wyrażoną uproszczonym wzorem Bernoulliego:

$$H = \frac{p}{\rho g} + x_i \delta_{i3}. \quad (4.3)$$

W wielu pracach przedstawiono liczne uwagi krytyczne do przedstawionego przez Darcy'ego prawa. Najważniejsze z nich można streścić w następujących tezach:

- Darcy nie uwzględnił faktu, że gradient wysokości hydraulicznej  $H$  ma przeciwny zwrot niż wektor prędkości filtracji  $\vec{v}$ , więc podstawowe prawo Darcy'ego powinno mieć postać:

$$\vec{v} = -k\vec{J} \quad (4.4)$$

- Kröber [wg. Wiczysty, 1982] podniósł problem granic stosowalności prawa Darcy'ego,
- Forchheimer w swojej pracy [Forchheimer, 1914] podał zależność definiującą równanie przepływu filtracyjnego w przypadku, gdy ruch cieczy przepływającej przez pory ma charakter turbulentny, w postaci:

$$\vec{J} = a\vec{v} + b\vec{v}\vec{v} \quad (4.5)$$

Przedstawione szczegółowe omówienie wszelkich aspektów i uwag związanych z prawem Darcy'ego można znaleźć w pracach Połubarinowej-Kocziny [1977], Wiczystego [1982], Strzeleckiego i in. [2008], [2015] i wielu innych autorów.

Zagadnieniem przepływu laminarnego przez pory ośrodka gruntowego zajmowano się również w poszukiwaniu makroskopowego prawa przepływu filtracyjnego drogą uśrednienia procesów zachodzących w skali por, przyjętej jako skala niejednorodności ośrodka periodycznego z zastosowaniem metody asymptotycznej homogenizacji.

W skali niejednorodności, proces laminarnego przepływu cieczy opisują zgodnie z pracami Bensoussana i in. [1978], Auriault'a i in. [1980, 1990] Strzeleckiego i in. [1996], Łydźby [2002], równania Naviera Stokesa z równaniem ciągłości przepływu cieczy nieściśliwej, dla której  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ . Uwzględniając warunek brzegowy  $\vec{v} = 0$  na kontakcie płynu z ciałem stałym oraz warunki periodyczności dla pola wektorowego prędkości i funkcji ciśnienia w płynie, uzyskuje się układ równań różniczkowych, który jest punktem wyjścia do rozpoczęcia procesu homogenizacji. W wyniku przeprowadzonego rozwiązania uzyskujemy liniowe prawo Darcy'ego z opisem matematycznym, w jaki sposób można wyznaczać numerycznie wartość tensora przepuszczalności, jeżeli potrafimy określić strukturę ośrodka porowatego i znamy lepkość przepływającego przez pory ośrodka płynu. Uzyskane w cytowanych wyżej pracach rozwiązanie jest istotnym osiągnięciem fizyki teoretycznej. Używając tylko narzędzi matematycznych, uzyskano przy przejściu ze skali mikroskopowej do makroskopowej zupełnie odmienny charakter równań opisujących proces przepływu w obydwu skalach, oraz udało się określić rząd wielkości tensora przepuszczalności w skali makroskopowej. Należy przy tym podkreślić, że uzyskany wynik jest w pełni zgodny z wynikami doświadczeń, a zależność współczynnika filtracji od stosunku  $l^2 / \mu$ , gdzie  $l$  określa wielkość rozmiaru komórki reprezentacyjnej RVE i  $\mu$  oznacza lepkość płynącego przez pory ośrodka płynu została potwierdzona licznymi eksperymentami.

### 4.1.1 Klasyczny model matematyczny teorii filtracji

Równania hydrodynamiki wód podziemnych zostały określone przy przyjęciu następujących założeń:

- ośrodek porowaty tworzy strukturę ciała stałego traktowanego, jako ośrodek ciągły, wewnątrz którego istnieje sieć kanalików filtracyjnych wzajemnie połączonych,
- nie występują pory zamknięte zawierające ciecz lub gaz,
- sieć kanalików jest na tyle regularna, że można określić elementarną objętość reprezentatywną RVE, która reprezentować będzie wyodrębniony prostopadłościan o nieskończenie małych wymiarach,
- pory ośrodka wypełnione są cieczą,
- proces przepływu cieczy odbywa się w stałej temperaturze (proces izotermiczny),
- na proces filtracji nie ma wpływu pole elektryczne i magnetyczne ziemi,
- nie uwzględniamy wpływu potencjału chemicznego,
- ruch cieczy rozpatrujemy obserwując go względem nieruchomego układu odniesienia  $x_i$ , a więc w układzie Lagrange'a.

Proces zachowywania się cieczy opisują:

- konstytutywne równania stanu,
- równania ciągłości przepływu,
- równania ruchu cieczy przez ośrodek porowaty.

Jak wykażemy, powyższy układ równań pozwolił określić model matematyczny przepływu cieczy przez ośrodek porowaty. Uzyskane równania muszą być uzupełnione przez warunki brzegowe i początkowe.

## 4.1.1.1 Konstrytuwne równania stanu

Przez pory ośrodka porowatego może przepływać płyn o dużej ściśliwości objętościowej (np. gaz, mieszaniny cieczy i gazu) lub ciecz wykazująca się bardzo małą ściśliwością. Mówimy w tym drugim przypadku o liniowo sprężystym reżimie filtracji. *Ograniczymy się do dwóch przypadków równania stanu*: pierwszy, gdy mamy w porach ośrodka dwufazowego ciecz i drugi, gdy pory wypełnione są gazem.

W obydwu przypadkach panujące w cieczy ciśnienie lub jego przyrost powoduje odkształcenia objętościowe zarówno płynu jak i fazy stałej ośrodka. Uwzględniając zmiany objętościowe cieczy i szkieletu, mówimy o reżimie sprężystym przepływu filtracyjnego. Gdy pomijamy efekty sprężystości objętościowej, mówimy o tzw. sztywnym reżimie filtracji.

Zakładamy, że faza stała ośrodka nie ulega odkształceniom postaciowym i dopuszczamy w tej fazie rozważań jedynie zmiany objętościowe, wyrażające się zmianą porowatości matrycy ciała stałego.

Sprężystość objętościową cieczy opisuje prawo Hooke'a, według którego względna zmiana gęstości objętościowej płynu  $\rho$  jest proporcjonalna do zmiany ciśnienia w nim panującego:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\beta_w dp, \quad (4.6)$$

gdzie  $\beta_w$  oznacza współczynnik objętościowej ściśliwości cieczy, definiowany jako względna zmiana objętości cieczy przy zmianie ciśnienia o 1 bar. Przykładowo dla wody  $\beta_w$  jest rzędu wielkości  $10^{-10} 1/Pa$ .

Równanie (4.6) prowadzi do nieliniowego związku pomiędzy gęstością płynu i ciśnieniem cieczy w postaci:

$$\rho = \rho_a \exp(-\beta_w(p - p_a)), \quad (4.7)$$

gdzie  $\rho_a$  oznacza gęstość płynu w warunkach ciśnienia atmosferycznego, a  $p_a$  oznacza ciśnienie atmosferyczne równe 1 bar.

Powyższy związek konstytutywny upraszcza się do związku liniowego ciśnienia od dylatacji cieczy (odkształcenia objętościowego cieczy):

$$p - p_a = R\theta. \quad (4.8)$$

Przy niewielkich wielkościach ciśnienia (do 100 bar) można przyjąć, że zmiany gęstości są nieznaczne i wówczas można założyć, że  $\rho = const$ .

W przypadku gazów, zależność objętości od ciśnienia jest nieliniowa, stąd przy określaniu współczynnika ściśliwości należy posługiwać się wartościami bezwzględnymi. Zależności między ciśnieniem, objętością i temperaturą opisują prawa gazowe. Zależność między ciśnieniem a objętością dla stałej temperatury opisuje prawo Boyle'a-Mariotte'a:

$$pV = const. \quad (4.9)$$

Objętość przy dowolnym naprężeniu można zatem zapisać w odniesieniu do objętości w stanie początkowym  $V = V_0(1 + \theta)$ . Prowadzi to do równania:

$$p_a V_a = p V_a (1 + \theta). \quad (4.10)$$

Ostatecznie uwzględniając prawo Boyle'a-Mariotte'a, związek konstytutywny dla gazu ma postać:

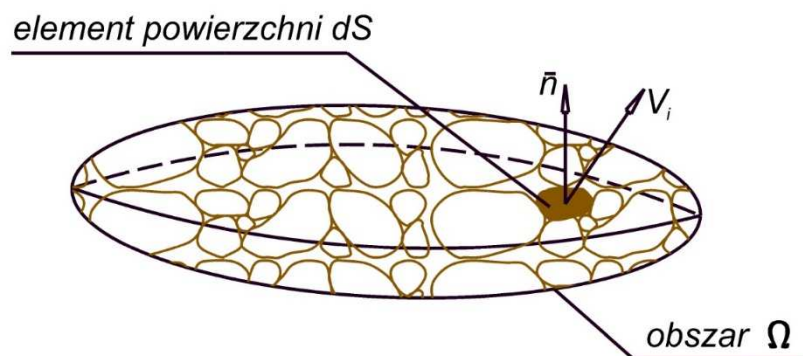
$$p - p_a = \frac{p_a}{(1 + \theta)}. \quad (4.11)$$

### 4.1.1.2 Równanie ciągłości przepływu

Niech  $\Omega$  określa obszar elementarny wypełniony ośrodkiem dwufazowym. Oznaczmy  $S$  powierzchnię ograniczającą, przez którą odbywa się przepływ filtracyjny cieczy. Niech  $\vec{n}$  oznacza wektor normalny do  $S$  i skierowany na zewnątrz obszaru  $\Omega$ .

Przepływ cieczy przez powierzchnię  $S$  ograniczającą obszar  $\Omega$  rys. 1 określa równanie:

$$\int_S \rho v_i dS + \int_{\Omega} \frac{\partial(\rho)}{\partial t} d\Omega = 0. \quad (4.12)$$



Rys. 6.1. Przepływ medium przez powierzchnię  $S$  ograniczającą obszar  $\Omega$

Korzystając z twierdzenia Gaussa – Ostrogradskiego, możemy zamienić pierwszą całkę powierzchniową w równaniu (4.12) na objętościową. Dostajemy, więc:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial(\rho)}{\partial t} d\Omega = 0. \quad (4.13)$$

Powyższe równanie pozwala zapisać związek lokalny w postaci:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}(\vec{v}) = 0, \quad (4.14)$$

gdzie:

$$\frac{d\bullet}{dt} = \frac{\partial\bullet}{\partial t} + v_i \frac{\partial\bullet}{\partial x_i} \quad (4.15)$$

określa pochodną materialną gęstości objętościowej płynu.

### 4.1.1.3 Klasyczny model matematyczny procesu filtracji

Zakładając, w pierwszym przypadku, że ośrodek gruntowy jest ciałem idealnie sztywnym, a ciecz przepływająca przez siatkę kanalików filtracyjnych jest nieściśliwa, układ równań opisujący proces przepływu laminarnego sprowadza się do równania stanu:  $\rho = \text{const}$ , równania ciągłości przepływu:  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ , równań ruchu wyrażonych poprzez prawo Darcy'ego:  $\vec{v} = -\tilde{k} \operatorname{grad}(H)$  gdzie  $\tilde{k}$  oznacza tensor przepuszczalności. Podstawiając równania ruchu do równania ciągłości przepływu, dostajemy równanie różniczkowe opisujące proces przepływu cieczy nieściśliwej przez jednorodny, izotropowy, nieodkształcalny ośrodek porowaty w postaci:

$$\operatorname{div}(\tilde{k} \operatorname{grad}(H)) = 0. \quad (4.16)$$

Równanie (4.16) jest podstawowym równaniem teorii filtracji dla przypadku, gdy ośrodek gruntowy jest ciałem idealnie sztywnym.

W drugim przypadku zakładamy, że ośrodek gruntowy wykazuje się odkształcalnością objętościową zarówno w zakresie fazy stałej i ciekłej, nie wykazuje jednakże odkształcalności postaciowej. Równanie ciągłości w tym przypadku wyraża się równaniem (4.14). Podstawiając do równania (4.14) równanie ruchu Darcy'ego oraz uwzględniając, że  $\rho = \rho_c f$  dostajemy zgodnie z pracą Wieczystego [1982] klasyczne równanie przepływu nieustalonego w postaci:

$$\operatorname{div}(\rho_c f \tilde{k} \operatorname{grad}(H)) = \frac{\partial(\rho_c f)}{\partial t} \quad (4.17)$$

pochozna po prawej stronie równania ciągłości (4.17) jest iloczynem dwóch funkcji:  $\rho_c$  i  $f$ , więc:

$$\frac{\partial(\rho_c f)}{\partial t} = \rho_c \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial \rho_c}{\partial t}. \quad (4.18)$$

Wprowadzając następnie założenia, że prędkość zmiany gęstości płynu w czasie jest zależna od iloczynu gęstości i prędkości zmiany ciśnienia:

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} = \rho_c \beta_w \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (4.19)$$

co można by uznać, że jest zgodne ze związkiem konstytutywnym (4.6) zakładając, że zmiana gęstości jest zmianą gęstości w czasie. Zakładając następnie, że prędkość zmian porowatości jest wprost proporcjonalna do prędkości zmian ciśnienia cieczy w klasycznym ujęciu teorii filtracji, wprowadza się związek konstytutywny w postaci:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \beta_s \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (4.20)$$

Powyższy związek trudno uzasadnić jakimkolwiek związkiem fenomenologicznym mechaniki gruntów i skał. W teorii konsolidacji Biota zakłada się, wprost, że porowatość w procesie odkształceń szkieletu gruntowego jest wielkością stałą, co też nie jest założeniem zgodnym z rzeczywistością, ale nie wpływa w znaczący sposób na poprawność rozwiązań tej teorii. Związek (4.18) korzystając ze wzorów (4.19) i (4.20) można przedstawić w postaci:

$$\frac{\partial(\rho_c f)}{\partial t} = \rho_c^2 g \beta_s \frac{\partial H}{\partial t} + f \rho_c^2 g \beta_w \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (4.21)$$

W klasycznym modelu matematycznym przyjmuje się następnie, że

$$\frac{\partial p}{\partial t} = f \rho_c g \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (4.22)$$

co oczywiście jest nieściśle, gdyż przyjmując za słuszną definicję wysokości hydraulicznej dla przepływu filtracyjnego:

$$H = \frac{p}{f \rho_c g} + x_i \delta_{i3}. \quad (4.23)$$

Pochodna względem czasu wynosi:

$$\frac{\partial(\rho_c f g H)}{\partial t} = \rho_c g f \frac{\partial H}{\partial t} + H g f \frac{\partial \rho_c}{\partial t} + H \rho_c g \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (4.24)$$

więc prędkość zmian ciśnienia wyraża się wzorem:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = f \rho_c g \frac{\partial H}{\partial t} + g f H \frac{\partial \rho_c}{\partial t} + g H \rho_c \frac{\partial f}{\partial t} - x_i \delta_{i3} \frac{\partial \rho_c}{\partial t}, \quad (4.25)$$

co prowadzi do zależności:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\rho_c g \frac{\partial H}{\partial t}}{1 - \rho_c g \beta_w H - \rho_c g \beta_s H + x_i \delta_{i3} \rho_c g \beta_w}. \quad (4.26)$$

Tymczasem mimo istotnej niezgodności, klasyczne równanie przepływu nieustalonego przyjmuje się w postaci:

$$\operatorname{div}(\rho \tilde{k} \operatorname{grad}(H)) = \rho \eta_{spr} \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (4.27)$$

gdzie  $\eta_{spr}$  określane jest mianem pojemności sprężystej warstwy i wynosi:

$$\eta_{spr} = \rho g (\beta_s + f \beta_w). \quad (4.28)$$

Zakładając, że zmiany gęstości cieczy w zależności od zmiennych przestrzennych są małe, przyjęto, że nie zależą od zmiennych przestrzennych. Równanie (4.27) upraszcza się wówczas do postaci:

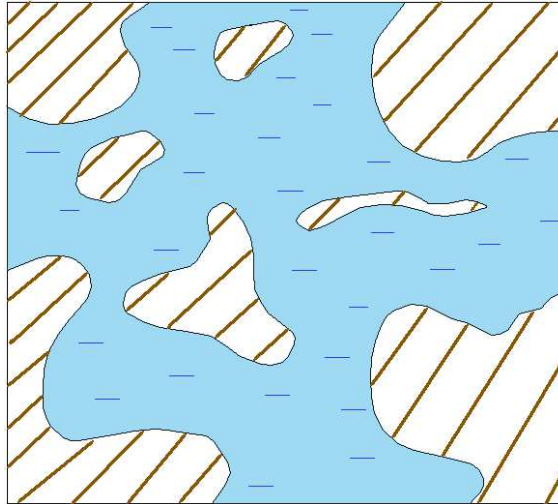
$$\operatorname{div}(\tilde{k} \operatorname{grad}(H)) = \eta_{spr} \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (4.29)$$

Powyższe równanie, mimo wykazanych nieprawidłowości od strony matematycznej i fizycznej, uważa się, jako podstawowe równanie hydrodynamiki wód podziemnych dla ośrodka ściśliwego, przez który przepływa ściśliwa ciecz i w oparciu o nie wykonuje się obliczenia numeryczne stosując profesjonalne programy do obliczeń hydrogeologicznych jak na przykład powszechnie stosowany program ModFlow.

## **4.2 Proces homogenizacji filtracji płynu przez ośrodki porowate metodą zbieżności dwuskalowej**

### **4.2.1 Definicja zagadnienia**

Założmy, że ośrodek porowaty tworzy nieodkształcalną strukturę utworzoną z ciała stałego. Wewnątrz tej struktury istnieje sieć kanałków filtracyjnych wzajemnie połączonych na tyle regularnie, że można określić objętość elementarną reprezentatywną VER spełniającą warunki periodyczności strukturalnej. Przyjmujemy, że rozważane ciało zawiera dużą liczbę takich powtarzalnych elementów, co schematycznie można przedstawić na rys. 4.2



Rys. 4.2 Przekrój przez periodyczną strukturę ośrodka porowatego.

Przez pory ośrodka przepływa nieściśliwa ciecz Newtona, a zjawisko odbywa się w stałej temperaturze (proces izotermiczny). Proces przepływu opisują równania:

□ **równania ruchu:**

$$\operatorname{div} \sigma^{lf} = \rho^f \frac{D\vec{v}^f}{Dt}, \quad (4.30)$$

gdzie  $\frac{D}{Dt}$  określa pochodną materialną definiowaną przez:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial \bullet}{\partial t} + \vec{v}^f \operatorname{grad} \bullet. \quad (4.31)$$

Strzałka nad określoną wielkością oznacza, że mamy do czynienia z wielkością wektorową;

$\vec{v}$  określa wektor prędkości płynącej cieczy, przy czym indeks f oznacza, że mamy do czynienia z wielkością fizyczną wymiarową,

$\sigma^{lf}$  określa wektor naprężenia w cieczy, przy czym indeks l oznacza ciecz ,

$\rho^f$  oznacza gęstość przepływającej przez ośrodek cieczy,

$\operatorname{div}$  - symbol określa operację obliczania dywergencji:

$$\operatorname{div} = \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{\partial}{\partial X_3}, \quad (4.32)$$

$\operatorname{grad}$  - jest symbolem operacji obliczania gradientu:



$$\mathit{grad} = \left( \frac{\partial}{\partial X_1}, \frac{\partial}{\partial X_2}, \frac{\partial}{\partial X_3} \right), \quad (4.33)$$

- **związki konstytutywne dla przypadku cieczy Newtona:**

$$\boldsymbol{\sigma}^f = -p^f \cdot \mathbf{I} + \mu \mathbf{D}(\vec{v}^f), \quad (4.34)$$

przy czym  $D$  oznacza tensor prędkości dewiatora odkształcenia. W zapisie wskaźnikowym tensor ten opisuje wyrażenie:

$$D_{ij} = e_{ij}(\vec{v}^f) - \frac{1}{3} \delta_{ij} e_{kk}(\vec{v}^f), \quad (4.35)$$

gdzie:

$$e_{ij}(\vec{v}^f) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i^f}{\partial X_j} + \frac{\partial v_j^f}{\partial X_i} \right), \quad (4.36)$$

przy czym  $I$  jest tensorem jednostkowym, a  $\delta_{ij}$  - deltą Kroneckera,

- **równania zachowania masy:**

$$\frac{\partial \rho^f}{\partial t} + \mathit{div}(\rho^f \vec{v}^f) = 0. \quad (4.37)$$

Powyższy zbiór równań opisujący przepływ cieczy uzupełnia warunek adhezji na granicy fazy ciekłej i fazy stałej ośrodka:

$$\vec{v}^f|_{\Gamma} = 0. \quad (4.38)$$

Zakładamy ponadto, że periodyczność struktury powoduje, iż wszystkie funkcje wektorowe i skalarne są  $\Omega$ -periodyczne ( $\Omega$  - określa objętość elementarnej komórki reprezentatywnej RVE).

Uwzględniając postulat nieściśliwości cieczy newtonowskiej, układ równań opisujących proces przepływu z uwzględnieniem postulatu periodyczności, można przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 \vec{v}^f - \mathit{grad} p^f &= \rho^f \left( \frac{\partial \vec{v}^f}{\partial t^f} + \vec{v}^f \mathit{grad} \vec{v}^f \right), \\ \mathit{div} \vec{v}^f &= 0, \\ \vec{v}^f|_{\Gamma} &= \vec{0}, \\ [\vec{v}^f] &= 0, \quad [p] = 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Powyższy układ równań opisuje proces przepływu cieczy nieściśliwej przez pory nieodkształcalnego ośrodka i stanowi punkt wyjścia do rozpoczęcia procesu homogenizacji, opartej na metodzie zbieżności dwuskalowej, omówionej w pracy Strzeleckiego [Strzelecki, 1996]. Proces ten musi być poprzedzony wprowadzeniem zmiennych bezwymiarowych, a więc przeprowadzimy normalizację powyższego układu równań.

#### 4.2.2 Proces normalizacji równań

W równaniach (4.39) wszystkie wielkości są wielkościami fizycznymi z określonymi mianami odpowiadającymi sensowi fizycznemu tych wielkości. Zgodnie z procedurą teorii homogenizacji, dokonamy normalizacji, wykorzystując formalizm zaproponowany przez J. Beara [1972]:

$$\begin{aligned}
 v_{\max} &= \max \|\vec{v}^f\|, & p_{\max} &= \max \|p^f\|, \\
 \frac{v_{\max}}{l^2} &= \max \|\nabla^2 \vec{v}^f\|, & \frac{p_{\max}}{l} &= \max \|\text{grad } p^f\|, \\
 \frac{v_{\max}}{t_{\max}} &= \max \left\| \frac{\partial \vec{v}^f}{\partial t} \right\|, & \frac{v_{\max}^2}{l} &= \max \|\vec{v}^f \text{ grad } \vec{v}^f\|.
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Podstawiając wielkości określone zależnościami (4.40) do równań (4.39) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\mu v_{\max}}{l^2} \tilde{N}^2 \left( \frac{\vec{v}^f}{v_{\max}} l^2 \right) - \frac{p_{\max}}{l} \text{grad} \left( \frac{p^f}{p_{\max}} l \right) = \\
 & = \frac{\rho^f v_{\max}}{t_{\max}} \frac{\partial}{\partial t^f} \left( \frac{\vec{v}^f}{v_{\max}} t_{\max} \right) + \frac{\rho^f v_{\max}^2}{l} \left[ \frac{\vec{v}^f}{v_{\max}} \text{grad} \left( \frac{\vec{v}^f}{v_{\max}} \right) \right], \\
 & \text{div} \left( \frac{\vec{v}^f}{v_{\max}} \right) = 0, \\
 & \left. \left( \frac{\vec{v}^f}{v_{\max}} \right) \right|_{\Gamma} = \vec{0}.
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

Wprowadźmy następnie poniższe oznaczenia wartości bezwymiarowych prędkości i ciśnienia:

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}^f}{v_{\max}}, \quad p = \frac{p^f}{p_{\max}}. \tag{4.42}$$

Wszystkie funkcje wielkości fizycznych definiujemy w podwójnej skali rozdzielczości  $(X, Y)$ , a więc:

$$\vec{v} = \vec{v}(X, Y) \quad \text{i} \quad p = p(X, Y),$$

przy czym:

$X \in [0, L]$  jest zmienną przestrzenną (fizyczną, czyli posiadającą wymiar długości) makroskopową,  $Y \in [0, l]$  jest zmienną przestrzenną (fizyczną, czyli posiadającą wymiar długości) lokalną.

W ogólnym przypadku istnieje prosta liniowa zależność pomiędzy zmienną makroskopową i lokalną, a mianowicie:

- $X = Y + C$ , gdzie  $C$  oznacza wielkość stałą;
- wielkości  $\bar{v}(X, Y)$  i  $p(X, Y)$  są  $\Omega$ -periodyczne ze względu na zmienną  $Y$ , co oznacza, że:

$$\bar{v}(X, Y + l) = \bar{v}(X, Y) \quad (4.43)$$

oraz

$$p(X, Y + l) = p(X, Y) \quad (4.44)$$

Ponieważ dążymy do sprowadzenia naszego układu równań do postaci bezwymiarowej, wprowadzimy bezwymiarowe zmienne przestrzenne  $x$  i  $y$  oraz bezwymiarową zmienną czasową  $t$ :

$$\begin{aligned} x &= \frac{X}{L}, & x &\in [0, 1], \\ y &= \frac{Y}{l}, & y &\in [0, 1], \\ t &= \frac{t^f}{t_{\max}}, & t &\in [0, \infty]. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Tak jak pokazaliśmy to na przykładach jednowymiarowych, definiujemy pochodną funkcji po zmiennej makroskopowej wymiarowej  $X$  w postaci:

$$\frac{d}{dX} = \frac{1}{l} \left[ \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right]. \quad (4.46)$$

Korzystając z wyrażenia (4.46), możemy określić pozostałe operatory różniczkowania:

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{1}{l^2} [\varepsilon^2 \nabla_x^2 + 2\varepsilon \nabla_{xy}^2 + \nabla_y^2], \\ \nabla_y^2 &= \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_i}, \\ \nabla_{xy}^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_i} \end{aligned} \quad (4.47)$$

oraz:

$$\begin{aligned}
 grad &= \frac{1}{l}[\varepsilon grad_x + grad_y], \\
 div &= \frac{1}{l}[\varepsilon div_x + div_y], \\
 \frac{\partial}{\partial t^f} &= \frac{1}{t_{\max}} \frac{\partial}{\partial t}, \\
 \text{gdzie: } \varepsilon &= \frac{l}{L}.
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

Wprowadźmy następnie wielkości bezwymiarowe:

$$\begin{aligned}
 Q_l &= \frac{p_{\max}}{l} \Big/ \frac{\mu v_{\max}}{l^2}, \\
 R_{el} &= \frac{\rho^f v_{\max}^2}{l} \Big/ \frac{\mu v_{\max}}{l^2}, \\
 R_{tl} &= \frac{\rho^f v_{\max}^2}{t_{\max}} \Big/ \frac{\mu v_{\max}}{l^2}.
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

Wielkości  $Q_l$ ,  $R_{tl}$ ,  $R_{el}$  mają swoją interpretację fizyczną. Liczba bezwymiarowa  $Q$  określa stosunek sił powstałych z działania gradientu ciśnienia do sił oporu lepkiego przepływającej cieczy:

$$Q_l = O\left(\frac{grad p}{\mu div v}\right). \tag{4.50}$$

W pracach Aurialta [1980,1990] stwierdzono, że w przypadku przepływu filtracyjnego cieczy przez ośrodek porowaty wartość  $Q_l$  jest rzędu  $O(\varepsilon^{-1})$ .

Na podstawie powyżej cytowanych prac Aurialta przedstawimy zamieszczone tam rozumowanie:

- określmy rząd wielkości gradientu ciśnienia obserwowanego w skali mikroskopowej:

$$grad p = O\left(\frac{p}{l}\right) = O\left(\frac{p}{\varepsilon L}\right) = O(\varepsilon^{-1}),$$

- ocenimy następnie wielkość siły oporu lepkiego:

$$\mu div v = O\left(\frac{\mu v}{l^2}\right) = O(1),$$

- stosunek tych dwóch wielkości daje ostatecznie rząd wielkości:

$$Q_l = O(\varepsilon^{-1}). \tag{4.51}$$

Wielkość  $Q_l$  może oczywiście przyjmować wartość znacznie większą lub mniejszą od przyjętej we wzorze (4.51). Przeprowadzimy homogenizację przyjmując następujące rzędy wielkości zmiennej bezwymiarowej  $Q_l$ :

$$Q_l = O(\varepsilon^0), \quad Q_l = O(\varepsilon^{-1}), \quad Q_l = O(\varepsilon^{-2}). \quad (4.52)$$

Pierwszy z powyższych przypadków oznacza, że w skali mikroskopowej wielkość gradientu ciśnienia jest tego samego rzędu wielkości, co wielkość sił oporu lepkiego. Mamy więc do czynienia w skali mikroskopowej z klasycznym problemem hydrauliki.

Ostatni z przypadków, tzn. gdy  $Q_l = O(\varepsilon^{-2})$  oznacza, że gradient ciśnienia jest rzędu  $O(\varepsilon^{-1})$ , gdy siły oporu lepkiego są rzędu  $O(\varepsilon)$ , czyli przyczyna powodująca ruch jest  $\varepsilon^2$  silniejsza od sił oporu.

Auriault w pracy [1994] sugeruje, że rząd wielkości  $R_{el}$  jest związany z wielkością  $Q_l$  następującym związkiem:

$$R_{el} = O(Q_l^{-1}), \quad (4.53)$$

co wynika z faktu, że o rzędzie wielkości obydwu liczb bezwymiarowych decyduje rząd wielkości prędkości bezwymiarowej  $\vec{v}$ . Gdyby przyjąć powyższe założenie, wówczas pozostałoby do przeanalizowania następująca kombinacja rzędu wielkości stałych bezwymiarowych:

$$\begin{aligned} Q_l = O(\varepsilon^0) & \quad \text{i} \quad R_{el} = O(\varepsilon^0), \\ Q_l = O(\varepsilon^{-1}) & \quad \text{i} \quad R_{el} = O(\varepsilon), \\ Q_l = O(\varepsilon^{-2}) & \quad \text{i} \quad R_{el} = O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (4.54)$$

W ogólnym przypadku po przyjęciu wstępnie trzech rzędów wielkości  $Q_l$  i analogicznie trzech rzędów wielkości  $R_{el}$  należałoby rozpatrzyć 9 kombinacji wzajemnych relacji tych wielkości. Jeżeli dodatkowo uwzględnimy człon sił wewnętrznych bezwładności, czyli trzy przypadki bezwymiarowej liczby Reynoldsa, musielibyśmy rozważyć 27 przypadków z różnymi konfiguracjami wielkości bezwymiarowych  $Q_l$ ,  $R_{el}$  i  $R_{il}$ .

W naszej pracy ograniczymy się do rozważań znacznie mniejszej liczby wzajemnych relacji, jednakże takich, które dają istotną z punktu widzenia fizyki interpretację przyjętych wstępnych założeń wielkości liczb bezwymiarowych. W przypadku przepływu ustalonego ograniczymy się do przypadków opisanych wzorami (4.54).

Uwzględniając (4.42), (4.45) do (4.49) w układzie równań (4.41), otrzymamy znormalizowany układ równań w postaci:

$$\begin{aligned}
 & [\varepsilon^2 \nabla_x^2 + 2\varepsilon \nabla_{xy}^2 + \nabla_y^2] \vec{v} - Q_i [\varepsilon \text{grad}_x + \text{grad}_y] p = \\
 & = R_{il} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + R_{el} [\varepsilon \vec{v} \text{grad}_x + \vec{v} \text{grad}_y] \vec{v}, \\
 & \quad \varepsilon \text{div}_x \vec{v} + \text{div}_y \vec{v} = 0, \\
 & \quad \vec{v}|_{\Gamma} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

Operatory gradientu dywergencji i Laplace'a  $\nabla^2$  przedstawiono w postaci jawnej przy opisie zależności (4.55). Indeksy  $x, y$  przy symbolach  $\text{grad}$ ,  $\text{div}$ ,  $\nabla^2$  oznaczają, że zmiennymi niezależnymi, względem których wykonuje się operację różniczkowania, są zmienne bezwymiarowe  $x, y$ . Powyższy układ równań uzupełniają warunki  $\Omega$ -periodyczności funkcji ciśnienia  $p$  i prędkości  $\vec{v}$ :

$$\begin{aligned}
 [p] &= 0, \\
 [\vec{v}] &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

Układ równań bezwymiarowych (4.55) w pełni odpowiada układowi równań (4.41). Wszystkie wielkości wektorowe i skalarne są zawarte w przedziale  $[0,1]$  poza zmienną czasową  $t$ , która zmienia się w przedziale  $[0, \infty]$ .

Ograniczymy się następnie do rozważań przepływu ustalonego cieczy. Dla tego przypadku układ równań (4.55) upraszcza się do postaci:

$$\begin{aligned}
 & [\varepsilon^2 \nabla_x^2 + 2\varepsilon \nabla_{xy}^2 + \nabla_y^2] \vec{v} - Q_i [\varepsilon \text{grad}_x + \text{grad}_y] p = R_{el} [\varepsilon \vec{v} \text{grad}_x + \vec{v} \text{grad}_y] \vec{v}, \\
 & \quad \varepsilon \text{div}_x \vec{v} + \text{div}_y \vec{v} = 0, \\
 & \quad \vec{v}|_{\Gamma} = 0,
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

z warunkami periodyczności (4.56).

Teoria homogenizacji proponuje rozwinięcie poszukiwanych funkcji  $\vec{v}$  i  $p$  w szereg asymptotyczny względem małego parametru  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}
 \vec{v} &= \vec{v}^{(0)} + \varepsilon \vec{v}^{(1)} + \varepsilon^2 \vec{v}^{(2)} + \varepsilon^3 \vec{v}^{(3)} + \dots \\
 p &= p^{(0)} + \varepsilon p^{(1)} + \varepsilon^2 p^{(2)} + \varepsilon^3 p^{(3)} + \dots
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

Proces normalizacji pozwolił nam na określenie bezwymiarowego układu równań (4.55), który może być poddany obecnie procedurom homogenizacji metodą zbieżności dwuskalowej.

### 4.2.3 Proces homogenizacji

Rozpocznijmy od przypadku, gdy wielkości bezwymiarowe  $Q_l$  i  $R_{el}$  są rzędu:

$$Q_l = O(\varepsilon^{-1}) \quad i \quad R_{el} = O(\varepsilon) \quad (4.59)$$

Biorąc pod uwagę układ równań (4.57) z warunkami periodyczności (4.56), sprowadza się on do postaci:

$$\begin{aligned} & [\varepsilon^2 \nabla_x^2 + 2\varepsilon \nabla_{xy}^2 + \nabla_y^2] \vec{v} - \varepsilon^{-1} [\varepsilon \text{grad}_x + \text{grad}_y] p = \\ & = \varepsilon [\varepsilon \vec{v} \text{grad}_x + \vec{v} \text{grad}_y] \vec{v}, \\ & \varepsilon \text{div}_x \vec{v} + \text{div}_y \vec{v} = 0, \\ & \vec{v}|_{\Gamma} = 0, \\ & [\vec{v}] = 0, \\ & [p] = 0. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Po uwzględnieniu rozwinięć asymptotycznych (4.58) w układzie równań (4.60) otrzymujemy nieskończony układ równań różniczkowych odpowiadający kolejnym potęgom  $\varepsilon^i$ . Dla najniższych rzędów rozwinięcia względem  $\varepsilon$  uzyskujemy następujące układy równań:

- dla rzędu wielkości  $\varepsilon^{-1}$ :

$$\text{grad } p^{(0)} = 0, \quad (4.61)$$

- dla rzędu wielkości  $\varepsilon^0$ :

$$\text{div}_y \vec{v}^{(0)} = 0, \quad (4.62)$$

$$\vec{v}|_{\Gamma} = 0, \quad (4.63)$$

$$[\vec{v}^{(0)}] = 0, \quad (4.64)$$

$$[p^{(0)}] = 0, \quad (4.65)$$

$$\nabla_y^2 \vec{v}^{(0)} - \text{grad}_y p^{(1)} - \text{grad}_x p^{(0)} = \vec{0}, \quad (4.66)$$

- dla rzędu wielkości  $\varepsilon^1$ :

$$\text{div}_y \vec{v}^{(1)} + \text{div}_x \vec{v}^{(1)} = 0, \quad (4.67)$$

$$\vec{v}|_{\Gamma} = \vec{0}, \quad (4.68)$$

$$[\vec{v}^{(1)}] = \vec{0}, \quad (4.69)$$

$$[p^{(1)}] = 0, \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned} \nabla_y^2 \vec{v}^{(1)} + 2\nabla_{xy}^2 \vec{v}^{(0)} - \text{grad}_y p^{(2)} - \text{grad}_x p^{(1)} = \\ = \vec{v}^{(0)} \text{grad}_y \vec{v}^{(0)}, \end{aligned} \quad (4.71)$$

□ dla rzędu wielkości  $\varepsilon^2$ :

$$\text{div}_y \vec{v}^{(2)} + \text{div}_x \vec{v}^{(1)} = 0, \quad (4.72)$$

$$\vec{v}^{(2)}|_{\Gamma} = \vec{0}, \quad (4.73)$$

$$[\vec{v}^{(2)}] = \vec{0}, \quad (4.74)$$

(...)

Kropki poniżej układu równań (4.61) do (4.74) wskazują, że można kontynuować układ równań dla kolejnych potęg małego parametru epsilon:  $\varepsilon^3, \varepsilon^4, L, \varepsilon^n$ . Jednak już rozpatrzenie dwóch pierwszych równań pozwala uzyskać oczekiwane rezultaty dotyczące matematycznego modelu ekwiwalentnego ośrodka i sposobu uśredniania stałych materiałowych ośrodka makroskopowego.

Z równania (4.61) wynika, że wielkość ciśnienia  $p^{(0)}$  zależy tylko od zmiennej makroskopowej  $\mathcal{X}$ , czyli w skali lokalnej  $y$  jest wielkością stałą:

$$p^{(0)} = p^{(0)}(x) \quad (4.75)$$

Aby uzyskać zależności pomiędzy wielkościami najwyższych rzędów rozwinięć asymptotycznych (4.58), zadanie sprowadza się do rozwiązania układu równań zestawionego z równań (4.62) do (4.66), co daje:

$$\begin{aligned} \nabla_y^2 \vec{v}^{(0)} - \text{grad}_y p^{(1)} - \text{grad}_x p^{(0)} &= \vec{0}, \\ \text{div}_y \vec{v}^{(0)} &= 0, \\ \vec{v}^{(0)}|_{\Gamma} &= 0, \\ [\vec{v}^{(0)}] &= 0, [p^{(1)}] = 0. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Rozwiązaniem powyższego układu równań są:

$$\begin{aligned} \vec{v}^{(0)} &= -\vec{k}(y) \text{grad}_x p^{(0)}, \\ p^{(1)} &= \vec{\tau}(y) \text{grad}_x p^{(0)} + \tilde{p}^{(1)}(x), \end{aligned} \quad (4.77)$$



gdzie tensor  $k(y)$  i wektor  $\vec{\tau}(y)$  są funkcjami zmiennej lokalnej, a  $\tilde{p}^{(-1)}(x)$  jest funkcją zależną tylko od zmiennej makroskopowej  $x$ .

Podstawiając rozwiązanie (4.77) do układu równań (4.76) widzimy, że funkcje  $k(y)$  i  $\vec{\tau}(y)$  muszą spełniać układ równań:

$$\begin{aligned}\nabla_{y_j}^2 k(y) + \frac{\partial \vec{\tau}(y)}{\partial y_j} + \delta_{ij} &= 0, \\ \operatorname{div}_y k(y) \mathbf{I} &= 0, \\ k(y)_{|r} &= 0, \\ [k(y)] &= 0, \\ [\vec{\tau}(y)] &= 0.\end{aligned}\tag{4.78}$$

Równania (4.78) stanowią punkt wyjścia do określenia po ich uśrednieniu wielkości makroskopowego współczynnika filtracji Darcy'ego. Stosując metody numeryczne, układ równań (4.78) stanowi punkt wyjścia do formułowania zagadnienia brzegowego. Uzyskane funkcje  $k(y)$  i  $\vec{\tau}(y)$  po uśrednieniu pozwalają znaleźć tensor drugiego rzędu  $k_{ij}$  i wektor  $\vec{\tau}$ .

Zapisując rozwiązanie pierwsze (4.77) w składowych wektora prędkości filtracji mamy:

$$v_i^{(0)} = -k_{ij}(y) \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j}.\tag{4.79}$$

Przechodząc w równaniu (4.79) do zmiennych fizycznych oraz mnożąc i dzieląc prawą stronę równania przez  $\mu * l$  uzyskujemy:

$$v_i^{f(0)} = \frac{-k_{ij}(y)}{\mu} \frac{\mu v_{\max}}{p_{\max} l} l \cdot L \frac{\partial p^{f(0)}}{\partial X_j},\tag{4.80}$$

stąd:

$$v_i^{f(0)} = -\frac{k_{ij}(y)}{\mu} Q_l^{-1} \cdot \varepsilon^{-1} \cdot l^2 \frac{\partial p^{f(0)}}{\partial X_j}.\tag{4.81}$$

Ponieważ założyliśmy, że  $Q_l = O(\varepsilon^{-1})$ , można więc przyjąć, że  $A = O(1) = 1$  i możemy napisać:

$$Q_l^{-1} = A\varepsilon = \varepsilon.\tag{4.82}$$

Uwzględniając (4.82) w równaniu (4.81), otrzymujemy ostatecznie rozwiązanie układu równań w postaci:

$$v_i^{f(0)} = -k_{ij}(y) \frac{l^2}{\mu} \frac{\partial p^{f(0)}}{\partial X_j}. \quad (4.83)$$

Po dokonaniu operacji uśrednienia ze względu na współrzędną przestrzenną  $y$  mamy:

$$\langle v_i^{f(0)} \rangle = -\frac{l^2}{\mu} \langle k_{ij}(y) \rangle \frac{\partial p^{f(0)}}{\partial X_j}, \quad (4.84)$$

gdzie oczywiście:

$$\langle \bullet \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \bullet dv. \quad (4.85)$$

Równanie (4.84) jest znanym z fizyki doświadczalnej prawem filtracji Darcy'ego. Prawo to możemy zapisać w postaci:

$$\langle v_i^{f(0)} \rangle = -\tilde{k}_{ij} \frac{\partial p^{f(0)}}{\partial X_j}, \quad (4.86)$$

gdzie  $\tilde{k}_{ij}$  jest tensorem drugiego rzędu przepuszczalności filtracyjnej, którego wartość liczbowa jest wielkością rzędu:

$$\tilde{k}_{ij} = O\left(\frac{l^2}{\mu} k_{ij}\right), \quad (4.87)$$

przy czym  $k_{ij}$  jest wielkością średnią  $\left\langle \frac{l^2}{\mu} k_{ij}(y) \right\rangle$ , zależną od struktury wewnętrznej celki w skali niejednorodności.

Zastanówmy się nad sensem fizycznym wszystkich wielkości uzyskanych drogą uśrednienia w równaniu (4.84). Wątpliwości budzi sens wielkości średniej  $\vec{v}_i^{f(0)}$  definiowanej jako wielkość średniej objętościowej, gdy tymczasem prędkość filtracji jest związana z przepływem przez powierzchnię, a więc powinniśmy obliczać średnią po powierzchni. W rzeczywistości można pokazać, że w tym przypadku obie średnie są sobie równe. Wynika to z charakteru selenoidalnego funkcji  $\vec{v}^{(0)}$ .

Wiemy, że prawdziwa jest tożsamość:

$$\frac{\partial}{\partial y_k}(v_k^{(0)} y_i) \equiv \frac{\partial v_k^{(0)}}{\partial y_k} y_i + v_k^{(0)} I_{ik}. \quad (4.88)$$

Całkując obustronnie tę tożsamość po  $\Omega$  oraz uwzględniając twierdzenie Gaussa o dywergencji i warunek adhezji  $\vec{v}^0|_{\Gamma} = 0$  uzyskamy:

$$\langle v_i^{(0)} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\delta \Omega_F \cap \delta \Omega} v_k^{(0)} y_i n_k dS, \quad (4.89)$$

gdzie  $\delta \Omega_F$  i  $\delta \Omega$  są brzegami odpowiednio: objętości  $\Omega_F$  i  $\Omega$ , a  $\vec{n}$  jest wektorem jednostkowym normalnym, skierowanym na zewnątrz do brzegu objętości  $\Omega_F$ . Wykazaliśmy więc, że średnia objętościowa  $\langle v_i^{(0)} \rangle$  określa przepływ.

Rozważmy następnie przypadek, gdy wielkości bezwymiarowe  $Q_l$  i  $R_{el}$  są rzędu:

$$\begin{aligned} Q_l &= O(1), \\ R_{el} &= O(1). \end{aligned} \quad (4.90)$$

Fizycznie oznacza to, że wielkość sił gradientu ciśnienia jest tego samego rzędu co siły oporu lepkiego i siły konwekcji bezwładności.

Uwzględniając (4.90) w układzie równań (4.55) z warunkiem periodyczności (4.56) uzyskamy znormalizowany układ równań odpowiadających temu przypadkowi:

$$\begin{aligned} [\varepsilon^2 \nabla_x^2 + 2\varepsilon \nabla_{xy}^2 + \nabla_y^2] \vec{v} - [\varepsilon \text{grad}_x + \text{grad}_y] p &= \\ = [\varepsilon \vec{v} \cdot \text{grad}_x + \vec{v} \cdot \text{grad}_y] \vec{v}, \\ \varepsilon \text{div}_x \vec{v} + \text{div}_y \vec{v} &= 0, \\ \vec{v}|_{\Gamma} &= 0, \\ [\vec{v}] &= 0, \\ [p] &= 0. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Po uwzględnieniu rozwinięć asymptotycznych (4.58) w układzie równań (4.91) otrzymujemy układy równań dla poszczególnych rzędów, poczynając od najniższych rzędów wielkości małego parametru  $\varepsilon$ :

□ dla rzędu wielkości  $\varepsilon^0$ :

$$\nabla_y^2 \vec{v}^{(0)} - \text{grad}_y p^{(0)} = 0, \quad (4.92)$$

$$\operatorname{div}_y \vec{v}^{(0)} = 0, \quad (4.93)$$

$$\vec{v}_{|\Gamma}^{(0)} = \vec{0}, \quad (4.94)$$

$$[\vec{v}^{(0)}] = 0, \quad (4.95)$$

$$[p^{(0)}] = 0, \quad (4.96)$$

□ dla rzędu wielkości  $\varepsilon^1$ :

$$\begin{aligned} \nabla_y^2 \vec{v}^{(1)} + \operatorname{grad}_y \operatorname{div}_x \vec{v}^{(0)} + \operatorname{grad}_x \operatorname{div}_y \vec{v}^{(0)} - \operatorname{grad}_x p^{(0)} - \\ - \operatorname{grad}_x p^{(1)} = (\vec{v}^{(0)} \operatorname{grad}_y) \vec{v}^{(0)}, \end{aligned} \quad (4.97)$$

$$\operatorname{div}_x \vec{v}^{(0)} + \operatorname{div}_y \vec{v}^{(1)} = 0, \quad (4.98)$$

$$\vec{v}_{|\Gamma}^{(1)} = 0, \quad (4.99)$$

$$[\vec{v}^{(1)}] = 0, \quad (4.100)$$

$$[p] = 0, \quad (4.101)$$

Pierwszy układ równań (4.92) do (4.96) reprezentuje jednorodne zagadnienie brzegowe. Z tego układu równań uzyskujemy wprost, że:

$$v^{(0)} = 0, \quad p^{(0)} = p^{(0)}(x). \quad (4.102)$$

Tak więc w analizowanym przypadku, gdy rozpatrujemy homogenizację idealną, tzn. taką, że epsilon jest bardzo bliski zeru, nie obserwujemy żadnego przepływu cieczy, mimo że istnieje w skali makro zmiana ciśnienia  $p^{(0)}(x)$ .

Rozważmy następnie układ równań (4.97) do (4.101). Jeżeli przyjrzymy się bliżej temu układowi równań, to stwierdzimy, że jest on identyczny z układem równań (4.76) w przypadku, gdyby zastąpić funkcję wektora  $\vec{v}(0)$  przez  $\vec{v}(1)$ . Korzystając z wyniku rozwiązania układu równań (4.76) uzyskamy:

$$\begin{aligned} \vec{v}^{(1)} &= -k(y) \vec{\operatorname{grad}}_x p^{(0)}, \\ p^{(1)} &= \vec{a}(y) \vec{\operatorname{grad}}_x p^{(0)} + \tilde{p}^{(1)}(x), \end{aligned} \quad (4.103)$$

gdzie  $k(y)$  i  $\vec{a}(y)$  są funkcjami zmiennej lokalnej  $y$ , a  $\tilde{p}^{(1)}(x)$  jest funkcją zależną tylko od zmiennej makroskopowej  $x$ .

Podstawiając rozwiązanie (4.103) do układu równań (4.97) do (4.101), otrzymujemy układ równań, w którym niewiadomymi są funkcje  $k(y)$  i  $\vec{a}(y)$ :

$$\begin{aligned}\nabla_{y_j}^2 k(y) + \frac{\partial a_i(y)}{\partial y_j} + \delta_{ij} &= 0, \\ \operatorname{div}_y k(y) I &= 0, \\ k(y)|_{\Gamma} &= 0, \\ [k(y)] &= 0, \\ [a(y)] &= 0.\end{aligned}\tag{4.104}$$

Zapisując pierwsze rozwiązanie (4.103) w składowych wektora prędkości dostajemy:

$$v_i^{(1)} = -k_{ij}(y) \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j}.\tag{4.105}$$

Przechodząc w równaniu (4.105) do zmiennych wymiarowych uzyskamy:

$$v_i^{f(1)} = -\frac{k_{ij}(y)}{\mu} l^2 \frac{\partial p^{f(0)}}{\partial X_j}.\tag{4.106}$$

Biorąc z rozwinięcia asymptotycznego (4.58) prędkości  $\vec{v}$  wielkości z dokładnością do małych pierwszego rzędu, stosuje się wzór:

$$\vec{v} = \vec{v}^{(0)} + \varepsilon \vec{v}^{(1)},\tag{4.107}$$

więc:

$$\varepsilon^{-1} \vec{v}_i^f = -\frac{k_{ij}(y)}{\mu} l^2 \frac{\partial p^{f(0)}}{\partial X_j}.\tag{4.108}$$

Dokonując operacji uśrednienia ze względu na współrzędną lokalną  $y$  uzyskujemy:

$$\langle v_i^f \rangle = -\varepsilon \tilde{k}_{ij} \frac{\partial p^{f(0)}}{\partial X_j}.\tag{4.109}$$

Z powyższego wzoru widać, że dla bardzo małej wartości epsilon średnia prędkość filtracji dąży do zera:  $\langle v_i^f \rangle = 0$ . Tak więc prędkość filtracji dla  $\varepsilon \rightarrow 0$  jest równa zero, mimo że gradient ciśnienia  $p^{(0)}$  może być różny od zera.

Ten przypadek opisuje filtrację bardzo lepkiej cieczy wymuszoną ograniczoną wartością gradientu ciśnienia porowego  $\frac{\partial p^{(0)}}{\partial X_i} = O(1)$ . Dopiero nieskończenie duży gradient ciśnienia  $\frac{\partial p^{(0)}}{\partial X_i} = O(\varepsilon^{-1})$ , niewystępujący w rzeczywistości, powoduje zauważalny przepływ cieczy.

Rozważmy ostatni z rozpatrywanych przypadków, to znaczy gdy:

$$Q_l = O(\varepsilon^{-2}) \quad R_{el} = O(\varepsilon^2)$$

Fizycznie oznacza to, że wielkość sił lepkich i sił konwekcyjnych bezwładności jest rzędu  $O(\varepsilon^2)$ , a więc znacznie mniejsza od sił gradientu ciśnienia.

Znormalizowany układ równań w tym przypadku ma postać:

$$\begin{aligned} & [\varepsilon^2 \nabla_x^2 + 2\varepsilon \nabla_{xy}^2 + \nabla_y^2] \vec{v} - \varepsilon^{-2} [\varepsilon \text{grad}_x + \text{grad}_y] p = \\ & = \varepsilon^2 [\varepsilon \vec{v} \cdot \text{grad}_x + \vec{v} \cdot \text{grad}_y] \vec{v}, \\ & \varepsilon \text{div}_x \vec{v} + \text{div}_y \vec{v} = 0, \\ & \vec{v}|_{\Gamma} = 0, \\ & [\vec{v}] = \vec{0}, \\ & [p] = 0. \end{aligned} \tag{4.110}$$

Układ równań (4.110) po uwzględnieniu rozwinięć asymptotycznych tworzy dla poszczególnych wielkości  $\varepsilon^n$  następujące układy równań:

- dla rzędu  $\varepsilon^{-2}$ :

$$\text{grad}_y p^{(0)} = \vec{0}, \tag{4.111}$$

- dla rzędu  $\varepsilon^{-1}$ :

$$\text{grad}_x p^{(0)} + \text{grad}_y p^{(1)} = \vec{0}, \tag{4.112}$$

- dla rzędu  $\varepsilon^0$ :

$$\nabla_y^2 \vec{v}^{(0)} - \text{grad}_x p^{(1)} - \text{grad}_y p^{(2)} = \vec{0}, \tag{4.113}$$

$$\text{div}_y \vec{v}^{(0)} = 0, \tag{4.114}$$

$$\vec{v}^{(0)}|_{\Gamma} = 0, \tag{4.115}$$

$$[\vec{v}^{(0)}] = 0, \tag{4.116}$$

$$[p^{(0)}] = 0, \tag{4.117}$$

□ dla rzędu  $\varepsilon^1$ :

$$\nabla_y^2 \vec{v}^{(1)} + \text{grad}_x \text{div}_y \vec{v}^{(0)} + \text{grad}_y \text{div}_x \vec{v}^{(0)} - \text{grad}_x p^{(2)} - \text{grad}_y p^{(3)} = 0 \quad (4.118)$$

$$\text{div}_x \vec{v}^{(0)} + \text{div}_y \vec{v}^{(1)} = 0, \quad (4.119)$$

$$\vec{v}^{(1)}|_{\Gamma} = 0, \quad (4.120)$$

$$[p^{(1)}] = 0. \quad (4.121)$$

Równanie (4.111) daje wartość ciśnienia  $p^{(0)}$  niezależnego od skali lokalnej, czyli:

$$p^{(0)} = p^{(0)}(x). \quad (4.122)$$

Następnie równanie (4.112) z warunkiem  $\Omega$ -periodyczności funkcji  $p^{(1)}$  prowadzi do wniosku, że:

$$\text{grad}_x p^{(0)} = 0 \quad (4.123)$$

i

$$\text{grad}_y p^{(1)} = 0. \quad (4.124)$$

Stąd uzyskujemy, że  $p^{(0)} = \text{const}$ , a funkcja  $p^{(1)}$  jest funkcją tylko zmiennej makroskopowej, czyli:

$$p^{(1)} = p^{(1)}(x). \quad (4.125)$$

Pozostałe równania mają identyczną postać jak równania dla przypadku, w którym  $Q_l = O(\varepsilon^{-1})$  i  $R_{el} = O(\varepsilon)$ , co pozwala przewidzieć postać rozwiązania w formie:

$$v_i^{(0)} = -k_{ij}(y) \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_j}. \quad (4.126)$$

Po uśrednieniu uzyskujemy więc znów prawo Darcy'ego, ale z wymuszeniem o rząd wielkości mniejszym niż w pierwszym rozpatrywanym przypadku.

Wprowadzając z rozwinięcia asymptotycznego ciśnienia dwa pierwsze człony:

$$p = p^{(0)} + \varepsilon p^{(1)} \quad (4.127)$$

oraz przechodząc w równaniu (4.126) do zmiennych wymiarowych uzyskujemy:

$$v_i^{(0)f} = -k_{ij}(y) \frac{l^2}{\mu} \varepsilon^{-1} \frac{\partial p^f}{\partial X_j}. \quad (4.128)$$

Stąd po uśrednieniu mamy:

$$\langle v_i^{(0)f} \rangle = -\tilde{k}_{ij} \varepsilon^{-1} \frac{\partial p^f}{\partial X_j}. \quad (4.129)$$

Widać, że  $\frac{\partial p}{\partial X_j}$  musi być rzędu  $O(\varepsilon)$ , aby  $\langle v_i^{(0)} \rangle$  była rzędu  $O(1)$ , co oznacza, że rozwiązanie ma sens tylko wtedy, gdy mamy do czynienia z bardzo małymi wymuszeniami. Na przykład, fizycznie należy to rozumieć, że rozpatrujemy problem filtracji cieczy prawie doskonałej o znikomej wartości lepkości kinematycznej, rzędu  $O(\varepsilon)$ . Tylko bardzo mały gradient ciśnienia zapewnia istnienie prędkości filtracji o wartościach rzędu  $O(1)$ . Jak widać, uzyskane rozwiązanie narzuca warunki co do wielkości gradientu ciśnienia w skali makroskopowej. Proces jest homogenizowalny.

### 4.3 Model matematyczny teorii filtracji zgodny z założeniami teorii konsolidacji Biota

#### 4.3.1 Założenia wstępne

Przyjęte w poprzednim rozdziale założenia wstępne do teorii filtracji uzupełnimy o dodatkowe definicje wynikające z teorii konsolidacji Biota [1941,1956] oraz na podstawie prac Coussy'ego [2007,2010] dla ośrodka dwufazowego. Stosując oznaczenia zgodne z pracami Strzeleckiego i in. [2008].

- Niech  $\Omega$  jest prostopadłościenną przestrzenią o nieskończenie małych krawędziach wypełnioną ośrodkiem dwufazowym złożonym: z porowatego szkieletu sprężystego i cieczy wypełniającej jego pory. Określimy przez  $S$  powierzchnię ściany elementu przestrzennego  $\Omega$ , a wektor  $\vec{n}$  jest jednostkowym wektorem normalnym do powierzchni  $S$ , skierowanym na zewnątrz elementu  $\Omega$ . Przez  $\vec{v}^l$  i  $\vec{v}^s$  oznaczać będziemy odpowiednio wektory prędkości filtracji płynu i prędkości szkieletu ośrodka, a  $v_i^r = v_i^l - v_i^s$  określa składowe względnej prędkości przepływu filtracyjnego cieczy przez ośrodek porowaty. Jeżeli  $\rho_s$  i  $\rho_l$  oznaczają kolejno gęstość właściwą szkieletu i cieczy, to możemy określić wielkość gęstości objętościowe szkieletu  $\rho_1$  i cieczy  $\rho_2$ , odniesione każda z nich do objętości całkowitej obszaru  $\Omega$ . Oznaczając przez  $f$  porowatość objętościową, możemy obliczyć te gęstości:  $\rho_1 = (1 - f) \rho_s$  i  $\rho_2 = f \rho_l$ . Przez  $\rho$  oznaczać będziemy gęstość ośrodka dwufazowego równą, co do wartości sumie:  $\rho = \rho_1 + \rho_2$ . Wartość  $\bar{\rho}$  oznaczać będzie gęstość płynu przepływającego przez ścianę  $S$ :  $\bar{\rho} = f_A \rho_l$ , gdzie  $f_A$  oznacza porowatość powierzchniową.
- energię kinetyczną ośrodka dwufazowego możemy wyrazić wzorem:



$$2K = \int_{\Omega} (\rho_{11} v_i^s v_i^s + 2\rho_{12} v_i^s v_i^l + \rho_{22} v_i^l v_i^l) d\Omega \quad (4.130)$$

z warunkami:

$$\rho_{11} + \rho_{12} = \rho_1 > 0; \quad \rho_{22} + \rho_{21} = \rho_2 > 0; \quad \rho_{12} < 0,$$

gdzie  $\rho_{12}$  jest nowym parametrem o wymiarze gęstości określającym dynamiczne sprzężenie pomiędzy dwoma fazami ośrodka;

- funkcja dyssypacji jest formą kwadratową zależną od prędkości względnej przepływu filtracyjnego, co można wyrazić w następujący sposób:

$$2W_d = \int_{\Omega} b v_i^r v_i^r d\Omega \quad (4.131)$$

- gdzie  $b$  jest współczynnikiem oporu filtracyjnego spełniającym warunek  $b > 0$ ;
- korzystając z równania (4.131) można określić objętościowe siły wewnętrzne wynikające z oporu lepkiego przepływającej cieczy przez pory ośrodka. Siły działające na szkielet ośrodka wynoszą:

$$M_i^s = \frac{\partial W_d}{\partial v_i^s} = - \int_{\Omega} b v_i^r d\Omega \quad (4.132)$$

i na ciecz

$$M_i^l = \frac{\partial W_d}{\partial v_i^l} = \int_{\Omega} b v_i^r d\Omega \quad (4.133)$$

- składowe lokalnego wektora pędu szkieletu i cieczy można obliczyć ze wzoru:

$$P_i^s = \int_{\Omega} (\rho_{11} v_i^s + \rho_{12} v_i^l) d\Omega \quad (4.134)$$

$$P_i^l = \int_{\Omega} (\rho_{12} v_i^s + \rho_{22} v_i^l) d\Omega \quad (4.135)$$

### 4.3.2 Równanie ciągłości przepływ płynu.

Bilans masy płynu przepływającego przez RVE ma postać:

$$\int_S \rho_2 v_i^r n_i dS + \int_{\Omega} \frac{\partial \rho_2}{\partial t} d\Omega = 0. \quad (4.136)$$

Stąd korzystając z twierdzenia Gaussa – Ostrogradskiego równanie ciągłości przepływu płynu ma postać:

$$\frac{d^r \rho_2}{dt} + \rho_2 (\dot{\theta} - \dot{\epsilon}) = 0 \quad (4.137)$$

gdzie  $\frac{d^r}{dt}$  jest pochodną materialną wyrażoną wzorem  $\frac{d^r}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (v_i^l - v_i^s) \frac{\partial}{\partial x_i}$ .

Zakładając, że faza stała jest nieruchoma ( $v_i^s = 0$ ), a przez pory przesącza się ściśliwa ciecz, równanie ciągłości przepływu ma sens tylko w odniesieniu do fazy ciekłej ośrodka i sprowadza się do postaci:

$$\text{div}(\rho_2 \vec{v}^l) = -\frac{\partial(\rho_2)}{\partial t} \quad (4.138)$$

Taką postać równania ciągłości uzyskaliśmy w poprzednim podpunkcie – wzór (4.14) dla klasycznego modelu hydrodynamicznego przepływu filtracyjnego.

### 4.3.3 Równania zachowania pędu dla fazy płynnej

Dla fazy płynnej ośrodka prawo zachowania pędu sprowadza się do postaci:

$$\int_S \sigma n_i dS + \int_{\Omega} b(v_i^s - v_i^l) d\Omega + \int_{\Omega} \rho_2 X_i d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial P_i^l}{\partial t} d\Omega \quad (4.139)$$

gdzie  $\sigma n_i$  oznacza naprężenie rozmyte tzn. odniesione do całej powierzchni przekroju obejmującej szkielet + płyn, a nie tylko do powierzchni zajmowanej przez płyn. Naprężenie  $\sigma$  równa się, co do wartości:

$$\sigma = -pf, \quad (4.140)$$

przy czym  $p$  oznacza ciśnienie efektywne w płynie.

Równanie **Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania.** po wykorzystaniu twierdzenia Gaussa - Ostrogradzkiego pozwala na uzyskanie lokalnego równania ruchu fazy ciekłej ośrodka w postaci:

$$\sigma_{,i} + X_i \rho_2 = b v_i^r + \rho_{12} \frac{\partial v_i^s}{\partial t} + \rho_{22} \frac{\partial v_i^l}{\partial t} \quad (4.141)$$

Dla przypadku przepływu quasi – statycznego można pominąć człony reprezentujące siły bezwładności cieczy i równania ruchu dla fazy płynnej można zapisać w postaci:

$$\sigma_{,i} + X_i \rho_2 = b v_i^r. \quad (4.142)$$

Powyższe równanie prowadzi do klasycznego zapisu prawa Darcy'ego w postaci:

$$\vec{v}^r = k \text{grad} \left( \frac{\sigma}{\rho_2 f g} - x_i \delta_{i3} \right). \quad (4.143)$$

Równanie (4.143) prowadzi do równania Darcy'ego, przy czym  $k$  określa współczynnik przewodności filtracyjnej Darcy'ego:

$$\vec{v} = -k \text{grad}(H), \quad (4.144)$$

przy czym współczynnik filtracji  $k = \rho_2 f g / b$ .

Wykonując operację dywergencji na równaniu (4.142) równanie zachowania pędu możemy zapisać w postaci:

$$\text{div}(\text{grad}(\sigma)) = (\dot{\theta} - \dot{\varepsilon}) / k_w, \quad (4.145)$$

Znane jako równanie przepływu Darcy – Biota. W równaniu tym  $\dot{\theta}$  określa prędkość zmiany dylatacji cieczy,  $\dot{\varepsilon}$  określa prędkość zmiany dylatacji szkieletu, a  $k_w$  wyraża się wzorem:

$$k_w = \frac{k}{f \rho_2 g} = \frac{k}{f^2 \rho_l g}. \quad (4.146)$$

#### **4.3.4 Równanie ruchu ściśliwego płynu przez nieodkształcalny szkielet ośrodka dwufazowego.**

Przyjmując, że szkielet ośrodka jest nieodkształcalny, czyli zakładając, że  $\varepsilon_{ij} = 0$ , a co za tym idzie dylatacja szkieletu  $\varepsilon = 0$ , związki fizyczne sprowadzają się do pojedynczego związku:

$$\sigma - \sigma_a = R\theta \quad (4.147)$$

Podstawiając powyższy związek fizyczny do równania ruchu cieczy (4.145) dostajemy równanie przepływu nieustalonego płynu przez nieodkształcalny szkielet ośrodka dwufazowego w postaci:

$$\text{div}(\text{grad}(\sigma)) = \frac{f \rho_2 g}{kR} \frac{\partial \sigma}{\partial t}. \quad (4.148)$$

Jeżeli rozważamy przepływ ściśliwego gazu przez ośrodek porowaty to związek konstytutywny (4.147) po uwzględnieniu prawa Boyle'a Mariotta sprowadza się do postaci:

$$\sigma - \sigma_a = -\frac{\sigma_a}{(1 + \theta)} \theta. \quad (4.149)$$

Równanie przepływu gazu przez grunt przy założeniu nieściśliwości szkieletu gruntowego sprowadza się w tym przypadku do równania przepływu filtracyjnego w postaci:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(\sigma)) = -\frac{f^2 \rho_l g \sigma_a}{k \sigma^2} \frac{\partial \sigma}{\partial t}. \quad (4.150)$$

W przeciwieństwie do równania determinującego przepływ cieczy przez nieodkształcalny ośrodek porowaty równanie przepływu gazu jest nieliniowe.

#### 4.3.5 Równania filtracji ściśliwego płynu przez ściśliwy szkielet ośrodka dwufazowego

Rozważamy proces filtracji w ośrodku dwufazowym, którego szkielet ulega odkształceniom objętościowym przy braku odkształceń postaciowych. Związki konstytutywne w przypadku przepływu cieczy przez pory ośrodka dwufazowego sprowadzają się w tym przypadku do postaci:

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{1}{3} \sigma_{ii} = K_s \varepsilon + Q \theta \\ \sigma - \sigma_a &= Q \varepsilon + R \theta, \end{aligned} \quad (4.151)$$

lub związki odwrotne:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{R}{K_s R - Q^2} \sigma_m - \frac{Q}{K_s R - Q^2} (\sigma - \sigma_a) \\ \theta &= -\frac{Q}{K_s R - Q^2} \sigma_m + \frac{K_s}{K_s R - Q^2} (\sigma - \sigma_a). \end{aligned} \quad (4.152)$$

Przy założeniu, że w ośrodku dwufazowym prędkość zmian ciśnienia porowego równa jest prędkości zmian naprężenia średniego w szkielecie ze znakiem przeciwnym, można przyjąć, że:

$$\dot{\sigma} = -\dot{\sigma}_m, \quad (4.153)$$

co prowadzi do układu równań:

$$\begin{aligned} -\dot{\sigma} &= K_s \dot{\varepsilon} + Q \dot{\theta} \\ \dot{\sigma} &= Q \dot{\varepsilon} + R \dot{\theta}, \end{aligned} \quad (4.154)$$

skąd dostajemy związek:

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{Q+R}{Q+K_s} \dot{\theta}, \quad (4.155)$$

który prowadzi następnie do związku:

$$\dot{\theta} = \frac{1}{R - Q \frac{Q + R}{Q + K_s}} \dot{\sigma}. \quad (4.156)$$

W rezultacie dostajemy równanie przepływu nieustalonego w postaci:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(\sigma)) = \frac{(K_s - R) f^2 \rho_2 g}{(R K_s - Q^2) k} \dot{\sigma}. \quad (4.157)$$

W przypadku przepływu gazu przez pory ośrodka dwufazowego, a szkielet ulega tylko odkształceniom objętościowym równania konstytutywne sprawdzają się do postaci:

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{1}{3} \sigma_{ii} = K_s \varepsilon + Q \theta \\ \sigma - \sigma_a &= Q \varepsilon - \frac{\sigma_a}{(1 + \theta)} \theta. \end{aligned} \quad (4.158)$$

Z pewnym uproszczeniem można przyjąć równanie filtracji nieustalonej gazu w postaci:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(\sigma)) = - \frac{(K_s \sigma_a + \sigma^2) f^2 \rho_2 g}{(\sigma^2 K_s + Q^2 \sigma_a) k_w} \dot{\sigma}. \quad (4.159)$$

Przedstawiony w punkcie 6.1.2 model matematyczny procesu filtracji cieczy przez ośrodek porowaty różni się od stosowanego powszechnie równania filtracji nieustalonej. Podstawowe różnice pozwalają stwierdzić:

- ❑ wyprowadzone, powyżej równanie przepływu filtracyjnego (4.145) zostało zgodnie z zasadami stosowanymi w mechanice z zasady zachowania pędu, a nie z równania ciągłości przepływającej przez grunt cieczy,
- ❑ uzyskane, równanie nieustalonego przepływu filtracyjnego zależy od przyjętych założeń dotyczących odkształceń fazy płynnej i stałej ośrodka dwufazowego,
- ❑ w przypadku przepływu gazu przez ośrodek porowaty równanie filtracji nieustalonej jest nieliniowe co pokazują równania (4.150) i (4.159),
- ❑ przyjęte w modelu klasycznym równanie ciągłości jest nieściśle, bowiem zakłada, że gęstość cieczy jest funkcją czasu i nie zależy od zmiennych przestrzennych i z tego powodu pochodna materialna  $d\rho/dt$  jest równa pochodnej lokalnej  $\partial\rho/\partial t$ ; pomija się, więc człon konwekcyjny pochodnej materialnej,
- ❑ przyjęty związek konstytutywny określający zależność prędkości zmian porowatości od prędkości zmian ciśnienia porowego, jako związek konstytutywny dla szkieletu gruntowego nie ma żadnego uzasadnienia w mechanice gruntów i skał i z tego względu należy go uznać, jako niepoprawny,
- ❑ Kolejnym istotnym błędem jest przyjęcie liniowej zależności pomiędzy prędkością zmian ciśnienia porowego i prędkością zmian wysokości hydraulicznej  $H$ ,

Jest jeszcze jeden istotny aspekt odrzucenia nieprawidłowo naszym zdaniem sformułowanej teorii ruchu nieustalonego przez pory ośrodka dwufazowego. Z punktu widzenia formalizmu matematycznego trudno rozszerzyć równanie ciągłości płynu o inne człony, gdy rozpatrujemy przepływ płynu wywołany działaniem pola elektrycznego lub gradientem stężenia jonów w płynie. Mechanizm budowy takiego modelu wymaga określenia funkcji dyssypacji prądu elektrycznego i dyssypacji w procesie przepływu osmotycznego oraz uwzględnienie tych funkcji w równaniach zachowania pędu, czyli przy zastosowaniu proponowanej metodyki definicji równań ruchu. Przyjmując, jako punkt wyjścia klasyczny model matematyczny filtracji trudno również o jego rozbudowę o procesy nieizotermiczne. Jak pokazano to w pracy Strzeleckiego [Strzelecki M., 2013] model przepływu nieizotermicznego uzyskuje się z termodynamiki procesów nieodwracalnych poprzez uzyskanie dodatkowych członów w równaniach konstytutywnych. Uwzględniając dodatkowe człony zależne od temperatury w równaniach ruchu można uzyskać model termo-filtracji. Nie widzimy możliwości takiej rozbudowy modelu o kolejne zjawiska w przypadku klasycznego modelu teorii filtracji.

#### **4.4 Układ równań hydrodynamiki wód podziemnych w zagadnieniach płaskich.**

##### **4.4.1 Funkcja potencjału prędkości.**

Rozwiązanie konkretnego zagadnienia przepływu filtracyjnego powinno być traktowane jako zadanie trójwymiarowe. Jednak rozwiązanie szeregu zagadnień metodami analitycznymi nastęrcza duże trudności, a w przypadku metod numerycznych jesteśmy ograniczeni wielkością pamięci maszyn matematycznych. Dlatego rozpatrujemy często przepływ w określonym przekroju zakładając, że w pobliżu tego przekroju własności ośrodka, geometria układu warstw, a więc i parametry przepływu są w przybliżeniu takie same. Wówczas składowa prędkość normalna do przekroju jest równa zero.

Jeżeli w zasięgu rozpatrywanego obszaru zmienia się układ warstw lub własności ośrodka, wówczas można rozwiązać zagadnienie w kilku przekrojach, przyjmując jednakże do obliczeń zawsze schemat dwuwymiarowy.

W dalszych rozważaniach istotne wydaje się wprowadzenie nowej wielkości określanej mianem potencjału prędkości przepływu i wyrażanej związkiem:

$$\Phi = -kH \tag{4.160}$$

W przypadku płaskiego przepływu filtracji równanie przepływu cieczy nieściśliwej przez ośrodek jednorodny izotropowy można zapisać w postaci:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

lub

$$\nabla^2 \Phi = 0. \tag{4.161}$$

Równanie jest ważne w przypadku, gdy rozpatrujemy przepływ przez ośrodek jednorodny i izotropowy. Rozwiązaniem równania (4.161) jest funkcja potencjału prędkości  $\Phi(x, y)$ . Przyrównując funkcję  $\Phi$  do stałej C, takiej, że

$$kH_2 \leq |C| \leq kH_1, \quad (4.162)$$

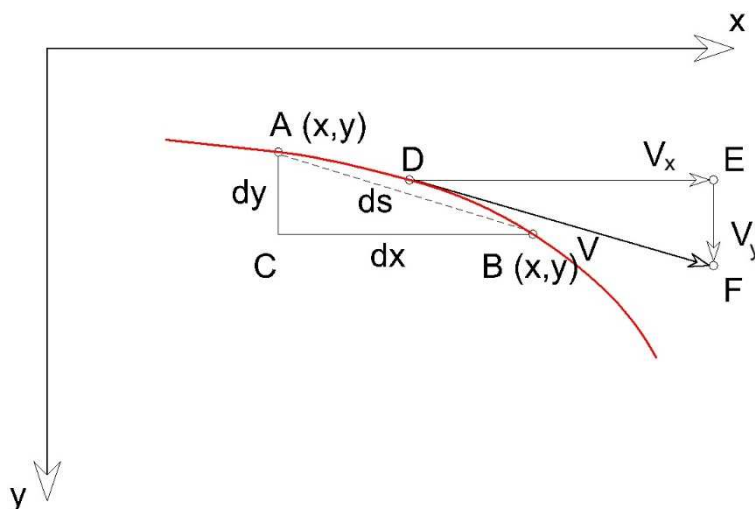
gdzie  $H_1$  i  $H_2$  są to ekstremalne wysokości hydrauliczne na brzegach obszaru filtracji wywołujące przepływ wody w rozpatrywanym obszarze, to dla:

$$\Phi(x, y) = C = \text{const} \quad (4.163)$$

dostajemy równanie linii jednakowego potencjału C, który będziemy nazywać powierzchnią ekwipotencjalną.

### 4.4.2 Funkcja prądu.

Przepływ filtracyjny odbywa się wzdłuż linii normalnych do powierzchni ekwipotencjalnych. Wykażemy, że jest tak w rzeczywistości. W przypadku przeciwnym, gdyby linia prądu nie była normalna do linii ekwipotencjalnych, można by określić składową prędkości przepływu styczną do powierzchni ekwipotencjalnej.



Rys. 4.3 Związek dla linii prądu.

Jak wynika z (4.163) gradient hydrauliczny wzdłuż powierzchni ekwipotencjalnej jest równy zero, więc zerowemu gradientowi hydraulicznemu odpowiadałaby skończona wartość prędkości filtracji, co sprzeczne jest z prawem Darcy. Rozpatrzmy dla przykładu pewien odcinek linii prądu, (linia poprowadzona w polu prędkości filtracji w ten sposób, że styczne do niej w każdym punkcie wskazują kierunek wektora prędkości) na rys. 4.3. Weźmy dwa punkty  $[A(x, y)$  i  $B(x, y)]$  znajdujące się na linii prądu i oddalone od siebie o nieskończenie mały odcinek  $ds$ .

## MECHANIKA OŚRODKÓW POROWATYCH

Z punktu C przeprowadzimy styczną do linii prądu i wzdłuż niej określimy obraz graficzny wektora prędkości  $\vec{v}$  w punkcie A(x, y). Rzutując wektor na kierunek poziomy i pionowy, dostaniemy współrzędne wektora  $\vec{v}_x$  i  $\vec{v}_y$ . Wektor  $\vec{v}$  wraz ze współrzędnymi  $\vec{v}_x$  i  $\vec{v}_y$  tworzy trójkąt prostokątny DEF.

Ponieważ punkt B znajduje się nieskończenie blisko punktu A, można przyjąć z dokładnością do małych wyższego rzędu, że styczna DF jest równoległa do siecznej AB, więc  $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ .

Stąd mamy:

$$\frac{v_x}{v_y} = \frac{dx}{dy} \quad (4.164)$$

Równanie (4.164) można zapisać inaczej:

$$-v_x dy + v_y dx = 0, \quad (4.165)$$

ale które powinno być spełnione w dowolnym punkcie linii prądu.

Założmy, że istnieje funkcja  $\Psi(x, y)$  określona w obszarze filtracji, taka że różniczka zupełna tej funkcji wynosi:

$$d\Psi = v_y dx - v_x dy \quad (4.166)$$

Jak wiemy, warunkiem koniecznym i wystarczającym na istnienie różniczki zupełnej w postaci:

$$dF = F_1 dx + F_2 dy \quad (4.167)$$

jest warunek:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}. \quad (4.168)$$

W naszym przypadku:

$$F_1 = v_y, \quad F_2 = -v_x, \quad (4.169)$$

Aby więc istniała różniczka zupełna w postaci (4.167), powinien być spełniony warunek:

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad (4.170)$$

co możemy zapisać inaczej w postaci:



$$\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0. \quad (4.171)$$

Równanie (4.171) jest równaniem ciągłości przepływu dla przypadku przepływu płaskiego ( $v_z = 0$ ). Wykazaliśmy więc, że istnieje różniczka zupełna funkcji w postaci (4.167). Wyrażmy pochodne cząstkowe funkcji  $\Psi$  przy pomocy składowych wektorów prędkości.

Ponieważ różniczkę zupełną funkcji  $\Psi$  można zapisać w postaci:

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy, \quad (4.172)$$

dostajemy:

$$v_x = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad v_y = \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (4.173)$$

Z równania (4.172) wynika, że dla każdej linii prądu:

$$d\Psi = 0, \quad (4.174)$$

więc linię prądu określa równanie:

$$\Psi(x, y) = const, \quad (4.175)$$

dlatego funkcję  $\Psi$  będziemy nazywali **funkcją prądu**.

Zbadajmy relację funkcji prądu  $\Psi$  i funkcji potencjału  $\Phi$ . W tym celu skorzystamy ze związków:

$$v_x = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad i \quad v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

stąd dostaniemy:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad (4.176)$$

i

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (4.177)$$

Związki (4.176) i (4.177) są **związkami Cauchy - Riemanna**, więc zgodnie z pracą Trajdosa-Wróbla [1965] rodziny krzywych:

$$\Phi = \text{const} \quad i \quad \Psi = \text{const} \quad (4.178)$$

są wzajemnie ortogonalne. Układ tych linii w przypadku zagadnień filtracji nazywamy siatką hydrodynamiczną przepływu.

Różniczkując związek (4.176) po  $\partial y$  i związek (4.177) po  $\partial x$  dostajemy:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}, \quad (4.179)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}.$$

Ponieważ w powyższych związkach (4.179) lewe strony są identyczne, możemy zapisać:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0. \quad (4.180)$$

Funkcja prądu  $\Psi$  spełnia, więc równanie Laplace'a, co możemy zapisać w postaci:

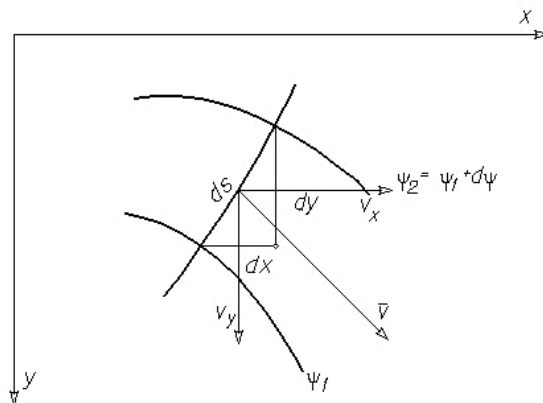
$$\nabla^2 \Psi = 0. \quad (4.181)$$

Rozwiązanie konkretnego zagadnienia sprowadza się do rozwiązania równań różniczkowych:

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad (4.182)$$

$$\nabla^2 \Psi = 0.$$

W wyniku rozwiązania powyższych równań różniczkowych możemy określić siatkę hydrodynamiczną przepływu. Sposoby rozwiązania płaskich zagadnień filtracji zostaną przedstawione w rozdziale 5.



Rys. 4.4 Obliczenie wydatku przepływającego pomiędzy dwoma liniami prądu.

Rozważmy niewielki obszar siatki hydrodynamicznej przepływu przedstawiony na rys. 4.4 Obliczymy wydatek przepływający pomiędzy dowolną linią prądu  $\Psi$  a linią oddaloną o nieskończenie mały odcinek  $\Psi + d\Psi$ . Ponieważ wydatek cieczy przepływającej przez powierzchnię  $ds \cdot 1m$  wynosi:

$$dQ = vds \quad (4.183)$$

Wydatek przepływający przez powierzchnię ekwipotencjalną reprezentowaną linią A i B wynosi:

$$Q = \oint_{A \cap B} vds. \quad (4.184)$$

Całkę krzywoliniową we wzorze (4.184) można zastąpić całką iterowaną:

$$\oint_{A \cap B} vds = \int_A^B (v_y dx - v_x dy). \quad (4.185)$$

Na podstawie wzoru (4.166) wiemy, że

$$d\Psi = v_y dx - v_x dy, \quad (4.186)$$

stąd:

$$Q = \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} d\Psi = \Psi_2 - \Psi_1 = \Delta\Psi. \quad (4.187)$$

Znając więc wartości funkcji prądu odpowiadających dwóm liniom prądu (przechodzące przez punkty A i B na rys. 4.12), można określić wydatek przepływający pomiędzy tymi liniami prądu, którym odpowiadają odpowiednie wartości funkcji prądu  $\Psi_1, \Psi_2$ .

### 4.4.3 Siatka hydrodynamiczna przepływu.

Większość praktycznych zadań teorii filtracji można traktować jako zadanie płaskie lub osiowo-symetryczne (opływ budowli wodnej, przepływ przez gródze ziemne, dopływ do rowu lub studni).

Rozwiązanie konkretnego zadania będzie polegało na określeniu w obszarze filtracji potencjału prędkości  $\Phi$  i funkcji prądu  $\Psi$ . Graficznym przedstawieniem rozwiązania zagadnienia będzie układ linii  $\Phi = \text{const}$  i  $\Psi = \text{const}$  tworzących siatkę hydrodynamiczną przepływu.

W podrozdziałach 4.4.1 i 4.4.2 wyprowadzono równania różniczkowe, jakie spełniają funkcję  $\Phi$  i  $\Psi$ , a mianowicie:

- dla zagadnień płaskich:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{i} \quad \nabla^2 \Psi = 0, \quad (4.188)$$

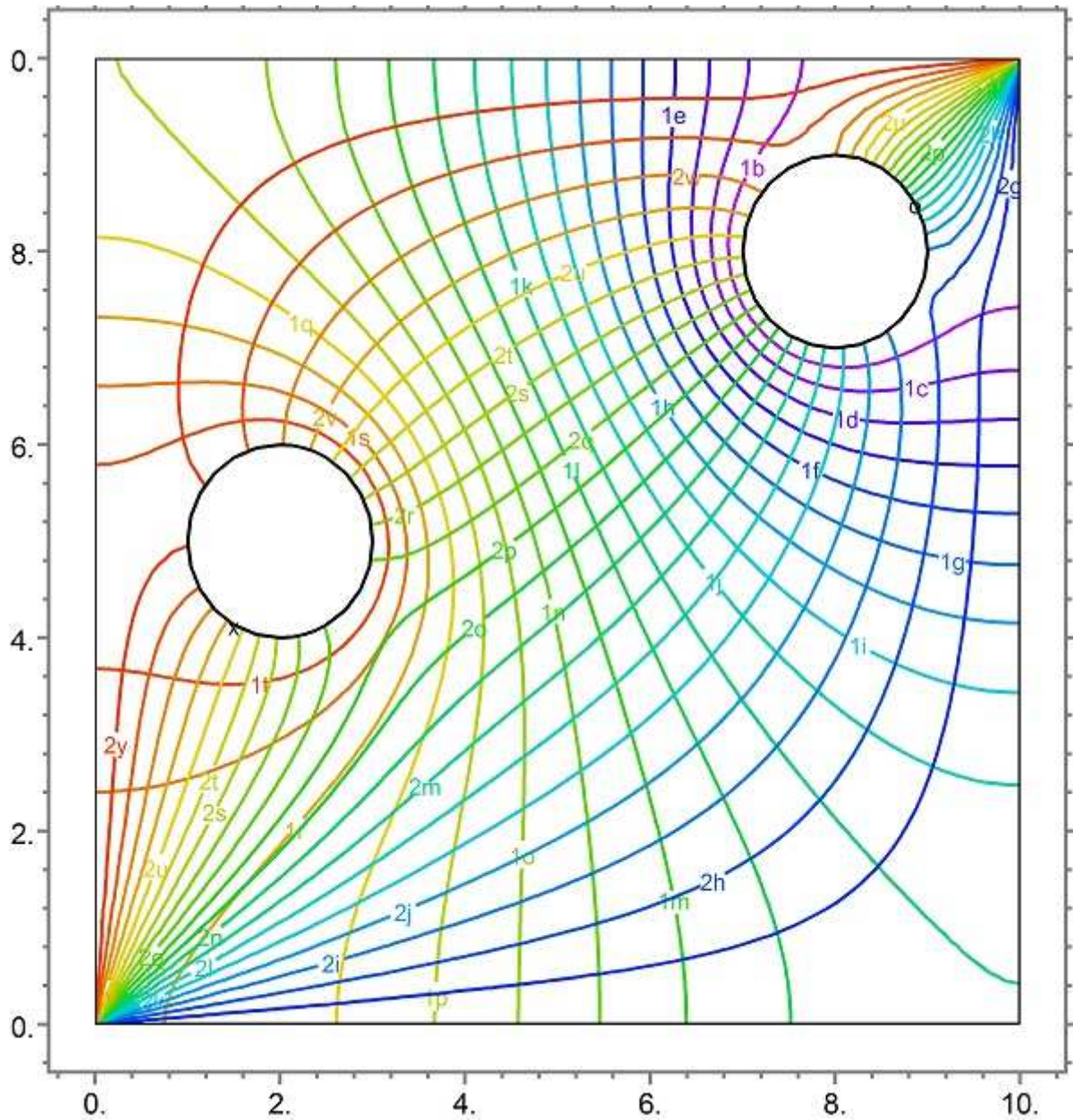
- dla zagadnień osiowych symetrycznych:

$$\nabla_r^2 \Phi = 0 \quad \text{i} \quad \nabla_r^2 \Psi = 0, \quad (4.189)$$

gdzie:

$$\nabla_r^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}. \quad (4.190)$$

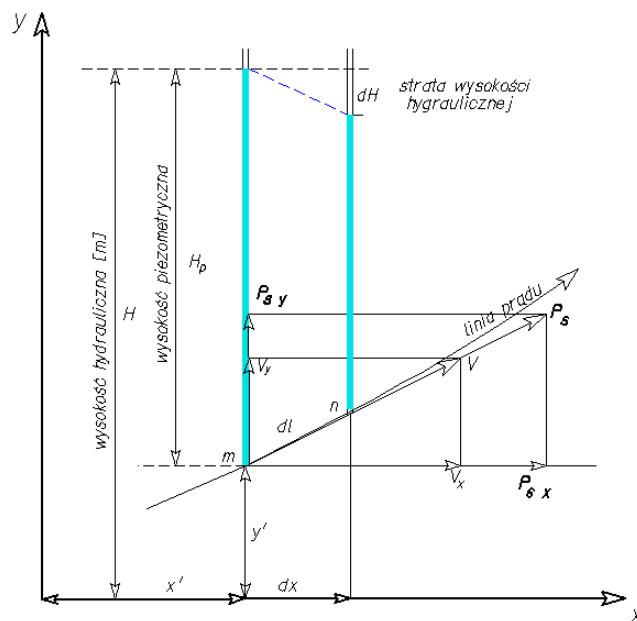
Funkcje  $\Phi$  i  $\Psi$  muszą spełniać również warunki brzegowe. Dla przypadku płaskiego zagadnienia przepływu siatkę hydrodynamiczną przedstawiono przykładowo na rys. 4.5.



Rys. 4.5 Przykład siatki hydrodynamicznej przepływu.

#### 4.5 Potencjał sił masowych filtracji.

Rozważmy punkt  $m$  o współrzędnych  $(x,y)$  znajdujący się w obszarze filtracji – rys. 4.6



Rys. 4.6 Składowe sił unoszenia.

Przez punkt m przechodzi linia prądu oznaczona strzałką określającą kierunek przepływu cieczy. W punkcie m wysokość hydrauliczna wynosi H, a w punkcie n odległym o odcinek nieskończenie mały  $dl$  wzdłuż linii prądu występuje strata wysokości hydraulicznej  $dH$ .

Gradient hydrauliczny na drodze  $mn$  wyniesie:

$$\vec{i} = -\frac{dH}{dl} \quad (4.191)$$

Oznaczmy  $\vec{p}_s$  wielkość ciśnienia sphywowego filtracji, styczną do linii prądu, która w punkcie m (rys. 4.38) równa się:

$$\vec{p}_s = -\rho g \vec{i} \quad (4.192)$$

Niech  $p_{sx}$  i  $p_{sy}$  będą rzutami siły masowej  $\vec{p}_s$  na osie  $x$  i  $y$ .

Niech  $\rho_{os}(1-f)$  oznacza wartość bezwzględną siły masowej reprezentującej ciężar objętościowy szkieletu gruntowego z uwzględnieniem wporu równą, co do wartości:

$$\rho_{os} = (\rho_s - \rho) \quad (4.193)$$

Wypadkową siłą masową  $\vec{S}$  otrzymaną z dodawania wektora  $\vec{p}_s$  i siły masowej ciężaru własnego ośrodka wyrazić możemy przy pomocy współrzędnych:

$$S_x = p_{sx} \quad , \quad S_y = p_{sy} - \Delta^* \quad (4.194)$$

gdzie  $\Delta^* = (1 - f) \rho_{os}$ . Składowe sił unoszenia filtracji można wyrazić wzorami:

$$\begin{aligned} p_{sx} &= \rho g \frac{v_x}{k}, \\ p_{sy} &= \rho g \frac{v_y}{k}. \end{aligned} \quad (4.195)$$

Wiedząc, że składowe wektora prędkości wyrażają się przy pomocy składowych gradientu spadku hydraulicznego H:

$$S_x = -\rho g \frac{\partial H}{\partial x} \quad , \quad S_y = -\rho g \frac{\partial H}{\partial y} - \Delta^* \quad (4.196)$$

Pokazaliśmy poprzednio, że pole przepływu filtracyjnego jest polem potencjalnym; wiemy również, że pole grawitacyjne jest również polem potencjalnym. Możemy więc stwierdzić na podstawie własności liniowości wektorowych pól potencjalnych względem dodawania, że suma tych dwóch pól jest również polem potencjalnym. Przyjmijmy, że  $\mathfrak{R}$  jest potencjałem tego pola zwanym potencjałem stateczności, więc powinny być spełnione związki:

$$S_x = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x}, \quad S_y = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial y}. \quad (4.197)$$

Z pierwszego ze związków (1.86) możemy policzyć:

$$\mathfrak{R} = \int S_x dx + C(y), \quad (4.198)$$

gdzie  $C(y)$  jest to nieznana funkcja od  $y$ .

Korzystając z pierwszego ze wzorów (4.196) otrzymujemy:

$$\mathfrak{R} = -\int \rho g \frac{\partial H}{\partial x} dx + C(y) \quad (4.199)$$

Co pozwala zapisać:

$$\mathfrak{R} = -\rho g H + C(y) \quad (4.200)$$

Zrózniczkujmy powyższe wyrażenia po  $\partial y$ :

$$\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial y} = -\rho g \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial C(y)}{\partial y}. \quad (4.201)$$

Ponieważ  $\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial y} = S_y$  więc dostajemy:

$$\frac{dC(y)}{dy} = -\Delta^*, \quad (4.202)$$

Co prowadzi do związku:

$$C(y) = -\Delta^* y + \mathfrak{R}_0 \quad (4.203)$$

Podstawiając wzór (4.203) do wzoru (4.200) dostajemy postać jawną potencjału:

$$\mathfrak{R} = -(\rho g H + \Delta^* y) + \mathfrak{R}_0 \quad (4.204)$$

gdzie  $\mathfrak{R}_0$  jest dowolną stałą.

Można pokazać, że wyprowadzona postać potencjału (4.204) jest taka sama w przypadku zagadnienia przestrzennego. Powierzchnie ekwipotencjalne pola sił masowych można określić z równania:

$$\mathfrak{R}_0 - \mathfrak{R} = \Delta^* y + \rho g H = const \quad (4.205)$$

W szczególności niech linia ekwipotencjalna  $\Phi = -kH = const$  przechodzi przez punkt M obszaru filtracji – rys. 4.14. W punkcie przecięcia linii  $\Phi = const$  znamy położenie punktu M, możemy, więc obliczyć dla tego punktu wartość  $\mathfrak{R}$  przyjmując oczywiście w dowolny sposób wartość  $\mathfrak{R}_0$ . Znając powierzchnie ekwipotencjalne pola skalarnego  $\mathfrak{R}$  możemy w określić wektor, który jest normalny do tych powierzchni ekwipotencjalnych.. Wartość bezwzględna tego wektora jest równa  $-\partial \mathfrak{R} / \partial n$ , gdzie  $\vec{n}$  jest normalną do powierzchni ekwipotencjalnej.

## 4.6 Teoria elektrokinetycznego przepływu

Problem elektrokinetycznego przepływu cieczy przez ośrodek porowaty był tematem wielu publikacji z różnych dziedzin nauki: fizyki, chemii, biologii, geotechniki. Bogaty przegląd literatury dotyczącej tej problematyki można znaleźć w pracach Mitchella [1976], Olsena [1969], Strzeleckiego [1982, 2008].

Procesy elektrokinetyczne są najczęściej wykorzystywane w geoinżynierii do osuszania i utwardzania słabych gruntów spoistych. Dla wyjaśnienia tych procesów używa się pojęcia elektroosmozy i elektroforezy.

Elektroforezą nazywamy ruch cząstek koloidalnych lub zawiesiny w polu elektrycznym. Zjawisko to, w odróżnieniu od wędrówki jonów, nie jest uwarunkowane ładunkiem elektrycznym cząstki, która jako całość jest elektrycznie obojętna, lecz spadkiem potencjału w dyfuzyjnej warstwie zwanej warstwą Guy'a-Chapmana.



Gdy stycznie do granicy faz (fazy stałej i ciekłej), na której istnieje podwójna warstwa dyfuzyjna, przyłoży się pole elektryczne, wywoła ono ruch warstwy dyfuzyjnej względem trwale związanej z fazą stałą warstwy Helmholtza-Sterna. Rezultatem widocznym makroskopowo będzie ruch obu faz: stałej i ciekłej. Jeżeli faza stała jest silnie zdyspergowana, ruch ten polegać będzie na przesuwanie się jej cząstek względem nieruchomej cieczy (elektroforeza), gdy natomiast jest ona fazą zwartą, wtedy nastąpi przepływ fazy ciekłej względem nieruchomej fazy stałej (elektroosmoza). Znane są również efekty odwrotne. Wymuszając ruch cząstek fazy stałej względem nieruchomej cieczy, wytwarzamy w niej gradient potencjału w kierunku ruchu cząstek (potencjał sedymentacji) zwany także efektem Dorna; wymuszając natomiast ruch fazy ciekłej względem fazy stałej obserwujemy wytwarzanie się potencjału elektrycznego (potencjał przepływu).

Te cztery wzajemnie powiązane efekty określono, jako zjawiska elektrokinetyczne. W pierwotnym ujęciu tych zjawisk w zakresie procesów elektrokinetycznych nie uwzględniono zjawiska przepływu dyfuzyjnego wywołanego działaniem gradientu potencjału chemicznego.

Najbardziej rozbudowaną teorią opisującą powyższe procesy jest teoria przepływu elektroosmotycznego i teoria przepływu chemiczno-osmotycznego.

Prawa, które opisują przepływ wody i prądu elektrycznego przez grunt spoisty, były określone przez licznych autorów na drodze eksperymentalnej [Gray i inni, 1967] lub teoretycznie na bazie mechaniki klasycznej przy wykorzystaniu założeń termodynamiki procesów nieodwracalnych [De Groot i inni, 1969], [Bauer i inni, 1980], lub w końcu metodami homogenizacji [Ene i inni, 1977], [Strzelecki, 1980], [Auriault i inni, 1981]. Jak wykazują doświadczenia związane ze zjawiskami elektrokinetycznymi w gruntach, wiążą się one w istotny sposób ze zjawiskiem przepływu dyfuzyjnego.

W gruntach spoistych mamy bowiem do czynienia z gradientem stężenia jonów, a zatem obserwowany jest wywołany nim przepływ cieczy i prądu elektrycznego. Problem ten jest rozpatrywany w literaturze oddzielnie jako proces przepływu chemiczno-osmotycznego.

### 4.6.1. Sformułowanie problemu przepływu elektrokinetycznego

Ograniczymy się na wstępie do wąskiego przedziału zagadnień dotyczącego przepływu elektroosmotycznego omówionego szczegółowo w pracy Auriaulta i in. [1990] poprzez zastosowanie teorii homogenizacji dla sformułowania podstawowych zależności procesów elektrokinetycznych.

Założymy, że mamy do czynienia z ośrodkiem porowatym nieodkształcalnym, posiadającym niezrównoważony ładunek elektryczny. Pory ośrodka wypełnia ciecz nieściśliwa o określonej małej koncentracji jonów. Cząsteczki cieczy są dipolami.

Pory ośrodka są ze sobą połączone, co umożliwi przepływ cieczy. Obydwie fazy ośrodka, ciekła i stała, są idealnymi dielektrykami.

W momencie równowagi oznaczonej przez nas indeksem <sup>0</sup> ciecz i jony są nieruchome i znajdują się pod działaniem sił elektrycznych i dyfuzji.

Rozważamy ośrodek porowaty o strukturze periodycznej  $\Omega$ . Zakładamy, że część wypełniona fazą stałą będzie oznaczona  $\Omega_s$ , a fazą ciekłą  $\Omega_f$ .

Jeżeli  $\vec{E}_0 = -gradV$  oznacza pole elektryczne,  $V$  - potencjał elektryczny,  $q_0$  - gęstość ładunku ( $q_s$  w obszarze fazy stałej i  $q_f$  w obszarze fazy ciekłej), a  $\theta$  jest tensorem dielektryczności (izotropowym w  $\Omega_f$ ), to:

$$div(\theta\vec{E}_0) = q_0 \quad (4.206)$$

oraz na powierzchni  $\Gamma$  rozgraniczającej  $\Omega_s$  i  $\Omega_f$ :

$$[\theta\vec{E}_0\vec{N}] = \delta_{\Gamma 0} \quad (4.207)$$

gdzie  $\delta_{\Gamma 0}$  określa gęstość powierzchniową ładunku.

Równowaga jonów wyraża się równaniem:

$$\varphi_0\vec{E}_0 - Dgrad q_0 = 0 \quad (4.208)$$

w którym  $\varphi_0$  jest przewodnością elektryczną cieczy zawierającej jony.

Dla ułatwienia rozważań rozpatrujemy przypadek, gdy ciecz zawiera tylko jeden rodzaj identycznych jonów. Przy takim założeniu zgodnie z pracą Landaua [1972] mamy:

$$\varphi_0 = q_0 b e, \quad b = \frac{1}{6\pi\eta R_n}, \quad D = k_b T_b \quad (4.209)$$

gdzie  $D$  jest wielkością stałą,  $T$  oznacza temperaturę cieczy,  $b$  określa ruchliwość jonów uwodnionych,  $k_b$  to stała Boltzmana,  $R_n$  oznacza promień jonów uwodnionych,  $\eta$  to lepkość cieczy oraz  $e$  to ładunek jonów uwodnionych.

Z tego wynika, że zarówno pole elektryczne  $\vec{E}_0$ , jak i gęstość ładunku  $q_0$  zawartego w cieczy są silnie uzależnione od zmiennych przestrzennych. Jony są zlokalizowane głównie w podwójnej warstwie dyfuzyjnej otaczającej  $\Gamma$  o grubości praktycznie niezależnej od wielkości porów (rys. 4.7).

Zakładamy, że ładunki zewnętrzne w  $\Omega_s$  są całkowicie równoważone ładunkami o znaku przeciwnym występującymi w  $\Omega_f$ .

Średnie pole elektryczne dla całego obszaru  $\Omega$  jest więc równe zeru:

$$\langle \vec{E}_0 \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \vec{E}_0 d\Omega = \vec{0} \quad (4.210)$$

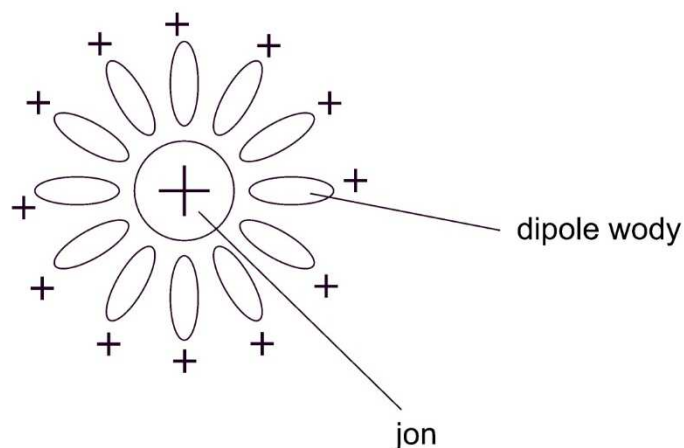
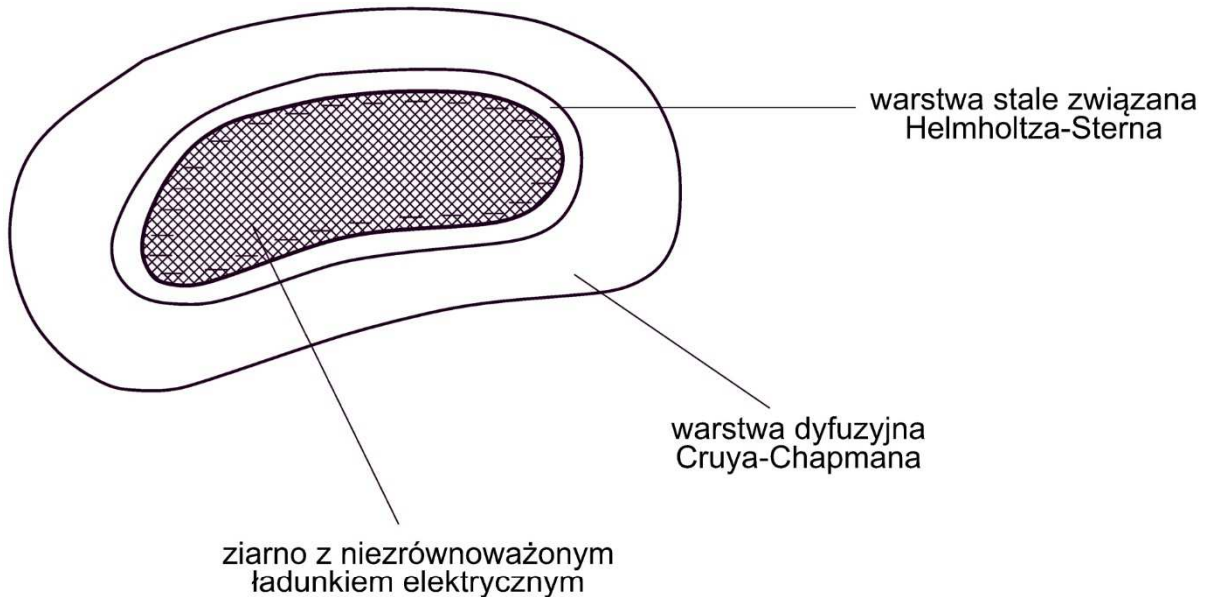
## MECHANIKA OŚRODKÓW POROWATYCH

Struktura periodyczna ośrodka narzuca  $\Omega$ -periodyczność pola elektrycznego  $\vec{E}_0$ , pola magnetycznego  $\vec{B}$ , potencjału  $V$ , gęstości ładunku  $q_0$ , prędkości przepływu  $v$  oraz ciśnienia  $p$ . Zakładamy ponadto, że tensor dielektryczności spełnia warunek eliptyczności:

$$\theta_{ij}x_i x_j \geq \gamma_0 |x|^2, \quad \gamma_0 > 0 \quad \forall x \quad (4.211)$$

Uważamy oczywiście, że znane są wielkości charakteryzujące stan ośrodka w równowadze.

Wywołujemy teraz pewne zakłócenie (perturbację) o wielkości  $\gamma \ll \varepsilon$  przykładając w skali makroskopowej gradient ciśnienia cieczy, potencjału elektrycznego i koncentracji jonów. Ponieważ założone zakłócenia pola elektrycznego są małe, możemy zgodnie z pracą Landaua [1972] pominąć w dalszych rozważaniach pole magnetyczne  $\vec{B}$ .



Rys. 4.7 Podwójna warstwa dyfuzyjna wokół ziarna z niezrównoważonym ładunkiem elektrycznym.

Wartości ładunku elektrycznego, pola elektrycznego i gęstości powierzchniowej ładunku w skali mikro, po uwzględnieniu przyrostu wynikającego z zadanego wymuszania zewnętrznego, wynoszą:

$$q_f = q_0 + \bar{q}; \quad \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{\bar{E}}; \quad \delta_\Gamma = \delta_{\Gamma_0} + \bar{\delta}_\Gamma. \quad (4.212)$$

#### 4.6.2 Rozwiązanie problemu przepływu elektrokinetycznego.

Pełne równania Maxwella i Stokesa dla rozważanego przypadku mają postać:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\text{grad}V, \\ \text{div}(\theta\vec{E}) &= q, \\ \text{div}(\vec{j}) &= 0, \\ \vec{j} &= \varphi\vec{E} - D\text{grad}q + q\vec{v}, \\ \mu\nabla^2\vec{v} &= \text{grad}p - q\vec{E} + \frac{D}{be}\text{grad}q + \rho_l(\vec{v}\text{grad})\vec{v}, \\ \text{div}\vec{v} &= 0, \end{aligned} \quad (4.213)$$

z warunkami brzegowymi:

$$\begin{aligned} \theta\vec{E}\vec{N}|_\Gamma &= \delta_\Gamma, \\ \vec{j}\vec{N}|_\Gamma &= 0, \\ \vec{v}|_\Gamma &= \vec{0}, \end{aligned} \quad (4.214)$$

oraz z warunkami  $\Omega$ -periodyczności:

$$\begin{aligned} [\vec{E}] &= \vec{0}, \\ [\vec{v}] &= \vec{0}, \\ [\vec{j}] &= \vec{0}, \\ [q] &= 0, \\ [p] &= 0. \end{aligned} \quad (4.215)$$

Po uwzględnieniu równania równowagi jonów oraz faktu, że amplituda jest mała:  $\gamma \ll \varepsilon$  powyższe równania z dokładnością do małych pierwszego rzędu  $\varepsilon^0$  można zapisać:

$$\vec{E} = -\text{grad}V, \quad (4.216)$$

$$\operatorname{div}(\theta \vec{E}) = \bar{q} \quad (4.217)$$

$$\theta \vec{E} \vec{N} \Big|_{\Gamma} = \bar{\delta} \Big|_{\Gamma}, \quad (4.218)$$

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad (4.219)$$

$$\vec{j} = \varphi_0 \vec{E} + be \bar{q} \vec{E}_0 - D \operatorname{grad} \bar{q} + q_0 \vec{v}, \quad (4.220)$$

$$\vec{j} \vec{N} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (4.221)$$

$$\mu \nabla^2 \vec{v} = \operatorname{grad} p - q_0 \vec{E} - \bar{q} \vec{E}_0 + \frac{D}{be} \operatorname{grad} \bar{q}, \quad (4.222)$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (4.223)$$

$$\vec{v} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (4.224)$$

gdzie: gęstość prądu  $\vec{j}$  określa prąd unoszenia  $q_0 \vec{v}$ ,  $D \operatorname{grad} \bar{q}$  prąd dyfuzji oraz  $\varphi_0 \vec{E} + be \bar{q} \vec{E}_0$  prąd względny składający się z prądu  $\varphi_0 \vec{E}$  wytworzonego przez zewnętrzne pole elektryczne i prądu  $be \bar{q} \vec{E}_0$ , który powstał na skutek zmiany gęstości ładunku  $\bar{q}$ .

Ze względu na słabą koncentrację jonów, gęstość prądu nie zawiera członu z  $\operatorname{grad} p$ . Siły występujące w równaniu Stokesa (4.222) pochodzą od działania gradientu ciśnienia, gradientu pola elektrycznego i gradientu koncentracji jonów i są równoważone siłami lepkości ciecchy Newtona.

Można obecnie dokonać normalizacji układu równań i porównać wielkości stałych bezwymiarowych tak jak postępowaliśmy w rozdziałach poprzednich. Istnieje możliwość rozpatrzenia wielu przypadków rzędu wielkości poszczególnych stałych bezwymiarowych. Rozpatrzmy jednakże tylko jeden przypadek, który w skali makroskopowej prowadzi do rezultatów sprawdzalnych na drodze eksperymentalnej.

Założymy mianowicie, że działania zewnętrzne  $\operatorname{grad} p$ ,  $q_0 \vec{E}$  i  $\frac{D}{be} \operatorname{grad} \bar{q}$  są wielkościami tego samego rzędu, oraz że prąd unoszenia i prąd względny są również tego samego rzędu wielkości, czyli że:

$$\frac{l^2 q_0}{\mu be} = 0(1). \quad (4.225)$$

Dodatkowo przyjmujemy, jak to już czyniliśmy w przypadku klasycznej filtracji, że liczba bezwymiarowa  $Q_l = 0(\varepsilon^{-1})$ .

W równaniu (4.222) pominęliśmy człony wynikające z działania sił bezwładności, zakładając że rozważamy przypadek quasi-statyczny przy niewielkich wartościach prędkości przepływu  $\vec{v}$ .

Z definicji wielkości gęstości powierzchniowej ładunku możemy zapisać:

$$\bar{\delta}_\Gamma = O(l\bar{q}). \quad (4.226)$$

Pamiętamy, że wielkości  $\vec{v}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{E}$ ,  $p$  i  $q$  są  $\Omega$ -periodyczne.

Zakładamy, że każda z wielkości fizycznych zależy od dwóch zmiennych przestrzennych  $x$  i  $y$ , oraz że  $y=x/\varepsilon$  jest zmienną bezwymiarową w skali mikroskopowej, a  $x$  w skali makroskopowej. Po dokonaniu rozwinięć asymptotycznych poszukiwanych wielkości fizycznych otrzymamy:

$$\begin{aligned} v &= \vec{v}^{(0)}(x, y) + \varepsilon \vec{v}^{(1)}(x, y) + \varepsilon^2 \vec{v}^{(2)}(x, y) + \dots \\ p &= p^{(0)}(x, y) + \varepsilon p^{(1)}(x, y) + \varepsilon^2 p^{(2)}(x, y) + \dots \\ \vec{j} &= \vec{j}^{(0)}(x, y) + \varepsilon \vec{j}^{(1)}(x, y) + \varepsilon^2 \vec{j}^{(2)}(x, y) + \dots \\ q &= q^{(0)}(x, y) + \varepsilon q^{(1)}(x, y) + \varepsilon^2 q^{(2)}(x, y) + \dots \\ V &= V^{(0)}(x, y) + \varepsilon V^{(1)}(x, y) + \varepsilon^2 V^{(2)}(x, y) + \dots \end{aligned} \quad (4.227)$$

Korzystając ze związku różniczkowego:

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y}, \quad (4.228)$$

układ równań (4.216) do (4.224) możemy przedstawić w postaci:

$$\left( \operatorname{div}_x + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}_y \right) \left( \theta \left( \operatorname{grad}_x + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{grad}_y \right) \right) V = \bar{q}, \quad (4.229)$$

$$\left( \operatorname{grad}_x + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{grad}_y \right) \vec{E} \vec{N} = \bar{\delta}_\Gamma \quad (4.230)$$

$$\left( \operatorname{div}_x + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}_y \right) \vec{j} = 0, \quad (4.231)$$

$$\begin{aligned} \vec{j} &= -\varphi_0 \left( \operatorname{grad}_x V + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{grad}_y V \right) + be\bar{q}\vec{E}_0 + \\ &- D \left( \operatorname{grad}_x \bar{q} + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{grad}_y \bar{q} \right) + q_0 \vec{v}, \end{aligned} \quad (4.232)$$

$$\begin{aligned} \left( \nabla_x^2 + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\varepsilon^2} \nabla_y^2 \right) \vec{v} &= Q_l \left( \operatorname{grad}_x + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{grad}_y \right) p + \\ &+ q_0 Q_l \left( \operatorname{grad}_x + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{grad}_y \right) V - Q_l \bar{q} \vec{E}_0 + Q_l \frac{D}{be} \left( \operatorname{grad}_x + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{grad}_y \right) \bar{q}, \end{aligned} \quad (4.233)$$

$$\left( \operatorname{div}_x + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}_y \right) \vec{v} = 0, \quad (4.234)$$

$$\vec{v}|_{\Gamma} = \vec{0}. \quad (4.235)$$

Równanie (4.229) dla rzędu  $\varepsilon^{-2}$  i równanie (4.230) dla rzędu  $\varepsilon^{-1}$  można zapisać w postaci:

$$\operatorname{div}_y \left( \theta \left( \operatorname{grad}_y V^{(0)} \right) \right) = 0, \quad (4.236)$$

$$\theta \operatorname{grad}_y V^{(0)} \vec{N} \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (4.237)$$

Niech  $\mathcal{V}$  określa przestrzeń Hilberta, składającą się ze zbioru funkcji regularnych  $\xi$ , określonych w  $\Omega$ ,  $\Omega$ -periodycznych, spełniających warunek, dla których norma wyraża się poprzez iloczyn skalarny:

$$(\xi_1, \xi_2) = \int_{\Omega} \theta \operatorname{grad}_y \xi_1 \operatorname{grad}_y \xi_2 d\Omega. \quad (4.238)$$

Po pomnożeniu równania (4.236) przez  $\xi \in \mathcal{V}$ , a następnie scałkowanie przez części przy uwzględnieniu warunku brzegowego (4.237) otrzymuje się ekwiwalentne wyrażenie wariacyjne z dokładnością do dowolnej funkcji zmiennej niezależnej  $x$  określonej warunkiem zewnętrznym  $\int_{\Omega} \xi d\Omega = 0$ , a więc:

$$\int_{\Omega} \theta \operatorname{grad}_y V^{(0)} \operatorname{grad}_y \xi d\Omega \quad \forall \xi \in \mathcal{V}. \quad (4.239)$$

Stąd wynika, że  $V^{(0)}(x, y) = V^{(0)}(x)$ , czyli potencjał  $V^{(0)}$  nie zależy od zmiennej  $y$ .

Z równań (4.229) dla rzędu  $\varepsilon^{-1}$  i (4.230) dla rzędu  $\varepsilon^0$  po uwzględnieniu (4.239) otrzymuje się równanie:

$$\operatorname{div}_y \left( \theta \operatorname{grad}_x V^{(0)} \right) + \operatorname{div}_y \left( \theta \operatorname{grad}_y V^{(1)} \right) = 0, \quad (4.240)$$

z warunkiem:

$$\vec{N} \left( \theta \operatorname{grad}_x V^{(0)} + \theta \operatorname{grad}_y V^{(1)} \right) \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (4.241)$$

przy czym  $V^{(1)}$  jest  $\Omega$ -periodyczne czyli  $[V^{(1)}] = 0$ .

Postępując analogicznie jak opisano wyżej, można wykazać, że równanie (4.240) jest równoważne równaniu (4.242) z dokładnością do dowolnej funkcji zależnej tylko od zmiennej przestrzennej  $x$ :

$$\int_{\Omega} Q_l \operatorname{grad}_y V^{(1)} \operatorname{grad}_y \xi d\Omega = - \int_{\Omega} Q_l \operatorname{grad}_x V^{(0)} \operatorname{grad}_y \xi d\Omega \quad \forall \xi \in \mathcal{V}. \quad (4.242)$$

Istnienie i jednoznaczność rozwiązania wynika z lematu Laxa-Milgrama. Jeżeli  $\alpha_i(y)$  jest rozwiązaniem szczególnym równania  $grad_x V^{(0)} = \vec{j}$ , to rozwiązanie równania  $V^{(1)}$  można zapisać w postaci:

$$V^{(1)} = \alpha_i(y) grad_x V^{(0)} + \bar{V}^{(1)}(x) \quad (4.243)$$

gdzie  $\bar{V}^{(1)}$  jest dowolną funkcją zależną tylko od zmiennej przestrzennej  $x$ .

Po podstawieniu w równaniu (4.242)  $V^{(1)} = \alpha_i i \xi = \alpha_j$ , a następnie  $V^{(1)} = \alpha_j i \xi = \alpha_i$  możemy dzięki symetrii lewych stron równania (4.242) zapisać:

$$\int_{\Omega} \theta_{kh} \delta_{ki} grad_{yh} \alpha_j d\Omega = \int_{\Omega} \theta_{hk} \delta_{kj} grad_{yh} \alpha_i d\Omega \quad (4.244)$$

oraz:

$$\int_{\Omega} \theta_{ih} grad_{yh} \alpha_j d\Omega = \int_{\Omega} \theta_{jh} grad_{yh} \alpha_i d\Omega. \quad (4.245)$$

Z równania (4.232) dla rzędu  $\varepsilon^{-1}$  otrzymamy:

$$D grad_y q^{(0)} = \vec{0}, \quad (4.246)$$

więc korzystając z  $\Omega$ -periodyczności funkcji  $q^{(0)}$  uzyskujemy więc:

$$q^{(0)}(x, y) = q^{(0)}(x). \quad (4.247)$$

Równanie (4.233) dla rzędu  $\varepsilon^1$  po uwzględnieniu że  $Q_i = O(\varepsilon^{-2})$  oraz po pomnożeniu obu stron równania przez  $\varepsilon^2$  prowadzi do wniosku, że  $p^{(0)}(x, y) = p^{(0)}(x)$ . Z równania (4.233) dla rzędu  $\varepsilon^{(0)}$  oraz warunku brzegowego (4.235) dla rzędu  $\varepsilon^{(0)}$  otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \nabla_y^2 \bar{v}^{(0)} &= grad_x p^{(0)} + q_0 \left( grad_x V^{(0)} + grad_y V^{(1)} \right) + \\ &+ \bar{q}^{(0)} grad_y V^{(0)} + \frac{D}{be} \left( grad_x \bar{q}^{(0)} + grad_y \bar{q}^{(1)} \right) \end{aligned} \quad (4.248)$$

Niech  $\zeta$  określa przestrzeń Hilberta złożoną z regularnych funkcji wektorowych  $\vec{\mu}$  o zerowej dywergencji  $\Omega$ -periodycznych, określonych w  $\Omega_f$ , zerowych na powierzchni  $\Gamma$ , dla których iloczyn skalarny wynosi:



$$(\mu_1, \mu_2) = \int_{\Omega_f} \frac{\partial \mu_{1i}}{\partial x_k} \frac{\partial \mu_{2i}}{\partial x_k} d\Omega. \quad (4.249)$$

Po pomnożeniu (4.248) przez  $\bar{\mu} \in \xi$  i scałkowaniu przez części uzyskuje się wyrażenie słabo równoważne:

$$(\bar{v}^{(0)}, \mu) = - \int_{\Omega_f} [grad_x p^{(0)} + \frac{D}{be} grad_x \bar{q}^{(0)} + q_0 (\delta + grad_y \alpha) grad_x V^{(0)}] \bar{\mu} d\Omega \quad \forall \bar{\mu} \in \xi, \quad (4.250)$$

które ma jedno i tylko jedno rozwiązanie, co wynika z lematu Laxa- Milgrama.

Jeżeli  $t^i$  jest rozwiązaniem szczególnym, odpowiadającym przypadkowi, gdy  $\partial p^{(0)} / \partial x_j = \delta_{ij}$  oraz  $grad_x V^{(0)} = grad_x \bar{q}^{(0)} = 0$ ,  $\omega^i$  rozwiązaniem gdy,  $\partial V^{(0)} / \partial x_j = \delta_{ij}$  oraz  $grad_x p^{(0)} = 0$  i w końcu  $\mu^i$  - rozwiązaniem szczególnym, gdy:  $\partial V^{(0)} / \partial x_j = \delta_{ij}$  oraz  $grad_x p^{(0)} = grad_x V^{(0)} = \vec{0}$  to  $\bar{v}^{(0)}$  można zapisać w postaci:

$$\bar{v} = -t^i grad_{x_i} p^{(0)} - \omega^j grad_{x_j} V^{(0)} - \mu^i grad_{x_i} \bar{q}^{(0)}. \quad (4.251)$$

Po obliczeniu średniej  $\langle \bullet \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega_f} \bullet d\Omega$  otrzymujemy z dokładnością do pierwszego rzędu rozwinięcie asymptotyczne wielkości:

$$\langle \bar{v}_f^{(0)} \rangle = -L_{11} grad_x p^{(0)} - L_{12} grad_x V^{(0)} - L_{13} grad_x \bar{q}^{(0)}, \quad (4.252)$$

gdzie  $L_{11}, L_{12}, L_{13}$  są składowymi tensora drugiego rzędu reprezentującymi parametry efektywne, uśrednione do skali makroskopowej równania przepływu i wyrażone wzorami:

$$L_{11}^{ij} = \langle t_j^i \rangle_f, \quad (4.253)$$

$$L_{12}^{ij} = \langle \omega_j^i \rangle_f, \quad (4.254)$$

$$L_{13}^{ij} = \langle \mu_j^i \rangle_f, \quad (4.255)$$

Ponieważ  $div_y \bar{v}^{(0)} = 0$ , całka objętościowa określająca  $\langle \bar{v}_f^{(0)} \rangle$  odpowiada całce powierzchniowej i  $\langle \bar{v}_f^{(0)} \rangle$  reprezentuje przepływ strumienia cieczy.

Prędkość cieczy przepływającej przez ośrodek porowaty jest liniowo zależna od makroskopowego gradientu ciśnienia, potencjału elektrycznego i koncentracji jonów.

Analizując równania wyjściowe można dostrzec, że:

$$L_{11} = O\left(\frac{l^2}{\mu}\right), L_{12} = O\left(\frac{q_0 l^2}{\mu}\right), L_{13} = O\left(\frac{Dl^2}{be\mu}\right). \quad (4.256)$$

Równanie (4.236) dla rzędu  $\varepsilon^0$  ma postać:

$$\operatorname{div}_x \vec{v}^{(0)} + \operatorname{div}_y \vec{v}^{(1)} = 0. \quad (4.257)$$

Po obliczeniu średniej otrzymujemy:

$$\operatorname{div}_x \vec{v}^{(0)} = 0 \quad (4.258)$$

Widać więc, że cecha nieściśliwości cieczy przenosi się ze skali mikro do skali makro. Z równań (4.231) dla rzędu  $\varepsilon^{-1}$  i (4.232) dla rzędu  $\varepsilon^0$  otrzymujemy:

$$\operatorname{div}_y \vec{j} = 0 \quad (4.259)$$

$$\vec{j}^{(0)} = -\varphi_0 \operatorname{grad}_x \bar{V}^{(0)} - D \left( \operatorname{grad}_x \bar{q}^{(0)} + \operatorname{grad}_y \bar{q}^{(1)} \right) + be \bar{q}^{(0)} \vec{E}^{(0)} + q_0 \vec{v}^{(0)} \quad (4.260)$$

z warunkiem brzegowym:

$$\begin{aligned} \vec{j}^{(0)} \vec{N} \Big|_{\Gamma} &= 0, \\ \varphi_0 &= beq_0. \end{aligned} \quad (4.261)$$

Weźmy przestrzeń Hilberta  $\xi$  funkcji regularnych  $\psi$  określonych w  $\Omega_f$ ,  $\Omega$ -periodycznych, dla której iloczyn skalarny wynosi:

$$(\psi_1, \psi_2) = \int_{\Omega_f} \operatorname{grad}_y \psi_1 \operatorname{grad}_y \psi_2 d\Omega, \quad (4.262)$$

i norma ma postać:

$$\|\psi\| = (\psi, \psi) \quad \forall \psi \in \xi. \quad (4.263)$$

Rozwiązanie równania (4.259) jest takie samo z dokładnością do pewnej dowolnej funkcji zmiennej  $x$ , jak rozwiązanie równania:

$$\int_{\Omega} D \text{grad}_{yi} q^{(1)} \text{grad}_{yi} \psi d\Omega = - \int_{\Omega_f} \{ [\varphi_0 (I_{ij} + \text{grad}_{yi} \alpha_i) + q_0 \omega_j^i] \text{grad}_{xi} \bar{V}^{(0)} + \text{beq}^{(0)} \bar{E}^{(0)} + q_0 t_j^i \text{grad}_{xi} p^{(0)} + (DI_{ij} + q_0 \mu_j^i) \text{grad}_{xi} \bar{q}^{(0)} \} \text{grad}_y \psi d\Omega \quad \forall \psi \in \xi \quad (4.264)$$

gdzie:

$$\bar{E}^{(0)} = -\text{grad}V^{(0)}. \quad (4.265)$$

Istnienie i jednoznaczność rozwiązania równania (4.388) wynika z lematu Laxa-Milgrama i ma postać:

$$q^{(1)} = \beta_i^1 \text{grad}_{xi} p^{(0)} + \beta_i^2 \text{grad}_{xi} \bar{V}^{(0)} + \beta_i^3 \text{grad}_{xi} \bar{q}^{(0)} + \beta_i^4 q^{(0)} + \bar{q}^{(1)}(x) \quad (4.266)$$

gdzie:

$\hat{q}^{(1)}$  jest dowolną funkcją zależną od  $x$ ,

$\beta_i^1$  jest rozwiązaniem szczególnym dla przypadku, gdy:  $\text{grad}_{xj} p^{(0)} = \delta_{ij}$ ,

Zaś

$$\text{grad}_x \bar{V}^{(0)} = \text{grad}_x \bar{q}^{(0)} = \bar{q}^{(0)} = 0 \quad (4.267)$$

$\beta_i^2$  jest rozwiązaniem dla  $\text{grad}_{xj} \bar{V}^{(0)} = \delta_{ij}$  oraz

$$\text{grad}_x p^{(0)} = \text{grad}_x \bar{q}^{(0)} = \bar{q}^{(0)} = 0 \quad (4.268)$$

$\beta_i^3$  jest rozwiązaniem dla:

$$\text{grad}_{xj} \bar{q}^{(0)} = \delta_{ij} \text{ i } \text{grad}_x p^{(0)} = \text{grad}_x \bar{V}^{(0)} = \bar{q}^{(0)} = 0 \quad (4.269)$$

Po wykonaniu operacji uśrednienia równaniu (4.266) i uwzględnieniu w nim równań (4.268) i (4.269), otrzymamy z dokładnością do pierwszego rzędu makroskopowe prawo przepływu prądu elektrycznego w postaci:

$$\langle \bar{j}_f^{(0)} \rangle = -L_{21} \text{grad}_x p^{(0)} - L_{22} \text{grad}_x \bar{V}^{(0)} - L_{23} \text{grad}_x \bar{q}^{(0)} \quad (4.270)$$

gdzie:

$$L_{21}^{ij} = \langle q_0 t_j^i + D \text{grad}_{yj} \beta_i^1 \rangle = O\left( q_0 \frac{l^2}{r\mu} \right) \quad (4.271)$$

$$L_{22}^{ij} = \langle \varphi_0 (I_{ij} + \text{grad}_{yj} \beta_i^1) + q_0 \omega_j^i + D \text{grad}_{yj} \beta_i^2 \rangle = O\left( q_0^2 \frac{l^2}{\mu} \right), \quad (4.272)$$

$$L_{23}^{ij} = \langle D (I_{ij} + \text{grad}_{yj} \beta_i^3) + q_0 \mu_j^i \rangle = O\left( \frac{D q_0^2 l^2}{be\mu} \right). \quad (4.273)$$

Wektor  $\langle \vec{j}_f^{(0)} \rangle$  podobnie jak wektor  $\langle \vec{v}_f^{(0)} \rangle$  określa przepływ, gdyż

$$\text{div}_y \vec{j}^{(0)} = 0. \quad (4.274)$$

Równanie ciągłości przepływu prądu elektrycznego dla rzędu  $\varepsilon^0$  daje:

$$\text{div}_x \vec{j}^{(0)} + \text{div}_y \vec{j}^{(1)} = 0. \quad (4.275)$$

co po obliczeniu średniej pozwala napisać:

$$\langle \text{div}_x \vec{j}^{(0)} \rangle = \text{div}_x \vec{j}^{(0)} = 0. \quad (4.276)$$

Z równania (4.206) dla rzędu  $\varepsilon^0$  uzyskuje się:

$$\text{div}_y \left[ \theta \left( \text{grad}_y \bar{V}^{(2)} + \text{grad}_x \bar{V}^{(1)} \right) \right] + \text{div}_x \left[ \theta \left( \text{grad}_y \bar{V}^{(1)} + \text{grad}_x \bar{V}^{(0)} \right) \right] = -\bar{q}^{(0)}. \quad (4.277)$$

Po obliczeniu średniej w  $\Omega$  i uwzględnieniu periodyczności  $\bar{V}^{(1)}$  i  $\bar{V}^{(2)}$  otrzymujemy:

$$\langle \text{div}_x \left[ \theta \left( \text{div}_y \alpha + I \right) \right] \text{grad}_x \bar{V}^{(0)} \rangle = -\langle \bar{q}^{(0)} \rangle. \quad (4.278)$$

$\bar{V}^{(0)}$  spełnia więc, z dokładnością do pierwszego rzędu, równanie:

$$\text{div}_x \left[ \langle \theta \left( \text{grad}_y \alpha + I \right) \rangle \text{grad}_x \bar{V}^{(0)} \right] = -\bar{q}^{(0)}, \quad (4.279)$$

przy czym  $\langle \theta \left( \text{grad}_y \alpha + I \right) \rangle$  zgodnie z (4.244), (4.245) i (4.279) jest tensorem symetrycznym drugiego rzędu.

Równania (4.252), (4.259), (4.270), (4.276) i (4.279) stanowią uśredniony (zhomogenizowany) układ równań opisujących proces w skali makroskopowej:

$$\langle \vec{v}_f \rangle = -L_{11} \text{grad}_x p - L_{12} \text{grad}_x V - L_{13} \text{grad}_x q, \quad (4.280)$$

$$\text{div}_x \langle \vec{v}_f \rangle = 0, \quad (4.281)$$

$$\langle \vec{j}_f \rangle = -L_{21} \text{grad}_x p - L_{22} \text{grad}_x V - L_{23} \text{grad}_x q, \quad (4.282)$$

$$\text{div}_x \langle \vec{j}_f \rangle = 0, \quad (4.283)$$

$$\text{div}_x \left[ \langle \theta (\text{grad}_y \alpha + I) \rangle \text{grad}_x V \right] = -q. \quad (4.284)$$

Uzyskany układ równań opisuje proces elektrokinetycznego przepływu uwzględniający dodatkowo wpływ gradientu chemicznego na przepływ cieczy i prądu elektrycznego. Klasyczny układ równań pomija zatem ten wpływ, a więc zakłada, że  $L_{13} = L_{23} = 0$ .

#### 4.6.3 Dysypacja energii w procesie przepływu elektrokinetycznego

Założymy dla uproszczenia rozważań, że  $\bar{q}^{(0)} = 0$ , czyli nie występuje gradient koncentracji jonów (brak potencjału chemicznego). Dysypacja energii na jednostkę objętości wyraża się sumą:

$$W = W_1 + W_2, \quad (4.285)$$

gdzie  $W_1$  określa dysypację generowaną w procesie przepływu lepkiej cieczy:

$$W_1 = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega_f} \mu \text{div} \vec{v} \text{div} \vec{v} d\Omega, \quad (4.286)$$

co w naszym przypadku sprowadza się do postaci:

$$W_1 = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega_f} \mu \text{div}_y \vec{v}^{(0)} \text{div}_y \vec{v}^{(0)} d\Omega, \quad (4.287)$$

z dokładnością do małych pierwszego rzędu rozwinięcia asymptotycznego wektora prędkości  $\vec{v}$ .

$W_2$  jest dysypacją powstającą w procesie przepływu elektrycznego i wyraża się wzorem:

$$W_2 = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega_f} j_r \text{grad} V d\Omega \quad (4.288)$$

gdzie  $\vec{j}_r$  określa względną gęstość prądu elektrycznego.

Dla najniższego rzędu  $\varepsilon$

$$W_2 = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega_f} \left[ \varphi \left( \text{grad}_x \bar{V}^{(0)} + \text{grad}_y \bar{V}^{(1)} \right) + D \text{grad}_y \bar{q}^{(1)} \right] \left( \text{grad}_x \bar{V}^{(0)} + \text{grad}_y \bar{V}^{(1)} \right) d\Omega. \quad (4.289)$$

Z równania (4.250) po uwzględnieniu  $\vec{v} = \vec{v}^{(0)}$  otrzymujemy:

$$\left( \vec{v}^{(1)}, \vec{v}^{(0)} \right) = |\Omega W_1| = - \int_{\Omega_f} \left[ \text{grad}_x p^{(0)} + q_0 \left( I + \text{grad}_y \alpha \right) \text{grad}_x V^{(0)} \right] \vec{v}^{(0)} d\Omega \quad (4.290)$$

więc:

$$\begin{aligned} W_1 &= L_{11} \text{grad}_x p^{(0)} \text{grad}_x p^{(0)} \text{grad}_x p^{(0)} + \\ &+ \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega_f} q_0 \left( I + \text{grad}_y \alpha \right) \bar{\omega} \text{grad}_x \bar{V}^{(0)} \text{grad}_x \bar{V}^{(0)} d\Omega + \\ &+ \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega_f} q_0 \left( I + \text{grad}_y \alpha \right) (\bar{t} + \bar{\omega}) \text{grad}_x p^{(0)} \text{grad}_x \bar{V}^{(0)} d\Omega \end{aligned} \quad (4.291)$$

$W_2$  uzyskamy po pomnożeniu równania (4.260) przez  $\bar{V}^{(1)}$ , scałkowaniu przez części po  $\Omega_f$  i uwzględnieniu, że:

$$\int_{\Omega_f} \left[ \varphi \left( \text{grad}_x \bar{V}^{(0)} + \text{grad}_y \bar{V}^{(1)} \right) + D \text{grad}_y \bar{q}^{(1)} - q_0 \text{grad}_y \bar{V}^{(0)} \right] \text{grad}_y \bar{V}^{(1)} = 0 \quad (4.292)$$

Wówczas  $W_2$  wyraża się w sposób następujący:

To pozwala zapisać dysypację  $W_2$  w postaci:

$$\begin{aligned} W_2 &= L_{22} \text{grad}_x \bar{V}^{(0)} \text{grad}_x \bar{V}^{(0)} + L_{21} \text{grad}_x p^{(0)} \text{grad}_x \bar{V}^{(0)} + \\ &- \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega_f} q_0 \left( I + \text{grad}_y \alpha \right) \left[ \bar{t} \text{grad}_x p^{(0)} + \bar{\omega} \text{grad}_x \bar{V}^{(0)} \right] \text{grad}_x V^{(0)} d\Omega. \end{aligned} \quad (4.293)$$

Ostatecznie funkcję dysypacji po uwzględnieniu (4.291) i (4.293) można określić wzorem:

$$\begin{aligned} W &= L_{11} \text{grad}_x p^{(0)} \text{grad}_x p^{(0)} + (L_{12} + L_{21}) \text{grad}_x p^{(0)} \text{grad}_x \bar{V}^{(0)} + \\ &+ L_{22} \text{grad}_x \bar{V}^{(0)} \text{grad}_x \bar{V}^{(0)}. \end{aligned} \quad (4.294)$$

Uzyskana postać funkcji dysypacji energii zgodna jest z rezultatami uzyskanymi na drodze analizy makroskopowej w zakresie termodynamiki procesów nieodwracalnych.

#### 4.6.4 Podsumowanie uzyskanych rezultatów dla przepływu elektrokinetycznego

Przeprowadzone rozumowanie pozwoliło określić charakter praw makroskopowych, gdy ośrodek składa się z fazy stałej posiadającej niezrównoważony ładunek elektryczny  $q_0$ , a pory ośrodka wypełnia ciecz, która z punktu widzenia własności mechanicznych opisana jest przy pomocy modelu cieczy Newtona. Natomiast jeśli chodzi o własności elektryczne, wiemy, że cząsteczki cieczy posiadają charakter dipolowy, oraz że zawiera ona pewną ilość związków chemicznych, co powoduje, że znajdują się w niej jony dodatnie i ujemne. Z tego względu ciecz, w przeciwieństwie do fazy stałej, jest przewodnikiem prądu elektrycznego.

Ze względu na ładunek fazy stałej, wokół niej wytwarza się podwójna warstwa dyfuzyjna, będąca efektem hydratacji jonów.

Opisany wyżej przypadek może odpowiadać opisowi gruntu spoistego, którego szkielet zbudowany jest z minerałów ilastych (illit, montmorylonit lub kaolinit), a przestrzeń między cząstkami fazy stałej wypełniona jest wodą. Zakładamy, że w skali mikroskopowej mamy do czynienia z odpowiadającą periodycznemu elementowi reprezentatywnemu VER równowagą sił mechanicznych i oddziaływań elektrycznych. Na skutek przyłożonego zewnętrznego potencjału elektrycznego i gradientu ciśnienia cieczy i przy założeniu, że gradient potencjału chemicznego jest na tyle mały, że może być pominięty, uzyskaliśmy równanie przepływu elektrokinetycznego, które zapiszemy w klasycznej formie znanej w literaturze [Mitchell, 1976].

W tym celu dla przedstawienia praw makroskopowych przepływu elektrokinetycznego wprowadzimy oznaczenia:

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}^{(0)} \rangle &= \vec{v}^f, & \langle \vec{j}^{(0)} \rangle &= \vec{j}^f, \\ grad_x &= grad, \\ p^{(0)} &= p, & \bar{V}^{(0)} &= V. \end{aligned} \tag{4.295}$$

W rezultacie uzyskujemy następującą postać praw elektrokinetycznego przepływu:

$$\vec{v}^f = L_{11} grad p + L_{12} grad V, \tag{4.296}$$

$$\vec{j}^f = L_{21} grad p + L_{22} grad V, \tag{4.297}$$

która nie różni się niczym od postaci klasycznej znanej w literaturze.

Łatwo możemy pokazać, że w przypadku, gdy szkielet ośrodka nie posiada niezrównoważonego wewnętrznie ładunku elektrycznego, a ciecz (woda) jest w dalszym ciągu zjonizowana, wówczas:

$$L_{12} = L_{21} = 0 \tag{4.298}$$

i uzyskujemy dwa znane z literatury prawa fizyczne:

- prawo Darcy'ego

$$\vec{v}^f = -\tilde{k} \text{grad } p, \quad (4.299)$$

gdzie  $\tilde{k} = L_{11}$  jest tensorem przepuszczalności filtracyjnej Darcy'ego;

- prawo Ohma:

$$\vec{j}^f = \frac{1}{R} \text{grad } V \quad (4.300)$$

przy czym rzeczywiście  $L_{22} = \frac{1}{R}$ .

Zastępując gradient koncentracji jonów pojęciem gradientu potencjału chemicznego widzimy, że uzyskane wyniki przy założonej małej wielkości gradientu koncentracji jonów prowadzą do układu równań:

$$\vec{v}^f = L_{11} \text{grad } p + L_{12} \text{grad } V + L_{13} \text{grad } C \quad (4.301)$$

$$\vec{j}^f = L_{21} \text{grad } p + L_{22} \text{grad } V + L_{23} \text{grad } C \quad (4.302)$$

Brakuje trzeciego równania opisującego przepływ dyfuzyjny, który jak wiemy z literatury [Mitchell, 1976], ma postać:

$$\vec{v}^D = L_{31} \text{grad } p + L_{32} \text{grad } V + L_{33} \text{grad } C \quad (4.303)$$

Aby uzyskać to równanie, winniśmy w układzie równań (4.304) w skali mikro uwzględnić uogólnioną postać prawa Ficka. Temat przepływu dyfuzyjnego jest tematem wielu publikacji [Auriault i inni, 1993], [Łydźba i inni, 1995], [Strzelecki i inni, 2008].

Drogą homogenizacji oprócz praw przepływu elektrokinetycznego uzyskano równania makroskopowe ciągłości przepływu cieczy:

$$\text{div } \vec{v}^f = 0, \quad (4.304)$$

prądu elektrycznego:

$$\text{div } \vec{j}^f = 0, \quad (4.305)$$

oraz przepływu dyfuzyjnego:

$$\text{div} [\theta (I + \text{grad } \alpha) \text{grad } V] = -q. \quad (4.306)$$



W literaturze [Strzelecki, 1982], [Auriault i inni, 1981] wspomniany jest przypadek braku symetrii współczynników uzyskiwany na drodze doświadczalnej. Otóż wydaje się, iż można wyjaśnić ten fenomen w stosunkowo prosty sposób. W rzeczywistości zachodzi wzajemne sprzężenie ze sobą dwóch fenomenów: przepływu filtracyjno-elektroosmotycznego z przepływem chemiczno-osmotycznym. Pomijanie tego drugiego przepływu przy jego rzeczywistym występowaniu w procesie określania doświadczalnych współczynników przepływu elektrokinetycznego może prowadzić naszym zdaniem do braku symetrii współczynników  $L_{12}$  i  $L_{21}$ .

Należy również podkreślić, że uzyskana drogą homogenizacji postać funkcji dysypacji energii odpowiada znanej w literaturze postaci przy założeniu tożsamości współczynników  $L_{12}$  i  $L_{21}$ :

$$W = L_{11}gradpgradp + 2L_{12}gradpgradV + L_{22}gradVgradV \quad (4.307)$$

Oprócz równań opisujących procesy elektrokinetyczne i dyfuzyjno-osmotyczne uzyskaliśmy ścisłą receptę na określenie parametrów elektrycznych dla tensorów drugiego rzędu  $L_{11}^{ij}, L_{12}^{ij}, L_{22}^{ij}$ .

Znając strukturę ośrodka oraz cechy fizyczne fazy stałej i ciekłej możemy obliczyć precyzyjnie wszystkie wielkości stałe opisujące proces zarówno w przypadku izotropowym, i anizotropowym.

Przedstawiony w pracy model teoretyczny może stanowić punkt wyjścia do budowy modeli bardziej złożonych, uwzględniających wpływ zmiany temperatury, odkształcalności fazy stałej (model konsolidacji elektrokinetycznej), efektów dynamicznych itp. W tym ostatnim przypadku nie będzie można pominąć wpływu pola magnetycznego  $\vec{B}$  na przebieg procesu.

Przedstawione powyżej rozważania pokazują logiczną drogę poszukiwań modelu matematycznego opisującego procesy zachodzące w ośrodkach porowatych i uwzględniających wszystkie istotne rzeczywiste oddziaływania na ich przebieg.

#### **4.7 Literatura do rozdziału 4**

AURIAULT J.L., (1980)

Dynamic Behaviour of a Porous Medium Saturated by a Newtonian Fluid, Int. J. Engng. Sc., vol. 18.

AURIAULT J.L., STRZELECKI T., (1981)

On the Electro-Osmotic Flow in a Saturated Porous Medium., Int. J. Engng. Sc., vol. 19.

AURIAULT J.-L., STRZELECKI T., (1981)

On the Electro-Osmotic Flow in a Saturated Porous Medium, Int. J. Engng. Sci. Vol. 19.

AURIAULT J.-L., STRZELECKI T., BAUER J., HE S. (1990)

Porous Deformable Media Saturated by a Very Compressible Fluid, Eur. J. Mech. A/Solid, 9, 4, s. 373 - 392.

AURIAULT J.L., STRZELECKI T., BAUER J., HE S., (1990)

Porous deformable Media Saturated by a Very Compressible Fluid, Eur. J. Mech. A/Solid, , vol. 9,4.

AURIAULT J.-L., LEWANDOWSKA J. (1993)

Diffusion/Adsorption Macrotransport in Porous Media : Homogenization Analysis,

- Geotechnique, XL III, 3, s. 457 - 469,
- AURIAULT J.L., LEWANDOWSKA J. (1993)  
Diffusion/Adsorption Macrotransport in Porous Media: Homogenization Analysis,  
Geotechnique, XL III, 3, s. 457 - 469,
- BARTLEWSKA M., STRZELECKI T., (2009)  
Equations of Biots consolidation with Kelvin–Voight rheological frame, *Studia Geotechnica et Mechanica*, Vol. XXXI, No. 2,
- BARTLEWSKA M., STRZELECKI T., (2008)  
One-dimensional consolidation of the porous medium with the Rheological Kelvin–Voight skeleton, *Studia Geotechnica et Mechanica*, Vol. XXX,
- BAUER J., STRZELECKI T., (1980)  
Calculation of Electrohydrodynamical Consolidation, *Colloque International sur le Compactage. Ecole Nationale des Ponts et Chaussees. Laboratoire Central des Ponts et Chaussees. Paris, 22-23-24 avril 1980*
- BEAR J., (1972)  
Dynamics of fluids in porous media, American Elsevier, New York,
- BENSOUSSAN A., LIONS J.L., PAPANICOLAOU G., (1978),  
Asymptotic Analysis for Periodic Structures, Holland Publishing Company, Amsterdam.
- BIOT M.A., (1941)  
General Theory of three-dimensional Consolidation, *J. Appl. Physics*, , vol.12
- BIOT M.A., (1956)  
Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated porous Solid, I Low-Frequency Range, *J.A.S.A*, 28,2
- COUSSY O., (2007)  
Revisiting the constitutive equations of unsaturated porous solids using a Lagrangian saturation concept, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* 31(2007)
- COUSSY O., (2010)  
*Mechanics and Physics of Porous Solids*, JohnWiley
- DARCY H., (1856)  
*Les fontaines publiques de la ville de Dijon*, Paris,
- De GROT S.R., MAZUR P. (1969)  
Non-equilibrium Thermodynamics, North-Holland Publishing Company,
- DUPUIT J., (1863)  
*Etudes theoriques et prtiques sur le mouvement des eaux dans les canaux decouvert et a travers les terrains permeable*, Paris
- ENE H.I., UNGUREANU D. (1977)  
On the Electrohydrodynamic Equations of the Permeable Media, *Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R.R. de Roumaine*, Tom 21(69), nr. 3-4.
- FORCHHEIMER P., (1914)  
*Hydraulik*, Leipzig,
- GRAY D.H., MITCHELL J.K. (1967)  
Fundamental Aspects of Electro-Osmosis in Soils, *J. Soil Mech. and Found. Engng.*, SMG.
- KISIEL I, DERSKI W. IZBICKI R., MRÓZ Z., (1982)  
*Mechanika gruntów i skał*, Seria: Mechanika Techniczna, tom VII, PWN, Warszawa

- LAMBE T.W., WHITMAN R.V., (1978)  
Mechanika gruntów, Arkady, Warszawa,
- LANDAU L., LIFCHITZ E. (1972)  
Mechanika cieczy, Mir, Moskwa.
- ŁYDŹBA D., (1991)  
Constitutive equations of gas-coal medium, *Studia Geotechnica et Mechanica*, 13(3–4)
- ŁYDŹBA D., (2002)  
Zastosowanie metody asymptotycznej homogenizacji w mechanice gruntów i skał, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej,
- ŁYDŹBA D. (1995)  
Gas Migration through Porous Media - Mathematical Description, Homogenization, Theory of Migration and Granular Bodies, Gdańsk, strony 157-167.
- MITCHELL J.K., (1976)  
Fundamentals of Soil Behavior, New York.
- OLSEN M.W.,(1969)  
Simultaneous Fluxes of Liquid and Charge in Saturated Kaolinit, *Soil Science Society of America Proceedings*, v. 33, 3.
- POŁUBARINOWA-KOCZINA P.J., (1977)  
Teoria dwiżenia podziemnych wód, Nauka, Moskwa
- STRZELECKI T., (1982)  
„Elektrokinetyczna konsolidacja gruntu”, Praca habilitacyjna, Prace Naukowe Instytutu Geotechniki Politechniki Wrocławskiej.
- STRZELECKI T., BAUER J. , AURIAULT J.L., (1993)  
Constitutive equation of a gas-filled two-phase medium, *Transport in Porous Media* 10
- STRZELECKI T., AURIAULT J.L., BAUER J., KOSTECKI S., PUŁA W., (1996)  
Mechanika ośrodków niejednorodnych, Teoria homogenizacji, Lower Silesia Educational Publishers. (in Polish)
- STRZELECKI T., KOSTECKI S. ŻAK, S.. (2008)  
Modeling of flows through porous media, Lower Silesia Educational Publishers. (in Polish)
- STRZELECKI M., (2013)  
Quick sands effect on desert lands – example of filtration stability loss; *Studia Geotechnica et Mechanica*, Vol. XXXV, No. 1
- STRZELECKI T., STRZELECKI M., (2015)  
Relation between filtration and Soil Consolidation Theo-ries, *Studia Geotechnica et mechanica*, Vol. 37 No. 1, pp. 105-114
- WIECZYSTY A.,(1982)  
Hydrogeologia Inżynierska, PWN, Warszawa
- ModFlow : <http://water.usgs.gov/ogw/modflow/>